北京市西城区2023—2024学年度第一学期期末试卷

高三数学

2024.1

本试卷共6页， 150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1） 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$， $B=\{x\mid x^2\geqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

（A） $(-1,+\infty)$　　（B） $(-1,2]$

（C） $(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$　　（D） $(-\infty,-2]\cup(-1,3)$

（2） 在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}-2}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3） 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则

（A） $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（B） $\tan a>\tan b$

（C） $3-a<2-b$　　（D） $a|a|>b|b|$

（4） 已知双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(0,2)$，渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 C 的方程是

（A） $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B） $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

（C） $y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$　　（D） $\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$

（5） 已知点 $O(0,0)$，点 P 满足 $|PO|=1$．若点 $A(t,4)$，其中 $t\in\mathbf{R}$，则 $|PA|$ 的最小值为

（A） 5　　（B） 4

（C） 3　　（D） 2

（6）在$\triangle ABC$中，$\angle B=60^{\circ}, b=\sqrt{7}, a-c=2$，则$\triangle ABC$的面积为

（A）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（7）已知函数$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，则

（A）$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数，且曲线$y=f(x)$存在对称轴

（B）$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数，且曲线$y=f(x)$存在对称中心

（C）$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数，且曲线$y=f(x)$存在对称轴

（D）$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数，且曲线$y=f(x)$存在对称中心

（8）设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是非零向量，则“$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{b}|^2$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

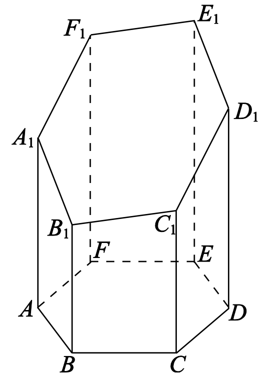
（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）设$\{a_n\}$是首项为正数，公比为q的无穷等比数列，其前n项和为S_n．若存在无穷多个正整数k，使$S_k\leqslant 0$，则q的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(-\infty,-1]$

（C）$[-1,0)$　　（D）$(0,1)$

（10）如图，水平地面上有一正六边形地块$ABCDEF$，设计师规划在正六边形的顶点处矗立六根与地面垂直的柱子，用以固定一块平板式太阳能电池板$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$．若其中三根柱子AA_1, BB_1, CC_1的高度依次为$12\text{m}, 9\text{m}, 10\text{m}$，则另外三根柱子的高度之和为



（A）47m　　（B）48m

（C）49m　　（D）50m

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）在 $(x-\sqrt{2})^4$ 的展开式中，x^2 的系数为_______．（用数字作答）

（12）设 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\omega x$．若曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，则 ω 的一个取值为_______.

（13）已知函数 $f(x)=2\log_2 x-\log_2(x-4)$，则 $f(x)$ 的定义域是_______；$f(x)$ 的最小值是_______.

（14）已知抛物线 $C:y^2=8x$．

① 则 C 的准线方程为_______；

② 设 C 的顶点为 O，焦点为 F．点 P 在 C 上，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称．若 QF 平分 $\angle PFO$，则点 P 的横坐标为_______.

（15）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x>a,\\ -x^2+a^2, & x\leqslant a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③ 当 $a<0$ 时，直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有 3 个交点；

④ 存在正数 a 及点 $M(x_1,f(x_1))$ $(x_1>a)$ 和 $N(x_2,f(x_2))$ $(x_2\leqslant a)$，使 $|MN|\leqslant\dfrac{1}{100}$．

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2a\sin x\cos x-2\cos^2 x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅰ）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 对 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 恒成立，求 m 的最大值和 M 的最小值.

（17）（本小题 13 分）

生活中人们喜爱用跑步软件记录分享自己的运动轨迹．为了解某地中学生和大学生对跑步软件的使用情况，从该地随机抽取了 200 名中学生和 80 名大学生，统计他们最喜爱使用的一款跑步软件，结果如下：

	跑步软件一	跑步软件二	跑步软件三	跑步软件四
中学生	80	60	40	20
大学生	30	20	20	10

假设大学生和中学生对跑步软件的喜爱互不影响.

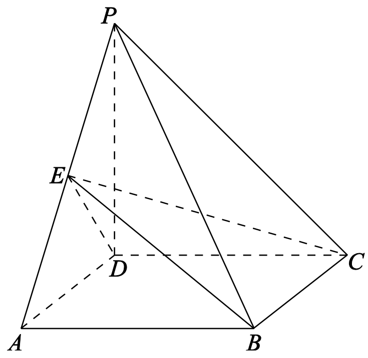
（Ⅰ）从该地区的中学生和大学生中各随机抽取1人，用频率估计概率，试估计这 2 人都最喜爱使用跑步软件一的概率；

（Ⅱ）采用分层抽样的方式先从样本中的大学生中随机抽取8人，再从这8人中随机抽取3人．记 X 为这3人中最喜爱使用跑步软件二的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记样本中的中学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 x_1,x_2,x_3,x_4 ，其方差为 s_1^2 ；样本中的大学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 y_1,y_2,y_3,y_4 ，其方差为 s_2^2 ；$x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4$ 的方差为 s_3^2 . 写出 $s_1^2,\ s_2^2,\ s_3^2$ 的大小关系.（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，E 为 PA 中点，$PD=AD=2$.



（Ⅰ）求证：$AB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求直线 DE 与平面 PBC 所成角的大小；

（Ⅲ）求四面体 $PEBC$ 的体积.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $C(2,1)$.

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $N(0,1)$ 的直线交 E 于点 A,B（点 A,B 与点 C 不重合）. 设 AB 的中点为 M，连接 CM 并延长交 E 于点 D. 若 M 恰为 CD 的中点，求直线 AB 的方程.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{x}$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $x_1<x_2$ 且 $x_1\cdot x_2>0$ 时，判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 $\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}$ 的大小，并说明理由.

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 $N \geqslant 3$，已知项数为 m 且无重复项的数对序列 $A:(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$ 满足如下三个性质：

① $x_i,y_i \in \{1,2,\cdots,N\}$，且 $x_i \neq y_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$；

② $x_{i+1}=y_i$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$；

③ (p,q) 与 (q,p) 不同时在数对序列 A 中.

（Ⅰ）当 $N=3$，$m=3$ 时，写出所有满足 $x_1=1$ 的数对序列 A；

（Ⅱ）当 $N=6$ 时，证明：$m \leqslant 13$；

（Ⅲ）当 N 为奇数时，记 m 的最大值为 $T(N)$，求 $T(N)$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）