西 城 区 高 三 统 一 测 试 试 卷

数学答案及评分参考

2023.3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）D　　（3）C　　（4）A　　（5）A

（6）C　　（7）D　　（8）B　　（9）D　　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\sqrt{2}$　　（12）1

（13）-1　　-2　　（14）$\sqrt{5}$　　$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

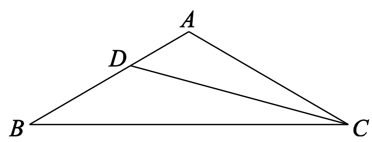
（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle A}$． ………2 分

所以 $\sin\angle ADC=\frac{AC\cdot\sin\angle A}{CD}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$． ………4 分

因为 $0<\angle ADC<\frac{\pi}{3}$， ………5 分

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{4}$． ………6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\angle ACD=\angle BCD=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$． ………7 分

由题设，$\angle B=\angle ACB=\frac{\pi}{6}$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形． ………8 分

所以 $BC=2\times AC\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}$． ………10 分

所以 $\triangle BCD$ 的面积为

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$． ………13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）样本中立定跳远单项等级获得优秀的男生人数为 4，获得优秀的女生人数为 6，

所以估计该校高三男生立定跳远单项的优秀率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$； ………2 分

估计高三女生立定跳远单项的优秀率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. ………4 分

（Ⅱ）由题设，X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)$ 估计为 $(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$； ………5 分

$P(X=1)$ 估计为 $\mathrm{C}_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$； ………6 分

$P(X=2)$ 估计为 $\mathrm{C}_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$； ………7 分

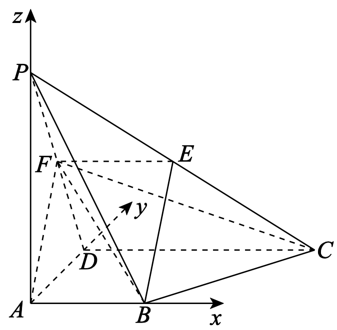
$P(X=3)$ 估计为 $(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$. ………8 分

估计 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{1}{18}=\frac{7}{6}$. ………10 分

（Ⅲ）A 与 B 相互独立. ………13 分

（18）（共 14 分）

解：选条件①：$BE/\!/AF$.



（Ⅰ）因为 $AB/\!/CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB/\!/$ 平面 PCD. ………1 分

因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，

所以 $AB/\!/EF$. ………2 分

又 $BE/\!/AF$，　所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形.

所以 $AB/\!/EF$ 且 $AB=EF$. ………3 分

因为 $AB/\!/CD$ 且 $AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $EF/\!/CD$ 且 $EF=\frac{1}{2}CD$.

所以 EF 为 $\triangle PCD$ 的中位线. ………5 分

所以 F 为 PD 的中点. ………6 分

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$.

又 $AB\perp AD$，所以 AB, AD, AP 两两相互垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ………7 分

则 $A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(2,2,0)$， $P(0,0,2)$， $D(0,2,0)$， $F(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$， $\overrightarrow{BF}=(-1,1,1)$， $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+2y=0,\\ -x+y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=2$， $z=3$． 于是 $\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$. ………9 分

因为 $AB\perp$ 平面 PAD，且 $AB/\!/CD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD .

所以 $AF\perp CD$.

又 $PA=AD$，且 F 为 PD 的中点，所以 $AF\perp PD$.

所以 $AF\perp$ 平面 PCD，所以 $\overrightarrow{AF}$ 是平面 PCD 的一个法向量. ………11 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AF}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………13 分

由题设，二面角 $B-FC-P$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $B-FC-P$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………14 分

选条件②： $BE\perp PC$.

（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中， $PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{5}$. ………1 分

在直角梯形 $ABCD$ 中，

由 $AB=1$， $AD=CD=2$，可求得 $BC=\sqrt{5}$，所以 $PB=BC$. ………2 分

因为 $BE\perp PC$，所以 E 为 PC 的中点. ………3 分

因为 $AB/\!/CD$， $AB\not\subset$ 平面 PCD， 所以 $AB/\!/$ 平面 PCD .

因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，所以 $AB/\!/EF$. ………5 分

所以 $CD/\!/EF$.

所以 F 为 PD 的中点. ………6 分

（Ⅱ）以下同条件①.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x+\sin x$. ………1 分

所以 $f(0)=0$， $f'(0)=1$. ………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ………4 分

（Ⅱ）由题设， $g(x)=x(e^x+\sin x)-(e^x-\cos x)$

$=(x-1)e^x+x\sin x+\cos x$.

所以 $g'(x)=x(e^x+\cos x)$. ………6 分

当 $x>0$ 时，因为 $e^x+\cos x>e^0+\cos x=1+\cos x\geqslant 0$，

所以 $g'(x)>0$. ………8 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………9 分

（Ⅲ）$3f(\frac{1}{3})>4f(\frac{1}{4})$. ………10 分

证明如下：

设 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},x\in(0,+\infty)$. ………11 分

则 $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$. ………12 分

由（Ⅱ）知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$. ………13 分

所以 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………14 分

所以 $h(\frac{1}{3})>h(\frac{1}{4})$，即 $3f(\frac{1}{3})>4f(\frac{1}{4})$. ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当直线 AB 与 x 轴垂直时，设其方程为 $x=t\ (-\sqrt{2}<t<\sqrt{2})$. ·········1 分

由点 A, B 关于 x 轴对称，且 $OA\perp OB$，不妨设 $A(t,t)$. ·········2 分

将点 A 的坐标代入椭圆 C 的方程，得 $t^2+2t^2=2$，解得 $t=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ·········3 分

所以直线 AB 的方程为 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ·········4 分

（Ⅱ）当直线 AB 的斜率不存在时，由（Ⅰ）知 $\dfrac{|ON|}{|OM|}=\sqrt{3}$. ·········5 分

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=2, \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$. ·········6 分

由 $\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$，得 $m^2<1+2k^2$.

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}$. ·········8 分

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

所以 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$.

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$. ·········10 分

所以 $(k^2+1)(2m^2-2)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)=0$.

解得 $3m^2=2k^2+2$，从而 $m^2\geqslant\dfrac{2}{3}$. ·········11 分

设 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OM}$，其中 $\lambda>0$.

则 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{\lambda}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\dfrac{-2km\lambda}{2k^2+1},\dfrac{m\lambda}{2k^2+1})$. ·········12 分

将 $N(\dfrac{-2km\lambda}{2k^2+1},\dfrac{m\lambda}{2k^2+1})$ 代入椭圆 C 的方程，得 $m^2\lambda^2=2k^2+1$.

所以 $m^2\lambda^2=3m^2-1$，即 $\lambda^2=3-\dfrac{1}{m^2}$. ·········13 分

因为 $m^2\geqslant\dfrac{2}{3}$，所以 $\dfrac{3}{2}\leqslant\lambda^2<3$，即 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqslant\lambda<\sqrt{3}$. ·········14 分

综上，$\dfrac{|ON|}{|OM|}$的取值范围是$[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}]$. ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为$(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1\times1+1\times1+0\times0=2$，同理$(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$.

又$(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$，同理$(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$.

所以集合$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$具有性质$T(3,2)$. ………4 分

（Ⅱ）当$n=4$时，集合A中的元素个数为4．由题设$p\in\{0,1,2,3,4\}$. ………5 分

假设集合A具有性质$T(4,p)$，则

①当$p=0$时，$A=\{(0,0,0,0)\}$，矛盾.

②当$p=1$时，$A=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，不具有性质$T(4,1)$，矛盾.

③当$p=2$时，$A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

因为$(1,1,0,0)$和$(0,0,1,1)$至多一个在A中；$(1,0,1,0)$和$(0,1,0,1)$至多一个在A中；$(1,0,0,1)$和$(0,1,1,0)$至多一个在A中，故集合A中的元素个数小于4，矛盾.

④当$p=3$时，$A=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$，不具有性质$T(4,3)$，矛盾.

⑤当$p=4$时，$A=\{(1,1,1,1)\}$，矛盾.

综上，不存在具有性质$T(4,p)$的集合A. ………9 分

（Ⅲ）记$c_j=t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则$c_1+c_2+\cdots+c_n=np$.

若$p=0$，则$A=\{(0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．若$p=1$，则$A=\{(1,0,\cdots,0)\}$，矛盾．故$p\geqslant2$.

假设存在j使得$c_j\geqslant p+1$，不妨设$j=1$，即$c_1\geqslant p+1$.

当$c_1=n$时，有$c_j=0$或$c_j=1$ $(j=2,3,\cdots,n)$成立.

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中分量为$1$的个数至多有$n+(n-1)=2n-1<2n\leqslant np$．…11 分

当$p+1\leqslant c_1<n$时，不妨设$t_{11}=t_{21}=\cdots=t_{p+1,1}=1,t_{n1}=0$.

因为$\alpha_n\cdot\alpha_n=p$，所以α_n的各分量有p个1，不妨设$t_{n2}=t_{n3}=\cdots=t_{n,p+1}=1$.

由$i\neq j$时，$\alpha_i\cdot\alpha_j=1$可知，$\forall q\in\{2,3,\cdots,p+1\}$，$t_{1q},t_{2q},\cdots,t_{p+1,q}$中至多有$1$个$1$，

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$的前$p+1$个分量中，至多含有$p+1+p=2p+1$个$1$.

又$\alpha_i\cdot\alpha_n=1$ $(i=1,2,\cdots,p+1)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$的前$p+1$个分量中，含有

$(p+1)+(p+1)=2p+2$个1，矛盾.

所以$c_j\leqslant p$ $(j=1,2,\cdots,n)$. ………14 分

因为$c_1+c_2+\cdots+c_n=np$，

所以$c_j=p$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

所以 $t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$.　　　　　　　　　　………15 分