

2024 北京怀柔高二（下）期末

数 学

2024. 7

注意事项:

1. 考生要认真填写姓名和考号.
2. 本试卷分第一部分（选择题）和第二部分（非选择题），共 150 分，考试时间 120 分钟.
3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡的对应位置，在试卷上作答无效. 第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答.
4. 考试结束后，考生应将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回.

第一部分 选择题（共 40 分）

一、**选择题**（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 集合 $A = \{x | x + 2 \geq 0\}$ ， $B = \{x | -3 < x < 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x > -3\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 等比数列 $\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots$ 则数列的第七项为

- A. 32 B. -32 C. 64 D. -64

3. 在二项式 $(x - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

- A. 20 B. -40 C. 80 D. -160

4. 已知函数 $f(x) = \sin x + 1$ ，则 $f'(\frac{\pi}{3})$ 的值为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

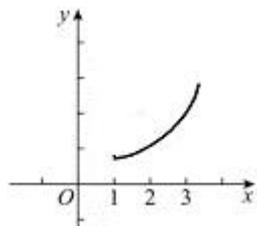
5. 某次考试学生甲还有四道单选题不会做，假设每道题选对的概率均为 $\frac{1}{4}$ ，则四道题中恰好做对 2 道的概率是

- A. $\frac{9}{256}$ B. $\frac{27}{256}$ C. $\frac{27}{128}$ D. $\frac{81}{256}$

6. 2021 年 7 月 20 日，公布了《中共中央、国务院关于优化生育政策促进人口长期均衡发展的决定》，决定实施一对夫妻可以生育三个子女的政策及配套的支持措施。假设生男、生女的概率相等，如果一对夫妻计划生育三个小孩，在已经生育了两个男孩的情况下，第三个孩子是女孩的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，则下列各式中正确的是



- A. $f'(1) > f(3) - f(2) > f'(3)$ B. $f'(3) > f'(1) > f(3) - f(2)$
 C. $f'(3) > f(3) - f(2) > f'(1)$ D. $f'(1) > f'(3) > f(3) - f(2)$

8. 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_1 > 0$, 则“ $0 < q < 1$ ”是“ S_n 单调递增”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 设函数 $f(x) = \frac{b}{x} + x^2 e^{a-x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2e$, 则 a, b 值分别为

- A. $a = e, b = 1$ B. $a = 2, b = e$ C. $a = 1, b = 1$ D. $a = 1, b = e$

10. 若函数 $f(x) = xe^x - ax$, 则根据下列说法选出正确答案是

- ① 当 $a \in (-\infty, -e^{-2}]$ 时, $f(x)$ 在 $x \in R$ 上单调递增;
 ② 当 $a \in (-e^{-2}, 0)$ 时, $f(x)$ 有两个极值点;
 ③ 当 $a \in (-\infty, -e^{-2}]$ 时, $f(x)$ 没有最小值.

- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

第二部分 非选择题 (共 110 分)

二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 若 $a_1 = 7, a_5 = -1$, 则 $a_n =$ _____; 前 n 项和 S_n 的最大值为 _____.

12. 若随机变量 X 的分布列为 (如表), 则 $a =$ _____;

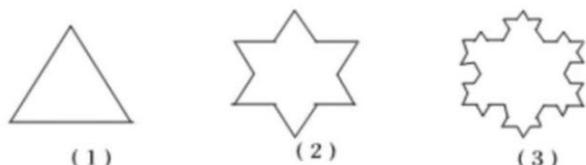
若随机变量 $Y = 2X + 1$, 则随机变量 Y 的数学期望 $E(Y) =$ _____ . (用数字作答)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{3}$

13. 若 $(1+x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$,

则 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 =$ _____ . 32

14. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学, 分形几何具有自身相似性, 从它的任何一个局部经过放大, 都可以得到一个和整体全等的图形. 例如图 (1) 是一个边长为 1 的正三角形, 将每边 3 等分, 以中间一段为边向外作正三角形, 并擦去中间一段, 得到图 (2), 如此继续下去, 得到图 (3), 则第三个图形的边数 _____; 第 n 个图形的周长 _____.



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n^2 - 2an$, 则下列各项说法正确的是 _____ . (填写所有正确选项的序号)

①当 $a = -1$ 时, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$;

②若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 则 $a \in (-\infty, 1]$;

③ $\forall a \in R$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积既有最大值又有最小值;

④若 $\forall n \in N^*$, $a_n \geq -4$ 恒成立, 则 $a \in (-\infty, 2]$.

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

16 (本小题 13 分) 某学校对食堂饭菜质量进行满意度调查, 随机抽取了 200 名学生进行调查, 获取数据如下:

性别 \ 满意度	满意	不满意	弃权
男生	80	30	10
女生	50	20	10

(I) 用频率估计概率, 该校学生对食堂饭菜质量满意的概率;

(II) 用分层抽样的方法从上表中不满意的 50 人中抽取 5 人征求整改建议, 再从这 5 个人中随机抽取 2 人参与食堂的整改监督, 则抽取的 2 人中女生的人数 X , 求 X 的分布列和期望.

17. (本小题 13 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = 10, S_3 = 18$.

(I) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若各项均为正数的数列 $\{b_n\}$ 其前 n 项和为 T_n , 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 设 $c_n = a_n + b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式和数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n .

条件①: $T_n = 3^n - 1$;

条件②: $b_1 = 2, \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$;

条件③: $\forall n \geq 2$ 且 $n \in Z$, 都有 $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ 成立, $b_1 = 2, b_3 = S_3$.

18. (本小题 14 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$,

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-4, 3]$ 上的最大值与最小值;

(III) 若方程 $f(x) = b$ 在 $x \in R$ 有三个不同的根, 求 b 的取值范围.

19. (本小题 15 分) 为了了解高三学生的睡眠情况, 某校随机抽取了部分学生, 统计了他们的睡眠时间, 得到以下数据 (单位: 小时):

男生组: 5, 5.5, 6, 7, 7, 7.5, 8, 8.5, 9;

女生组: 5.5, 6, 6, 6, 6.5, 7, 7, 8.

用频率估计概率, 且每个学生的睡眠情况相互独立.

- (I) 世界卫生组织建议青少年每天最佳睡眠时间应保证在 8-10 (含 8 小时) 小时, 估计该校高三学生睡眠时间在最佳范围的概率;
- (II) 现从该校的男生和女生中分别随机抽取 1 人, X 表示这 2 个人中睡眠时间在最佳范围的人数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;
- (III) 原女生组睡眠时间的样本方差为 s_0^2 , 若女生组中增加一个睡眠时间为 6.5 小时的女生, 并记新得到的女生组睡眠时间的样本方差为 s_1^2 . 写出 s_0^2 与 s_1^2 的大小关系. (结论不要求证明)

20 (本小题 15 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 其中 $a \in R$

- (I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 当曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $y = -x$ 垂直时, 若函数 $y = f(x)$ 的图象总在函数 $g(x) = bx$ 图象的上方, 则 b 的取值范围.

21 (本小题 15 分) 已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2$), 若对任意的 i, j

($1 \leq i < j \leq n$), $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A , 则称数集 A 具有性质 P .

- (I) 分别判断数集 $B = \{1, 2, 4\}$ 与数集 $C = \{1, 3, 5, 7\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;
- (II) 若数集 A 具有性质 P .

(i) 当 $n = 3$ 时, 证明 $a_1 = 1$, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列;

(ii) 证明: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$.