2023~2024 学年第二学期期末检测试题参考答案

高二数学

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	B	A	C	A	A	D	D	C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\frac{2}{3}$　（12）1　（13）$\frac{2}{3}$；$\frac{7}{15}$　（14）$\frac{2}{3}$；$\frac{5}{9}$　（15）6；4.7

注：13、14、15 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）选①，由只有第 4 项的二项式系数最大，可知，展开式共有 7 项，

所以 $n=6$，

选②，由第 2 项与第 6 项的二项式系数相等，可知，$C_n^1=C_n^5$，

所以 $n=6$，

选③，由所有二项式系数的和为 64，可知 $2^n=64$，可得 $n=6$，……7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得二项式可化为$(1-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$.

令$x=1$，则$(1-2\times1)^6=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1$，

令 $x=-1$，则$[1-2\times(-1)]^6=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=3^6$，

所以展开式中奇数项的系数和为$a_0+a_2+a_4+a_6=\frac{1+3^6}{2}=365$.……7 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设“有放回地随机抽取 4 个，恰好抽到 2 个礼品果”的事件为A，

因为从 100 个水果中随机抽取一个，抽到礼品果的概率为$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，

所以，恰好抽到 2 个礼品果的概率为：

$P(A)=C_4^2(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^2=\frac{96}{625}$.　…………6 分

（Ⅱ）用分层抽样的方法从 100 个水果中抽取 10 个，则其中精品果 4 个，非精品果 6 个，现从中抽取 3 个，则精品果的数量X服从超几何分布，

X所有可能的取值为0，1，2，3，

则$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$；$P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$；$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

所以X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$．…………8 分

(18)（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为$f(x)=x^2-3x+2+\ln x$，$f(1)=0$，

所以 $f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x}$，

所以$f'(1)=0$，

所以所求切线方程为$y-0=0(x-1)$，即 $y=0$．…………6 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$，

令 $f'(x)>0$，解得$0<x<\dfrac{1}{2}$或$x>1$，

令 $f'(x)<0$，解得$\dfrac{1}{2}<x<1$，

所以$f(x)$ 的单调递增区间为$(0，\dfrac{1}{2})$和$(1，+\infty)$，单调递减区间为$(\dfrac{1}{2}，1)$．

因为$f(1)=0$，所以1 为$f(x)$ 的零点，$f(x)$ 在区间$(\dfrac{1}{2}，1)$和$(1，+\infty)$无零点.

又 $f(\dfrac{1}{2})>f(1)=0$，$f(\dfrac{1}{e^2})=\dfrac{1}{e^4}-3\dfrac{1}{e^2}+2-2=\dfrac{1-3e^2}{e^4}<0$，$f(x)$ 在区间

$(0，\dfrac{1}{2})$ 单调递增，

所以$f(x)$ 在区间$(0，\frac{1}{2})$ 有且只有一个零点.

所以$f(x)$ 在$(0，+\infty)$ 共有 2 个零点. …………8 分

（19）(共 14 分）

解：（Ⅰ）依题意，设事件A表示“至少回答正确一个问题”，则事件A 的对立事件$\overline{A}$表示“ 三个问题全部回答错误”，

则$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})=\frac{17}{18}$.

所以，至少回答正确一个问题的概率为$\frac{17}{18}$． …………5 分

（Ⅱ）回答这三个问题的总得分X所有可能的取值为-10，0，10，20，30，40，

$P(X=-10)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$， $P(X=0)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，

$P(X=10)=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$， $P(X=20)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$，

$P(X=30)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$， $P(X=40)=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$.

所以X的分布列为：

X	-10	0	10	20	30	40
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

…………9 分

(20)（共 14 分）

解：（Ⅰ） 由题意得：$f'(x)=\frac{1}{x}-a$ ，因为$x=3$是$f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(3)=\frac{1}{3}-a=0$ ，解得：$a=\frac{1}{3}$，

经检验 $a=\frac{1}{3}$符合题意. …………4 分

（Ⅱ） 由题意得：$f(x)$ 定义域为$(0,+\infty)$， $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$，

①当$a\leq0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以$f(x)$ 的单调递增区间为$(0，+\infty)$，无单调递减区间；

②当$a>0$ 时，令$f'(x)=0$ ，解得： $x=\frac{1}{a}$，

当$x\in(0,\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)>0$；当$x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$；

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,\dfrac{1}{a})$；单调递减区间为$(\dfrac{1}{a},+\infty)$；

综上：当$a\leq 0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0，+\infty)$，无单调递减区间；

当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,\dfrac{1}{a})$，单调递减区间为$(\dfrac{1}{a},+\infty)$．

…………5 分

（III）$f(x)\leqslant g(x)$．

当$a=1$，令$F(x)=g(x)-f(x)=xe^x-\ln x-x-1\left(x>0\right)$，

则$F'(x)=xe^x+e^x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+1}{x}(xe^x-1)$，

令$h(x)=xe^x-1(x>0)$，则$h'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以函数$h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

又$h(0)<0$，$h(1)>0$，所以$h(x)$存在唯一零点$c\in(0，1)$，使得$h(c)=0$，

所以当$x\in(0，c)$时，$h(x)<0$；当$x\in(c，+\infty)$时，$h(x)>0$；

所以当$x\in(0，c)$时，$F'(x)<0$；当$x\in(c，+\infty)$时，$F'(x)>0$；

所以函数$F(x)$在$(0，c)$上单调递减，在$(c，+\infty)$上单调递增，

所以$F(x)\geqslant F(c)=ce^c-\ln c-c-1$，

又$h(c)=ce^c-1=0$，即$ce^c=1$，

所以$\ln ce^c=\ln 1=0$，即$\ln c+\ln e^c=\ln c+c=0$，

所以$F(c)=0$．

所以$F(x)\geqslant F(c)=0$，

所以$f(x)\leqslant g(x)$在$(0，+\infty)$上恒成立．　………5 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为$a_2=a_5=2$，所以$a_3=a_6$，所以$a_4=a_7=3$，

所以$a_5=a_8=2$，$a_6=21-a_7-a_8=16$，

所以$a_3=16$．　　…………4 分

（Ⅱ）设无穷数列$\{b_n\}$的公差为 d，无穷数列$\{c_n\}$的公比为 q，则 $q>0$，

$b_5-b_1=4d=80$，

所以$d=20$，$b_n=20n-19$，

$\frac{c_5}{c_1}=q^4=\frac{1}{81}$，所以$q=\frac{1}{3}$，$c_n=(\frac{1}{3})^{n-5}$

所以$a_n=b_n+c_n=20n-19+(\frac{1}{3})^{n-5}$.

因为$a_1=a_5=82$，而$a_2=21+27=48$，$a_6=101+\frac{1}{3}=\frac{304}{3}$，

因为$a_1=a_5$，但是 $a_2\neq a_6$，

所以$\{a_n\}$不具有性质P. …………5 分

（III）充分性：若$\{b_n\}$是常数列，

设$b_n=C$，则 $a_{n+1}=C+\sin a_n$，

若存在p，q 使得 $a_p=a_q$，则 $a_{p+1}=C+\sin a_p=C+\sin a_q=a_{q+1}$，

故$\{a_n\}$具有性质P

必要性：若对于任意a_1，$\{a_n\}$具有性质P，

则$a_2=b_1+\sin a_1$，

设函数$f(x)=x-b_1$，$g(x)=\sin x$，

由$f(x)$，$g(x)$图象可得，对于任意的b_1，二者图象至少有一个交点，

所以一定能找到一个 a_1，使得 $a_1-b_1=\sin a_1$，

所以$a_2=b_1+\sin a_1=a_1$，所以$a_n=a_{n+1}$，

故$b_{n+1}=a_{n+2}-\sin a_{n+1}=a_{n+1}-\sin a_n=b_n$，

所以$\{b_n\}$是常数列.

所以“对任意a_1，$\{a_n\}$都具有性质 P”的充分必要条件为“$\{b_n\}$是常数列”. …………6 分