2024 北京延庆高二（下）期末

数　　学

2024.07

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）函数 $y=2^x$ 在 $x=1$ 处的导数值为

（A）$2\ln 2$　　（B）$\dfrac{1}{\ln 2}$

（C）1　　（D）2

（2）函数 $y=x^3+2$ 在区间 $[1,2]$ 上的平均变化率为

（A）3　　（B）5

（C）7　　（D）9

（3）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n$，$a_2=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和等于

（A）16　　（B）24

（C）30　　（D）62

（4）在 $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

（A）-15　　（B）15

（C）30　　（D）360

（5）用 0，1，2，3，4 可以组成无重复数字的两位数的个数为

（A）20　　（B）25

（C）15　　（D）16

（6）曲线 $y=\cos x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为

（A）$y=0$　　（B）$y=-1$

（C）$y=x$　　（D）$y=1$

（7）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1(a\in\mathbf{R})$ 有两个极值点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，则

（A） $a<-\sqrt{3}$ 或 $a>\sqrt{3}$　　（B） x_1 是 $f(x)$ 的极小值点

（C） $x_1+x_2=\dfrac{1}{3}$　　（D） $x_1x_2=-\dfrac{1}{3}$

（8）设 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_6$ 是 $1,2,3,\cdots,6$ 的一个排列. 且满足 $|a_1-a_2|\geqslant|a_2-a_3|\geqslant\cdots\geqslant|a_5-a_6|$，则 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_5-a_6|$ 的最大值是

（A） 17　　（B） 15

（C） 13　　（D） 11

（9）设 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\neq-1)$ 的无穷等比数列，S_n 为其前 n 项和，$a_1>0$. 则“$q>0$”是“S_n 存在最小值”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）已知数列 $\{a_n\}$ 满足，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{4n-3}=-1$，$a_{4n-1}=1$，$a_{2n}=a_n$，该数列的前 n 项和为 S_n，则下列论断中错误的是

（A） $a_{31}=1$　　（B） $a_{2024}=-1$

（C） $\exists$ 非零常数 T，使得 $a_{n+T}=a_n$　　（D） $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_{2^n}=-2$

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）2023 年起延庆区将利用三年时间重点打造“延庆东南山 • 九沟十八湾”乡村振兴品牌，旨在借助延庆区东南部浅山区和山区的沟域空间结构、功能布局及秀美山水，构建 9 条各具特色的生态沟域廊道、18 条生态沟域农文体康旅体验湾，全面推动延庆区乡村振兴，打造新时代首都生态沟域绿色发展新典范. 小明打算从九沟十八湾中选出一沟一湾去旅游，则不同的选法有________种.

（12）已知函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$，若 $f'(1)=1$，则 $a=$________.

（13）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$，则 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值为________.

（14）已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，S_n 为其前 n 项和，$a_1a_3=16$，$S_3=14$，

则 $a_2=$________；记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，若存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$ 使得 T_n 最大，

则 n_0 的值为________.

（15）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，满足 $a_{n+1}=ca_n^{\ 2}+a_n$，其中常数 $c\in\mathbf{R}$. 给出下列四个判断：

①若$a_1=1$，$c<0$，则$a_n<\dfrac{1}{n+1}$　$(n\geq 2)$；

②若$c=-1$，则$a_n<\dfrac{1}{n+1}$　$(n\geq 2)$；

③若$c=1$，$a_n>n$　$(n\geq 2)$，则$a_1>1$；

④$a_1=1$，不存在实数c，使得$a_n>n$　$(n\geq 2)$.

其中所有正确判断的序号是_________.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（16）（本小题14分）

求下列函数的导函数.

（Ⅰ）$f(x)=x^2\cdot e^x$；　　　（Ⅱ）$f(x)=\dfrac{\log_2 x}{2^x}$；

（Ⅲ）$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$；　　　（Ⅳ）$f(x)=\ln(1-2x)$.

（17）（本小题13分）

为了解客户对A,B两家快递公司的配送时效和服务满意度情况，现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷. 已知A,B两家公司的调查问卷分别有120份和80份，全部数据统计如下：

快递公司	A快递公司		B快递公司	
项目 / 份数 / 评价分数	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
$85\leqslant x\leqslant 95$	29	24	16	12
$75\leqslant x<85$	47	56	40	48
$65\leqslant x<75$	44	40	24	20

假设客户对A,B两家快递公司的评价相互独立. 用频率估计概率.

（Ⅰ）从该地区选择A快递公司的客户中随机抽取1人，估计该客户对A快递公司配送时效的评价不低于75分的概率；

（Ⅱ）分别从该地区A和B快递公司的样本调查问卷中，各随机抽取1份，记X为这2份问卷中的服务满意度评价不低于75分的份数，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记评价分数$x\geqslant 85$为“优秀”等级，$75\leqslant x<85$为“良好”等级，$65\leqslant x<75$为“一般”等级. 已知小王比较看重配送时效的等级，根据该地区A,B两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况，你认为小王选择A,B哪家快递公司合适？说明理由.

（18）（本小题13分）

某学校开展健步走活动，要求学校教职员工上传11月4日至11月10日的步数信息. 教师甲、乙这七天的步数情况如图1所示.

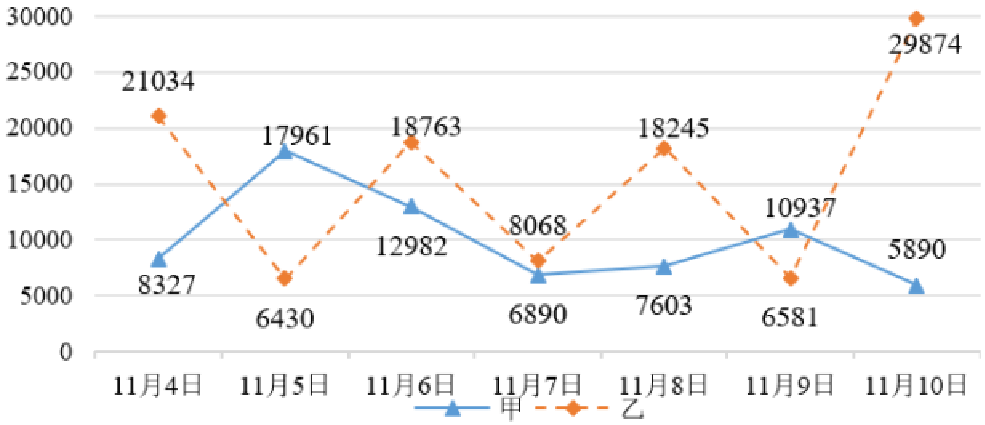

图 1

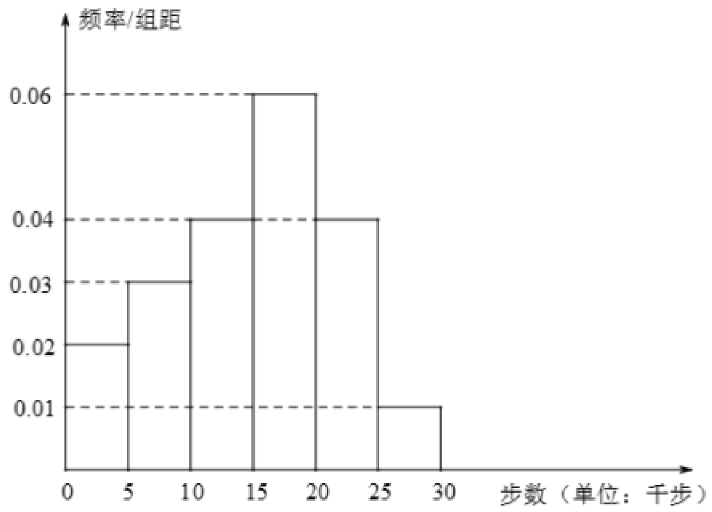

图 2

（Ⅰ）从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取一天，求这一天甲比乙的步数多的概率；

（Ⅱ）从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取三天，记乙的步数不少于 20000 的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）根据 11 月 4 日至 11 月 10 日某一天的数据制作的全校 800 名教职员工步数的频率分布直方图如图 2 所示．已知这一天甲与乙的步数在全校 800 名教职员工中从多到少的排名分别为第 501 名和第 221 名，判断这是哪一天的数据．（只需写出结论）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $4\sqrt{2}$，以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形的周长为 16．

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）过点 $S(0,1)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 P,Q 两点，线段 PQ 的中点为 M．是否存在定点 D，使得 $\dfrac{|DM|}{|PQ|}=\dfrac{1}{2}$？若存在，求出 D 的坐标；若不存在，请说明理由．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{(x-1)^2}+\ln(x-1)$，其中 $m\in\mathrm{R}$．

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上存在极值，求实数 m 的取值范围；

（Ⅲ）求 $f(x)$ 的零点个数．

（21）（本小题 15 分）

有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 m 项 $(m\geqslant 3)$．其各项均为整数，且任意两项均不相等．

$b_i=|a_i-a_{i+1}|\,(i=1,2,\cdots,m-1)$，$b_i\leqslant b_{i+1}\,(i=1,2,\cdots,m-2)$．

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$：0，1，a_3．求 a_3 的取值范围；

（Ⅱ）若 $m=5$，当 $\sum\limits_{i=1}^{5}|a_i|$ 取最小值时，求 $\sum\limits_{i=1}^{4}b_i$ 的最大值；

（Ⅲ）若 $1\leqslant a_i\leqslant m\,(i=1,2,\ldots,m)$，$\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k=m+1$，求 m 的所有可能取值．