西 城 区 高 三 统 一 测 试 试 卷

数 学

2023.3

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1） 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$， $B=\{x\mid x^2-3x<0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1\}$　　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{1,2,3\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2） 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

（A） $y=-|x|$　　（B） $y=x^2-2x$

（C） $y=\sin x$　　（D） $y=x-\dfrac{1}{x}$

（3） 设 $a=\lg 2$， $b=\cos 2$， $c=2^{0.2}$， 则

（A） $b<c<a$　　（B） $c<b<a$

（C） $b<a<c$　　（D） $a<b<c$

（4） 在 $(x-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中， x 的系数为

（A） 40　　（B） 10

（C） -40　　（D） -10

（5） 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点， $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$， 则

（A） $\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　（B） $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

（C） $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　（D） $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

（6） 函数 $f(x)=\sin 2x\cdot\tan x$ 是

（A）奇函数，且最小值为 0　　（B）奇函数，且最大值为 2

（C）偶函数，且最小值为 0　　（D）偶函数，且最大值为 2

（7） 已知双曲线 C 的中心在原点，以坐标轴为对称轴．则“C 的离心率为 2”是“C 的一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8） 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v $(\mathrm{km/s})$ 和燃料的质量 M (kg) 以及火箭（除燃料外）的质量 N (kg) 间的关系为 $v=2\ln(1+\dfrac{M}{N})$．若火箭的最大速度为 $12\ \mathrm{km/s}$，则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是

（参考数据：$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）

（A） 200　　（B） 400

（C） 600　　（D） 800

（9） 设 $c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-c, & x\geqslant 0,\\ 2^x-2c, & x<0.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 恰有一个零点，则 c 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$\{0\}\cup[1,+\infty)$

（C）$(0,\dfrac{1}{2})$　　（D）$\{0\}\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$

（10） n 名学生参加某次测试，测试由 m 道题组成．若一道题至少有 $\dfrac{2}{3}n$ 名学生未解出来，则称此题为难题；若一名学生至少解出了 $\dfrac{2}{3}m$ 道题，则该生本次测试成绩合格．如果这次测试至少有 $\dfrac{2}{3}n$ 名学生成绩合格，且测试中至少有 $\dfrac{2}{3}m$ 道题为难题，那么 mn 的最小值为

（A） 6　　（B） 9

（C） 18　　（D） 27

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）若复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$____.

（12）已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的顶点为 O，且过点 A,B．若 $\triangle OAB$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形，则 $p=$____.

（13）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=1-2n$．记数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_4=$____；S_n 的最小值为____.

（14）设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(2\cos\beta,2\sin\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$．当 $\alpha=\pi,\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|AB|=$____；当 $|AB|=\sqrt{3}$ 时，$\alpha-\beta$ 的一个取值为____.

（15）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上．

给出下列四个结论：

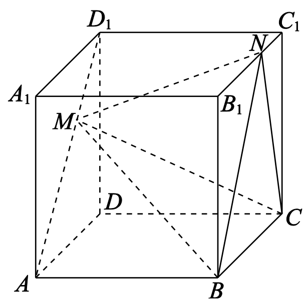
① MN 的最小值为 2；

② 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\dfrac{4}{3}$；

③ 有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直；

④ 存在点 M，N，使 $\triangle MBN$ 为等边三角形．

其中所有正确结论的序号是____.



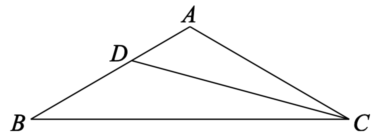
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，$AC=\sqrt{2}$，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$CD=\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 $\angle ADC$ 的值；

（Ⅱ）求 $\triangle BCD$ 的面积.



（17）（本小题 13 分）

根据《国家学生体质健康标准》，高三男生和女生立定跳远单项等级如下（单位：cm）：

立定跳远单项等级	高三男生	高三女生
优秀	260 及以上	194 及以上
良好	245～259	180～193
及格	205～244	150～179
不及格	204 及以下	149 及以下

从某校高三男生和女生中各随机抽取12 名同学，将其立定跳远测试成绩整理如下（精确到1cm）：

男生：　180　205　213　220　235　245　250　258　261　270　275　280

女生：　148　160　162　169　172　184　195　196　196　197　208　220

假设用频率估计概率，且每个同学的测试成绩相互独立.

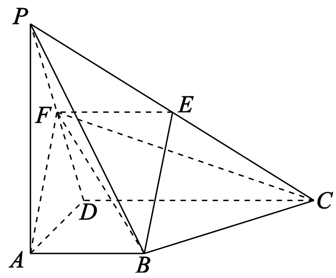
（Ⅰ）分别估计该校高三男生和女生立定跳远单项的优秀率；

（Ⅱ）从该校全体高三男生中随机抽取2 人，全体高三女生中随机抽取1 人，设 X 为这3 人中立定跳远单项等级为优秀的人数，估计 X 的数学期望 EX；

（Ⅲ）从该校全体高三女生中随机抽取3 人，设“这3 人的立定跳远单项既有优秀，又有其它等级”为事件 A，“这3 人的立定跳远单项至多有1 个是优秀”为事件 B. 判断 A 与 B 是否相互独立.（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=1$，$PA=AD=CD=2$．E 为棱 PC 上一点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，完成下列两个问题：



（Ⅰ）求证：F 为 PD 的中点；

（Ⅱ）求二面角 $B-FC-P$ 的余弦值.

条件①：$BE//AF$；

条件②：$BE\perp PC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，证明：$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（Ⅲ）判断 $3f(\frac{1}{3})$ 与 $4f(\frac{1}{4})$ 的大小关系，并加以证明.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:x^2+2y^2=2$，点 A,B 在椭圆 C 上，且 $OA\perp OB$（O 为原点）. 设 AB 的中点为 M，射线 OM 交椭圆 C 于点 N.

（Ⅰ）当直线 AB 与 x 轴垂直时，求直线 AB 的方程；

（Ⅱ）求 $\frac{|ON|}{|OM|}$ 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 $n \geqslant 2$，设集合 $M=\{\alpha \mid \alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n), t_k\in\{0,1\}, k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 M 中的任意元素 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 $\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

设 $A\subseteq M$，且集合 $A=\{\alpha_i \mid \alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}), i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素 α_i,α_j，若 $\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases} p, & i=j, \\ 1, & i\neq j, \end{cases}$ 则称 A 具有性质 $T(n,p)$.

（Ⅰ）判断集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$？说明理由；

（Ⅱ）判断是否存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A，并加以证明；

（Ⅲ）若集合 A 具有性质 $T(n,p)$，证明：$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$.