丰台区 2022～2023 学年度第二学期综合练习（一）

高三数学　参考答案

2023. 03

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	A	B	A	A	C	B	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．-1　　12．4　　13．$\dfrac{1}{4}$

14．0；1　　15．2；$7-3\sqrt{3}$

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

（Ⅰ）如图所示，可得 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $T=2\pi$，

又因为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，所以 $\omega=1$，

又因为 $f(x)$ 过点（$\dfrac{\pi}{4}$,0），$0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$． ....6 分

（Ⅱ）依题意 $g(x)=f(x)\sin x$

$$=2\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin x$$

$$=2(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})\sin x$$

$$=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{4})\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取最大值，最大值为 $\sqrt{2}$，

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$g(x)$ 取最小值，最小值为 0.　　............................13 分

17.（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 O 是 AC 的中点，

因为 E 是 PA 的中点，所以 $OE//PC$，

因为 $PC\subset$ 平面 PCD，$OE\not\subset$ 平面 PCD

所以$OE//$平面PCD;　　............................5分

（Ⅱ）选择条件①：

因为 $PB=PD$，O 是 BD 的中点，所以 $PO\perp BD$，

因为平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$，

平面 $PBD\cap$平面$ABCD=BD$，$PO\subset$平面PBD，

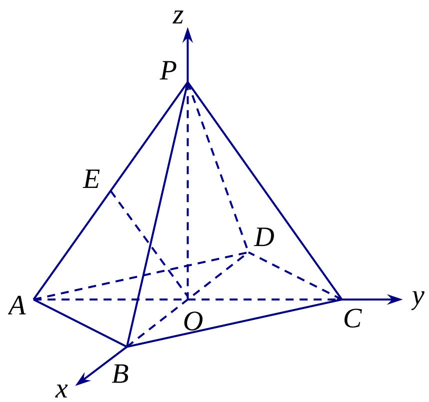
所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，因为 $AC\subset$平面$ABCD$，

所以 $PO\perp AC$，

又 $AC\perp BD$，所以 OB,OC,OP 两两垂直，

以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

因为菱形的边长为 2，$\angle BAD=60^\circ$，



所以 $BD=2, AC=2\sqrt{3}$，

所以 $C(0,\sqrt{3},0), D(-1,0,0)$，设 $P(0,0,t)(t>0)$，

所以 $\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{DP}=(1,0,t)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DP},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ x+tz=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{3}t$，则 $y=-t, z=-\sqrt{3}$

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}t,-t,-\sqrt{3})$，

因为 $BO\perp$平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$，

因为平面 PAC 与平面 PCD 的夹角的余弦值 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\frac{\sqrt{15}}{5}$

即 $\left|\frac{1\times\sqrt{3}t}{\sqrt{(\sqrt{3}t)^2+(-t)^2+(-\sqrt{3})^2}\times 1}\right|=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 $5t^2=4t^2+3$，即 $t^2=3$，因为 $t>0$，

所以 $t=\sqrt{3}$

所以线段 OP 的长为 $\sqrt{3}$.　　............................14 分

选择条件②：

因为 $PB\perp AC$. 在菱形 $ABCD$ 中， $BD\perp AC$，

因为 $BD\subset$ 平面$PBD, PB\subset$ 平面$PBD, PB\cap BD=B$，所以 $AC\perp$ 平面PBD，

因为 $PO\subset$ 平面PBD, 所以 $AC\perp PO$，因为 $PO\perp BD, AC\perp BD$

所以 OB,OC,OP 两两垂直. 以下同条件②.

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）2022 年元旦及前后共 7 天中，交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”有 2 天.

设事件 A =“从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为‘拥堵’”,

则 $P(A)=\dfrac{2}{7}$. ....3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0,1,2,

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7},\ P(X=1)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7},\ P(X=2)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7},$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. ....11 分

（Ⅲ）6. ....14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知得：$\begin{cases}b=1\\2c=2\end{cases}$，

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $a^2=2$，

所以，椭圆 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ....5 分

（Ⅱ）由已知得：直线 BC 的斜率存在，且点 B，C 在 x 轴的同侧.

设直线 BC 的方程：$y=k(x-2)$，点 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，不妨设 $x_1<x_2$.

则 $y_1y_2>0$，$x_1<t<x_2$.

由 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得：$(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$，

所以，$\Delta=8(1-2k^2)>0$，$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}$.

因为 $S_1=(t-x_1)|y_1|$，$S_2=(2-t)|y_2-y_1|$，$S_3=(x_2-t)|y_2|$

所以，$S_1\cdot S_3=(x_2-t)(t-x_1)\left|y_1y_2\right|=(x_2-t)(t-x_1)y_1y_2$

$$=(x_2-t)(t-x_1)y_1y_2$$
$$=k^2(x_2-t)(t-x_1)(x_1-2)(x_2-2)$$

$$=k^2[t(x_1+x_2)-x_1\cdot x_2-t^2]\cdot[x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4]$$

$$=k^2[\frac{8k^2t}{1+2k^2}-\frac{8k^2-2}{1+2k^2}-t^2]\cdot[\frac{8k^2-2}{1+2k^2}-\frac{16k^2}{1+2k^2}+4]$$

$$=\frac{2k^2}{(1+2k^2)^2}[-2k^2(t-2)^2-t^2+2]$$

$$\frac{1}{4}{S_2}^2=\frac{1}{4}(2-t)^2(y_2-y_1)^2=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2(x_2-x_1)^2$$
$$=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]$$
$$=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2[(\frac{8k^2}{1+2k^2})^2-\frac{32k^2-8}{1+2k^2}]$$

$$=\frac{2k^2}{(1+2k^2)^2}[-2k^2(t-2)^2+(t-2)^2]$$

要使 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列，则应由 $-t^2+2=(t-2)^2$

解得：$t=1$

所以，存在常数 t=1，使得 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列. ....15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=x+\frac{a}{e^x}, f'(x)=1-\frac{a}{e^x}=\frac{(e^x-a)}{e^x}$，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)$=0 得，$x=\ln a$，

x，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$的极小值为 $f(\ln a)=\ln a+1$. ....6 分

（Ⅱ）（i）$f(x)$有两个零点的必要条件是 $\ln a+1<0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$；

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(0)=a>0$，$f(-1)=-1+\frac{a}{e^{-1}}<0$，$\ln a<-1$，

所以 $f(x)$在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，

又因为 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，（或 $f(-\frac{1}{a})=-\frac{1}{a}+\frac{a}{e^{-\frac{1}{a}}}>0$）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上有且仅有一个零点，

所以 $f(x)$ 有两个零点时，a 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$.

（ii） $f(x_1)=f(x_2)=0$，不妨设 $x_1<x_2$，可知 $x_1<\ln a<-1<x_2$，

即 $x_1+\dfrac{a}{\mathrm{e}^{x_1}}=x_2+\dfrac{a}{\mathrm{e}^{x_2}}=0$，所以 $a=-x_1\mathrm{e}^{x_1}=-x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

$x_1+x_2>2\ln a$ 等价于 $x_1>2\ln a-x_2$，

因为 $2\ln a-x_2<\ln a$，

所以 $x_1>2\ln a-x_2$ 等价于 $f(x_1)<f(2\ln a-x_2)$，即 $2\ln a-x_2+\dfrac{a}{e^{2\ln a-x_2}}>0$，

令 $g(x_2)=2\ln a-x_2+\dfrac{a}{\mathrm{e}^{2\ln a-x_2}}(x_2>-1)$，因为 $a=-x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

所以 $g(x_2)=2\ln(-x_2)+x_2-\dfrac{1}{x_2}$，

$g'(x_2)=\dfrac{2}{x_2}+1+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_2^2+2x_2+1}{x_2^2}>0$，

所以 $g(x_2)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x_2)>g(-1)=0$，

所以 $x_1+x_2>2\ln a$. ....15 分

21.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）集合 A_1 是集合 S_4 的“期待子集”，集合 A_2 不是集合 S_4 的“期待子集”. ....3 分

（Ⅱ）先证明必要性：

当集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”时，由题意，存在互不相同的 $a,b,c\in S_n$，

使 $a+b,b+c,c+a\in A$，

不妨设 $a<b<c$，令 $x=a+b,y=c+a,z=b+c$，

则 $x<y<z$，即条件 P 中的①成立；

又 $x+y-z=(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a>0$，

所以 $x+y>z$，即条件 P 中的②成立；

因为 $x+y+z=(a+b)+(c+a)+(b+c)=2(a+b+c)$，

所以 $x+y+z$ 是偶数，即条件 P 中的③成立.

所以集合 A 满足条件 P.

再证明充分性：

当集合 A 满足条件 P 时，有 $\exists x,y,z\in A$，

满足 ①$x<y<z$,②$x+y>z$,③$x+y+z$ 为偶数，

记 $a=\frac{x+y+z}{2}-z, b=\frac{x+y+z}{2}-y, c=\frac{x+y+z}{2}-x$，

由③得：$a,b,c\in Z$，由①得：$a<b<c<z$，由②得：$a=\frac{x+y-z}{2}>0$，

所以 $a,b,c\in S_n$，

因为 $a+b=x, a+c=y, b+c=z$，所以 $a+b, b+c, c+a$ 均属于 A，

即集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”. ....8 分

（Ⅲ）m 的最小值为 $n+2$．理由如下：

一方面，当 $3\le m\le n$ 时，对于集合 $M=\{a_i|a_i=2i-1, i=1,2,3,\cdots,m\}$，其中任意三个元素之和均为奇数，由（II）知，$M$ 不是 S_n 的“期待子集”;

当 $m=n+1$ 时，对于集合 $M=\{a_i|a_i=2i-1, i=1,2,3,\cdots,n\}\cup\{2\}$.从中任取三个不同元素，若不含有 2，则不满足条件 P 中的③；若三个元素中含有 2，则另两数必都是奇数，因为任意两个奇数之差都不小于 2，故不满足条件 P 中的②，所以 M 不是 S_n 的“期待子集”；所以 $m\ge n+2$.

另一方面，我们用数学归纳法证明集合 S_n 的任意含有 $n+2$ 个元素的子集，都是 S_n 的“期待子集”：

（1）当 $n=4$ 时，对于集合 S_4 的任意含有 6 个元素的子集，记为 B，

当 4,6,8 三个数中恰有 1 个属于 B 时，则 $\{1,2,3,5,7\}\subseteq B$，因为数组 $3,4,5$、$3,5,6$、$5,7,8$ 都满足条件 P，所以此时集合 B 是集合 S_4 的“期待子集”;

当 4,6,8 三个数恰有两个属于集合 B，则 3,5,7 中至少有两个属于集合 B，
因为数组 $3,4,5$、$3,5,6$、$3,6,7$、$3,7,8$、$5,6,7$、$5,7,8$ 都满足条件 P，
当 4,6,8 三个数都属于集合 B，因为数组 $4,6,8$ 满足条件 P，

所以此时集合 B 集合 S_4 的“期待子集”;

所以集合 B 必是集合 S_4 的“期待子集”;

所以当 $n=4$ 时，S_4 的任意含有 6 个元素的子集都是集合 S_4 的“期待子集”.

（2）假设当 $n=k(k\ge 4)$ 时，结论成立，即集合 S_k 的任意含有 $k+2$ 个元素的子集都是 S_k 的“期待子集”，那么 $n=k+1$ 时，对于集合 S_{k+1} 的任意含有 $k+3$ 个元素

的子集 C，分成两类：

①若 $2k+1, 2k+2$，至多有 1 个属于 C，则 C 中至少有 $k+2$ 个元素都在集合 S_k，由归纳假设知，结论成立；

②若 $2k-1\in C, 2k\in C$，则集合 C 中恰含 S_k 的 $k+1$ 个元素，此时，当 C 中只有一个奇数时，则集合 C 中包含 S_k 中的所有偶数，此时数组 $2k-4, 2k-2, 2k$ 符合条件 P，结论成立；当集合 C 中至少有两个奇数时，则必有一个奇数 c 不小于 3，此时数组 $c, 2k-1, 2k$ 符合条件 P，结论成立；

所以 $n=k+1$ 时，结论成立

根据（1）（2）知，集合 S_n 的任意含有 $n+2$ 个元素的子集，都是 S_n 的“期待子集”，所以 m 的最小值为 $n+2$.　　..........................14 分