# 房山区 2023 年高三第一次模拟考试

# 数　学

## 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[0,1)$　　（B）$[0,1]$

（C）$(-1,3]$　　（D）$(-1,3)$

（2）在 $(x-\dfrac{2}{x})^4$ 的展开式中，$x^2$ 的系数是

（A）$-8$　　（B）$8$

（C）$-4$　　（D）$4$

（3）已知数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 满足 $a_n+a_1=a_{n+1}$，且 $a_1=1$，则 $a_5$ 等于

（A）2　　（B）3

（C）4　　（D）5

（4）“$0<x<\dfrac{\pi}{4}$”是“$\tan x<1$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F$，抛物线 $C$ 上一点 $P$ 到点 $F$ 的距离为 $3$，则点 $P$ 到原点的距离为

（A）2　　（B）3

（C）$2\sqrt{2}$　　（D）$2\sqrt{3}$

（6）已知直线 $y+1=m(x-2)$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 相交于 $M$，$N$ 两点，则 $|MN|$ 的最小值为

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$2\sqrt{5}$

（C）4　　（D）6

（7）已知函数 $f(x)$ 同时满足以下两个条件：

①对任意实数 $x$，都有 $f(x)+f(-x)=0$；

②对任意实数 $x_1$，$x_2$，当 $x_1+x_2$ ? $0$ 时，都有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}<0$.

则函数 $f(x)$ 的解析式可能为

（A） $f(x)=2x$　　　　　　（B） $f(x)=-2x$

（C） $f(x)=2^x$　　　　　　（D） $f(x)=-2^x$

（8）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC=\sqrt{2}$．$P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为

（A）16　　　　（B）10

（C）8　　　　（D）4

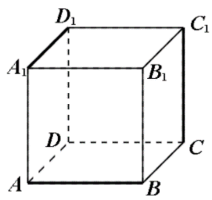
（9）血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数．人体的血氧饱和度正常范围是 95%□ 100%，当血氧饱和度低于 90%时，需要吸氧治疗．在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型：$S(t)=S_0\mathrm{e}^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S(t)$ 随给氧时间 $t$（单位：时）的变化规律，其中 $S_0$ 为初始血氧饱和度，$K$ 为参数．已知 $S_0=60\,\%$，给氧 1 小时后，血氧饱和度为 80%．若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为

（精确到 $0.1$，参考数据：$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 3\approx 1.10$）

（A）0.3　　　　（B）0.5

（C）0.7　　　　（D）0.9

（10）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则下列结论中正确的是




（A）与三条直线 $AB$，$CC_1$，$D_1A_1$ 所成的角都相等的直线有且仅有一条

（B）与三条直线 $AB$，$CC_1$，$D_1A_1$ 所成的角都相等的平面有且仅有一个

（C）到三条直线 $AB$，$CC_1$，$D_1A_1$ 的距离都相等的点恰有两个

（D）到三条直线 $AB$，$CC_1$，$D_1A_1$ 的距离都相等的点有无数个

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

（11）在复平面内，复数 $z$ 对应点的坐标为 $(0,1)$，则 $(1+\mathrm{i})\cdot z=$___.

（12）能够说明“设 $a,b,c$ 是任意实数．若 $a<b<c$，则 $ac<bc$”是假命题的一组整数 $a,b,c$ 的值依次为___.

（13）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则双曲线 $C$ 的离心率为___.

（14）在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\sin 2A$，$2a=\sqrt{3}b$，则 $\angle A=$___；$\dfrac{b}{c}$ 的值为___.

（15）设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & x>0,\\ x^2+4x+1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

① 函数 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$；

② $\forall a>1$，方程 $f(x)=a$ 恰有3个实数根；

③ $\exists x_0\in\mathbf{R}^+$，使得 $f(-x_0)-f(x_0)=0$；

④ 若实数 $x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，则 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)$ 的最大值为 $4\mathrm{e}-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

其中所有正确结论的序号是___.

**三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

（16）（本小题13分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0$，$0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 $\pi$.

（Ⅰ）求 $\omega$ 值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③三个条件中选择一个作为已知，确定 $f(x)$ 的解析式.

设函数 $g(x)=f(x)-2\sin^2 x$，求 $g(x)$ 的单调增区间.

条件①：$f(x)$ 是偶函数；

条件②：$f(x)$ 图象过点 $(\dfrac{\pi}{6},1)$；

条件③：$f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分.

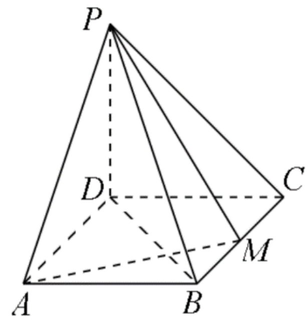
（17）（本小题14分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$M$ 为 $BC$ 的中点.

（Ⅰ）求证：$AM\perp$ 平面 $PBD$；

（Ⅱ）求平面 $ABCD$ 与平面 $APM$ 所成角的余弦值；

（Ⅲ）求点 $D$ 到平面 $APM$ 的距离.




（18）（本小题13分）

某社区组织了一次公益讲座，向社区居民普及垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后分别回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民的讲座前和讲座后答卷的正确率如下表：

| 编号 / 正确率 | 1 号 | 2 号 | 3 号 | 4 号 | 5 号 | 6 号 | 7 号 | 8 号 | 9 号 | 10 号 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 讲座前 | 65% | 60% | 70% | 100% | 65% | 75% | 90% | 85% | 80% | 60% |
| 讲座后 | 90% | 85% | 80% | 95% | 85% | 85% | 95% | 100% | 85% | 90% |

（Ⅰ）从公益讲座前的 10 份垃圾分类知识答卷中随机抽取一份，求这份答卷正确率低于 $80\%$ 的概率；

（Ⅱ）从公益讲座前、后所有正确率不低于 $90\%$ 的垃圾分类知识答卷中随机抽取 3 份，

记随机变量 $X$ 为抽中讲座前答卷的个数，求随机变量 $X$ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）判断此次公益讲座的宣传效果，并说明你的理由.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $B(0,1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $l$ 与椭圆 $E$ 相切，过点 $M(1,0)$ 作直线 $l$ 的垂线，垂足为 $N$，$O$ 为坐标原点， 证明：$|ON|$ 为定值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax-(a+1)\ln x-\dfrac{1}{x}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）求证：当 $0<a<1$ 时，关于 $x$ 的不等式 $f(x)>1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上无解.

（21）（本小题 15 分）

如果数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，则称 $\{a_n\}$ 为“速增数列”.

（Ⅰ）判断数列$\{2^n\}$是否为“速增数列”？说明理由；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$为“速增数列”，且任意项$a_n \in \mathbf{Z}$，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_k=2023$，求正整数$k$的最大值；

（Ⅲ）已知项数为$2k$（$k \geqslant 2$，$k \in \mathbf{Z}$）的数列$\{b_n\}$是“速增数列”，且$\{b_n\}$的所有项的和等于$k$．若$c_n=2^{b_n}$，$n=1,2,3,\cdots,2k$，证明：$c_k c_{k+1}<2$．