北京市丰台区 2023～2024 学年度第二学期综合练习（一）

高三数学

2024.03

本试卷共 6 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-2x \leqslant 0\right\}$，$B=\left\{x \mid x-1>0\right\}$，则 $A \cup B=$（　）

A. $\left\{x \mid x \geqslant 0\right\}$　　B. $\left\{x \mid 0 \leqslant x<1\right\}$　　C. $\left\{x \mid x>1\right\}$　　D. $\left\{x \mid 1<x \leqslant 2\right\}$

2.已知公差为 d 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_5-2a_3=1$，且 $a_2=0$，则 $d=$（　）

A. -1　　B.0　　C.1　　D.2

3.已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则 $a=$（　）

A.2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

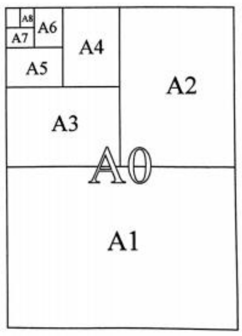
4.$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A. -80　　B. -40　　C.40　　D.80

5.已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，$\vec{b}=\lambda\vec{a}(\lambda \in \mathbf{R})$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $\lambda=$（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C.2　　D.4

6.按国际标准，复印纸幅面规格分为 A 系列和 B 系列，其中 A 系列以 A0，A1，…等来标记纸张的幅面规格，具体规格标准为：



①A0 规格纸张的幅宽和幅长的比例关系为 $1:\sqrt{2}$；

②将 Ai（$\mathrm{i}=0,1,\cdots,9$）纸张平行幅宽方向裁开成两等份，便成为 $\mathrm{A}(\mathrm{i}+1)$ 规格纸张（如图）.

某班级进行社会实践活动汇报，要用 A0 规格纸张裁剪其他规格纸张.共需 A4 规格纸张 40 张，A2 规格纸张 10 张，A1 规格纸张 5 张.为满足上述要求，至少提供 A0 规格纸张的张数为（　）

A.6　　B.7　　C.8　　D.9

7.在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: ax+by=1$ 上有且仅有一点 P，使 $|OP|=1$，则直线 l 被圆 $C: x^2+y^2=4$ 截得的弦长为（　）

A.1　　　　B.$\sqrt{3}$　　　　C.2　　　　D.$2\sqrt{3}$

8.已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则“$\alpha=\dfrac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”是“$f(x+\alpha)$ 是偶函数，且 $f(x-\alpha)$ 是奇函数”的（　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

9.正月十五元宵节，中国民间有观赏花灯的习俗.在 2024 年元宵节，小明制作了一个“半正多面体”形状的花灯（图 1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体，体现了数学的对称美.图 2 是一个棱数为 24 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 2.关于该半正多面体的四个结论：

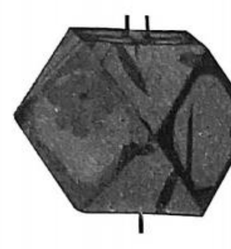


图 1

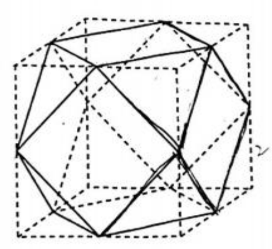


图 2

①棱长为 $\sqrt{2}$；

②两条棱所在直线异面时，这两条异面直线所成角的大小是 $60°$；

③表面积为 $S=12+4\sqrt{3}$；

④外接球的体积为 $V=4\sqrt{3}\pi$.

其中所有正确结论的序号是（　）

A.①②　　　　B.①③　　　　C.②④　　　　D.③④

10.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}\left(n=2k,k\in\mathbf{N}^*\right),\\ \dfrac{a_n+1}{2}\left(n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\right),\end{cases}$ 则（　）

A.当 $a_1<0$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立

B.当 $a_1>1$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n>M$ 恒成立

C.当 $0<a_1<1$ 时，存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$\left|a_n-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{100}$

D.当 $0<a_1<1$ 时，对于任意正整数 N_0，存在 $n>N_0$，使得 $\left|a_n-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{1000}$

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=$________.

12. 在$\triangle ABC$中，若$b=5$，$B=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，则$a=$________.

13. 已知F是抛物线$y^2=4x$的焦点，A，B是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=8$，则线段AB的中点到y轴的距离为_________.

14. 已知函数$f(x)$具有下列性质：

①当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$时，都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$；②在区间$(0,+\infty)$上，$f(x)$单调递增；③$f(x)$是偶函数.

则$f(0)=$_______；函数$f(x)$可能的一个解析式为$f(x)=$________.

15. 目前发射人造天体，多采用多级火箭作为运载工具.其做法是在前一级火箭燃料燃烧完后，连同其壳体一起抛掉，让后一级火箭开始工作，使火箭系统加速到一定的速度时将人造天体送入预定轨道.现有材料科技条件下，对于一个n级火箭，在第n级火箭的燃料耗尽时，火箭的速度可以近似表示为

$$v=3\ln\frac{10^n a_1a_2\cdots a_n}{(9+a_1)(9+a_2)\cdots(9+a_n)},$$

其中$a_i=\dfrac{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j}{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j-m_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$.

注：m_p表示人造天体质量，m_j表示第j（$j=1,2,\cdots,n$）级火箭结构和燃料的总质量.

给出下列三个结论：

①$a_1a_2\cdots a_n<1$；②当$n=1$时，$v<3\ln 10$；③当$n=2$时，若$v=12\ln 2$，则$\sqrt{a_1a_2}\geqslant 6$.

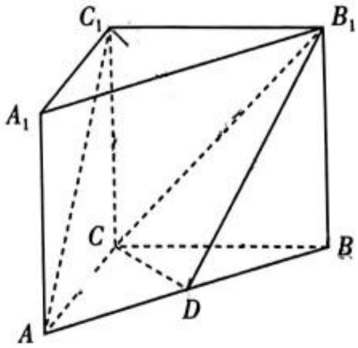
其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 14 分）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CA=CB=CC_1=2$，D为AB中点.

（Ⅰ）求证：$AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $B-B_1C-D$ 的余弦值.



条件①：$BC \perp AC_1$；

条件②：$B_1D=\sqrt{6}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 14 分）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\sin^2\omega x+\frac{1}{2}$（$\omega>0$）.

（Ⅰ）若 $\omega=2$，求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值；

（Ⅱ）若 $f\left(x\right)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=0$，求$\omega$的值.

18.（本小题 13 分）某医学小组为了比较白鼠注射 A，B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积，选 20 只健康白鼠做试验.将这 20 只白鼠随机分成两组，每组 10 只，其中第 1 组注射药物 A，第 2 组注射药物 B.试验结果如下表所示.

疱疹面积（单位：mm^2）	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$
第 1 组（只）	3	4	1	2	0
第 2 组（只）	1	3	2	3	1

（Ⅰ）现分别从第 1 组，第 2 组的白鼠中各随机选取 1 只，求被选出的 2 只白鼠皮肤疱疹面积均小于 $60mm^2$的概率；

（Ⅱ）从两组皮肤疱疹面积在$[60,80)$区间内的白鼠中随机选取 3 只抽血化验，求第 2 组中被抽中白鼠只数 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅲ）用“$\xi_k=0$”表示第k组白鼠注射药物后皮肤疱疹面积在$[30,50)$区间内，“$\xi_k=1$”表示第k组白鼠注射药物后皮肤疱疹面积在$[50,80)$区间内（$k=1,2$），写出方差$D\xi_1$，$D\xi_2$的大小关系.（结论不要求证明）

19.（本小题 14 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦距为 $4\sqrt{2}$，以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形的周长为 16.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）过点 $S(0,1)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 P，Q 两点，线段 PQ 的中点为 M .是否存在定点 D，使得 $\frac{|DM|}{|PQ|}=\frac{1}{2}$？若存在，求出 D 的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（本小题 15 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\ln(x+1)-x$，曲线 $C:y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线为 $l:y=g(x)$，记 $h(x)=f(x)-g(x)$.

（Ⅰ）当 $x_0=0$ 时，求切线 l 的方程；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，求函数 $h(x)$ 的零点并证明 $xh(x)\geqslant 0$；

（Ⅲ）当 $x_0\neq 0$ 时，直接写出函数 $h(x)$ 的零点个数.（结论不要求证明）

21.（本小题 15 分）已知集合 $M_n=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 2n\}$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 4$），若存在数阵

$T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ 满足：

① $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\cup\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}=M_n$；

② $a_k-b_k=k\,(k=1,2,\cdots,n)$.

则称集合 M_n 为“好集合”，并称数阵 T 为 M_n 的一个“好数阵”.

（Ⅰ）已知数阵 $T=\begin{bmatrix} x & y & z & 6 \\ 7 & w & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是 M_4 的一个“好数阵”，试写出 x，y，z，w 的值；

（Ⅱ）若集合 M_n 为“好集合”，证明：集合 M_n 的“好数阵”必有偶数个；

（Ⅲ）判断 $M_n\,(n=5,6)$ 是否为“好集合”.若是，求出满足条件 $n\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的所有“好数阵”；若不是，说明理由.