

通州区 2023—2024 学年第二学期高二年级期末质量检测

数学试卷

2024 年 7 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 4\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()
A. $\{-3, 3\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-3, -2, 2, 3\}$
2. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
A. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ B. $f(x) = (x-1)^2$ C. $f(x) = \lg x$ D. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
3. 已知 $a = \lg \frac{1}{2}$ ， $b = 3^{0.1}$ ， $c = \sqrt{3}$ ，则 ()
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < b < a$
4. 设 A ， B 为两个随机事件，若 $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ， $P(A) = \frac{2}{5}$ ， $P(B) = \frac{2}{3}$ ，则 $P(A|B) =$ ()
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$
5. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则“ $ab = 1$ ”是“ $a + b \geq 2$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 在 $(x-2)^{10}$ 的展开式中， x^6 的系数为 ()
A. $-64C_{10}^6$ B. $64C_{10}^6$ C. $-16C_{10}^4$ D. $16C_{10}^4$
7. 有两台车床加工同一型号零件，第 1 台加工的次品率为 4%，第 2 台加工的次品率为 5%，将两台车床加工出来的零件混放在一起，已知第 1 台，第 2 台车床加工的零件占比分别为 40%，60%，现任取一件零件，则它是次品的概率为 ()
A. 0.044 B. 0.046 C. 0.050 D. 0.090
8. 某工厂生产一种产品需经过一，二，三，四共 4 道工序，现要从 A ， B ， C ， D ， E ， F 这 6 名员工中

选出 4 人，安排在 4 道工序上工作（每道工序安排一人），如果员工 A 不能安排在第四道工序，则不同的安排方法共有（ ）

- A. 360 种 B. 300 种 C. 180 种 D. 120 种

9. 设函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线的斜率为 10，则

$$f'(-2) + f(-2) = (\quad)$$

- A. -16 B. -6 C. 6 D. 16

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ ；若方程 $f(x) = a$ 恰有三个根，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $[0, \frac{1}{e}]$ C. $(-1, \frac{1}{e})$ D. $(0, \frac{1}{e}) \cup \{-1\}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \lg x + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

12. 不等式 $x^2 - x - 12 > 0$ 的解集是_____.

13. 某区高二年级 4000 名学生的期中检测的数学成绩服从正态分布 $N(90, 15^2)$ ，则成绩位于 $[90, 105]$ 的人数大约是_____.

（参考数据： $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ）

14. 已知命题 P ： 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + a, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + b, & x > 0 \end{cases}$ 为 \mathbf{R} 上的增函数. 能说明 P 为假命题的一组 a, b 的值为

$$a = \underline{\hspace{2cm}}, \quad b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 已知函数 $f(x) = |\ln x| + b$ ，关于以下四个结论：

①函数 $f(x)$ 的值域为 $[b, +\infty)$ ；

②当 $a > b$ 时，方程 $f(x) = a$ 有两个不等实根；

③当 $b = 0, a > 0$ 时，设方程 $f(x) = a$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 为定值；

④当 $b = 0, a > 0$ 时，设方程 $f(x+1) = a$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0$.

则所有正确结论的序号为_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x} (a, b \in \mathbf{R})$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 为奇函数，求实数 a 的值；
- (2) 当 $a = 2, b = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值。

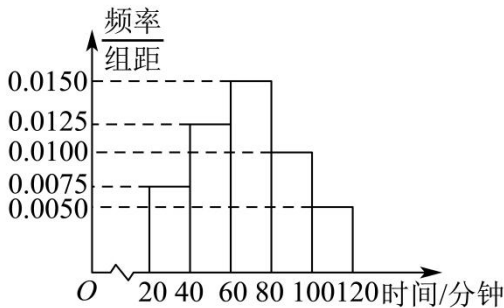
17. 某班级的所有学生中，课前是否预习本节课所学内容的人数情况如下表所示。

	男生	女生
预习了所学内容	12	17
没预习所学内容	6	5

现从该班所有学生中随机抽取一人：

- (1) 求抽到预习了所学内容的概率；
- (2) 若抽到的同学是男生，求他预习了所学内容的概率；
- (3) 试判断“抽到的同学是男生”与“抽到的同学预习了所学内容”是否相互独立，并说明理由。

18. 为促进全民阅读，建设书香校园，某校在寒假面向全体学生发出“读书好、读好书、好读书”的号召，并开展阅读活动。开学后，学校随机抽取了 100 名学生，调查这 100 名学生的假期日均阅读时间（单位：分钟），得到了如图所示的频率分布直方图。



- (1) 若该校共有 2000 名同学，试估计该校假期日均阅读时间在 $[20, 60)$ 内的人数；
- (2) 开学后，学校从日均阅读时间不低于 60 分钟的学生中，按照分层抽样的方式，抽取了 6 名学生作为代表进行国旗下演讲。若演讲安排在第二，三，四周（每周两人，不重复）进行。求第二周演讲的 2 名学生至少有一名同学的日均阅读时间处于 $[60, 80)$ 的概率；
- (3) 用频率估计概率，从该校学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中日均阅读时间不低于 60 分钟人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$ 。

19. 某农产品经销商计划分别在甲、乙两个市场销售某种农产品（两个市场的销售互不影响），为了了解该

种农产品的销售情况，现分别调查了该农产品在甲、乙两个市场过去 10 个销售周期内的销售情况，得下表：

销售量 销售周期个数 市场	3 吨	4 吨	5 吨
甲	3	4	3
乙	2	5	3

- (1) 从过去 10 个销售周期中随机抽取一个销售周期，求甲市场销售量为 4 吨的概率；
- (2) 以市场销售量的频率代替销售量的概率，设 X （单位：吨）表示下个销售周期两个市场的总销售量，求随机变量 X 概率分布列；
- (3) 在 (2) 的条件下，设该经销商计划在下个销售周期购进 n 吨该产品，在甲、乙两个市场同时销售，已知该产品每售出 1 吨获利 1000 元，未售出的产品降价处理，每吨亏损 200 元。以销售利润的期望作为决策的依据，判断 $n = 7$ 与 $n = 8$ 应选用哪一个。

20. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ 。

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率为 1，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程；

(2) 定义：若 $\forall x \in [a, b]$ ，均有 $f(x) \leq g(x)$ ，则称函数 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的控制函数。

① $\forall x \in [0, 1]$ ，试问 $g(x) = x$ 是否为函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ 的“控制函数”？并说明理由；

② $\forall x \in [0, 3]$ ，若 $g(x) = x + m$ 为函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ 的“控制函数”，求实数 m 的取值范围。

21. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} + a \ln x + \frac{a}{x}$ 。

- (1) 当 $a = e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间；
- (3) 写出 $f(x)$ 的零点个数（直接写出结果）。