房山区2023年高三第一次模拟考试

数学答案及评分参考

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）C　（2）A　（3）D　（4）A　（5）D

（6）C　（7）B　（8）D　（9）B　（10）D

二、填空题(（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）$-1+\mathrm{i}$　　（12）$-3,-2,-1$ (答案不唯一)

（13）2　　（14）$\dfrac{\pi}{3},2$　　15）②③④

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

解：(I) 因为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$.

（Ⅱ）选择条件①：

方法一：因为$f(x)=\sin(2x+\varphi)$是偶函数，所以$f(0)=\pm1$.

所以$\sin\varphi=\pm1$.

因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\cos 2x$.

所以$g(x)=f(x)-2\sin^2 x=\cos 2x-(1-\cos 2x)$

$=2\cos 2x-1$.

因为$y=\cos x$在$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上单调递增，

由$-\pi+2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，

解得$-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

所以$g(x)$的单递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

方法二：因为$f(x)$是偶函数，所以对任意$x\in\mathrm{R}$，都有$f(-x)=f(x)$，即

$\sin(-2x+\varphi)=\sin(2x+\varphi)$，

所以 $-2x+\varphi=\pi-(2x+\varphi)+2k\pi$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.　（以下与选择方法一相同）

选择条件②：

因为 $f(x)$ 图象过点 $(\dfrac{\pi}{6},1)$，所以 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以}g(x)&=f(x)-2\sin^2 x\\
&=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-(1-\cos 2x)\\
&=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x-1\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x-1\\
&=\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x)-1\\
&=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1.
\end{aligned}
$$

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $g(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

选择条件③：

因为 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$，所以 $2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

解得 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

（以下与选择条件②相同）

（17）

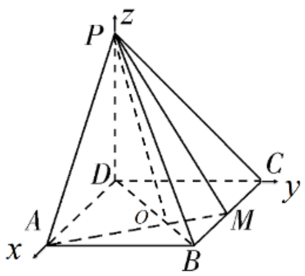
（Ⅰ）证明：（方法一综合法）$\because PD\perp$面$ABCD$，$AM\subset$面$ABCD$，

$\therefore PD\perp AM$.

在矩形$ABCD$中，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{BM}$，所以$\triangle ABD\backsim\triangle BMA$.

所以$\angle ABD=\angle BMA$. 则$\angle AOB=\angle MBD+\angle BMA=\angle MBD+\angle ABD=90^\circ$.

所以$BD\perp AM$.



又$\because BD\cap PD=D$，

$\therefore AM\perp$面PBD.

（方法二坐标法）

$\because PD\perp$面$ABCD$，$\therefore PD\perp AD,\ PD\perp DC$

又因为底面$ABCD$是矩形，$AD\perp DC$，

以D为原点，分别以$DA,\ DC,\ DP$为x，y，z轴建立平面直角坐标系.

设$B(2\sqrt{2},2,0)$，则$A(2\sqrt{2},0,0)$，$M(\sqrt{2},2,0)$，$P(0,0,2)$

$\therefore \overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2\sqrt{2},0,2)$

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\therefore AM\perp BD$.

$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AM\subset$平面$ABCD$，

$\therefore AM\perp PD$.

又$\because BD\cap PD=D$，

$\therefore AM\perp$平面PBD.

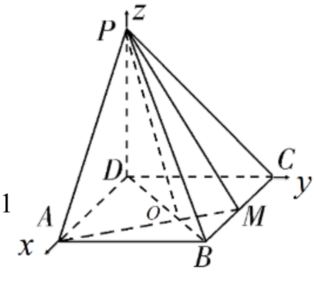
（Ⅱ）（方法一）由（Ⅰ）可知$\overrightarrow{AP}=(-2\sqrt{2},0,2)$，$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$.

平面$ABCD$的一个法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$.

设平面APM的法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-\sqrt{2}x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2\sqrt{2}x+2z=0\end{cases}$

取$x=\sqrt{2}$得到$\vec{n}=(\sqrt{2},1,2)$，

则平面$ABCD$与APM所成角的余弦值为



$$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2}{1\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

（方法二综合法）

由 $\because AM\perp$ 面 PBD，$\therefore AM\perp PO$，

$\therefore \angle POD$ 是平面 $ABCD$ 与平面 APM 所成角的平面角.

在矩形 $ABCD$ 中，$DO=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

在直角三角形 PDO 中，$PO=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$\therefore$ 平面 $ABCD$ 与 APM 所成角的余弦值为 $\cos\angle POD=\frac{DO}{PO}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

（III）（方法一坐标法）

$\because \overrightarrow{DA}=(2\sqrt{2},0,0)$. 平面 APM 的法向量 $\vec{n}=(\sqrt{2},1,2)$.

所以点 D 到平面 APM 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|4|}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

（方法二综合法）$\because \sin\angle POD=\sqrt{1-\cos^2\angle POD}=\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{7}})^2}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

$\therefore$ 点 D 到平面 APM 的距离为 $d=DO\cdot\sin\angle POD=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\cos^2\angle POD}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{7}})^2}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 A 为“从公益讲座前的 10 份垃圾分类知识答卷中随机抽取一份，这份答卷正确率低于 80%”.

在公益讲座之前，10 份垃圾分类知识答卷正确率低于 80% 的有 6 人，则

$$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

（Ⅱ）正确率不低于 90% 的垃圾分类知识答卷有 7 份，其中讲座前的答卷有 2 份，X 的可能取值为 $0,1,2$；

$P(X=0)=\frac{C_5^3C_2^0}{C_7^3}=\frac{2}{7}$；$P(X=1)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7}$；$P(X=2)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7}$；

X 的分布列为

X	0	1	2

P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

（III）角度一：讲座前答卷正确率的平均值

$$\overline{x}_1=\frac{1}{10}(65\%+60\%+70\%+60\%+65\%+75\%+90\%+85\%+80\%+100\%)=75\%$$

讲座后答卷正确率的平均值为

$$\overline{x}_2=\frac{1}{10}(90\%+85\%+80\%+90\%+85\%+85\%+95\%+100\%+85\%+95\%)=89\%$$

因为$\overline{x}_1<\overline{x}_2$，公益讲座后答卷正答率的平均值高于公益讲座前答卷正答率的平均值，公益讲座后社区居民答题水平提高，所以公益讲座有明显的效果；

角度二：平均值变大，且讲座前答卷的方差

$$s_1^2=\frac{1}{10}[(65\%-75\%)^2+(60\%-75\%)^2+(70\%-75\%)^2+(60\%-75\%)^2+(65\%-75\%)^2+$$
$$(75\%-75\%)^2+(90\%-75\%)^2+(85\%-75\%)^2+(80\%-75\%)^2+(100\%-75\%)^2]=1.65$$

同理计算讲座后答卷的方差$s_2^2=0.34$

因为$s_1^2>s_2^2$，公益讲座之后社区居民答题正确率的方差小，整体水平高，并且比较集中，所以公益讲座有明显的效果；

角度三：公益讲座前答题正确率最小值为60％，公益讲座之后答题的正确率最小值为80%，讲座前的极差为：100％−60％=40％，讲座后的极差为：100％−80％=20％，

讲座后答卷正确率的变化范围比讲座前答卷正确率的变化范围小，公益讲座有效果。

（19）（本小题15分）

解：（1）由已知可得，$\begin{cases}b=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得$a=\sqrt{2}$，

所以，椭圆E的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）①当切线l的斜率不存在时，直线$l:x=\pm\sqrt{2}$，过点$M(1,0)$作直线l的垂线为$y=0$，即此时$N(\sqrt{2},0)$或$N(-\sqrt{2},0)$，则$|ON|=\sqrt{2}$.

②当切线l的斜率为0时，直线$l:y=\pm1$，过点$M(1,0)$作直线l的垂线为$x=1$，即此时$N(1,1)$或

$N(1,-1)$，$|ON|=\sqrt{2}$；

③当切线l的斜率存在且不为0时，设l的方程为$y=kx+m$，

联立直线l和椭圆E的方程得$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，

消去y并整理，得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

因为直线l和椭圆E相切，

$\therefore \Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=0$，化简并整理，得$m^2=2k^2+1$，

因为直线MN与l垂直，所以直线MN的方程为$y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$，

联立$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}(x-1) \\ y=kx+m \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\dfrac{1-km}{1+k^2} \\ y=\dfrac{k+m}{1+k^2} \end{cases}$，即点$N(\dfrac{1-km}{1+k^2},\dfrac{k+m}{1+k^2})$.

$$\therefore |ON|^2=\frac{(1-km)^2+(k+m)^2}{(1+k^2)^2}=\frac{k^2m^2+k^2+m^2+1}{(1+k^2)^2}=\frac{(k^2+1)(m^2+1)}{(1+k^2)^2}$$

$$=\frac{m^2+1}{1+k^2}=\frac{2k^2+2}{1+k^2}=2.$$

所以，$|ON|=\sqrt{2}$.

综上所述，$|ON|=\sqrt{2}$为定值.

（20）（本小题15分）

解：（Ⅰ）当$a=0$时，$f(x)=-\ln x-\dfrac{1}{x}$，　$f'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，

$f(1)=-1$，切点$(1,-1)$.

$f'(1)=0$，切线斜率$k=0$.

所以切线方程为$y=-1$.

（Ⅱ）因为$f(x)$在$x=2$处取得极值，所以$f'(2)=0$.

因为$f'(x)=a-\dfrac{a+1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，

所以$a-\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{1}{4}=0$，$a=\dfrac{1}{2}$.

当$a=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$x=2$处取得极小值.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-3x+2}{2x^2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2x^2},$$

由 $f'(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=2$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 的变化情况

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(2,+\infty)$，单调递减区间为 $(1,2)$.

（III）证明：“$f(x)>1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上无解”，等价于“$f(x)\leqslant 1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上恒成立”，

等价于“$f(x)$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上的最大值 $\leqslant 1$”.

$$f'(x)=a-\frac{a+1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2},$$

当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=\frac{1}{a}$.

①当 $\frac{1}{a}\geqslant \mathrm{e}$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上单调递减.

所以 $f(x)\leqslant f(1)=a-1<1$，不等式 $f(x)>1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上无解.

②当 $\frac{1}{a}<\mathrm{e}$ 时，

x	$(1,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}，\mathrm{e})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上的最大值为 $f(1)$ 或 $f(\mathrm{e})$.

因为 $f(\mathrm{e})=a\mathrm{e}-(a+1)-\frac{1}{\mathrm{e}}$，$f(\mathrm{e})-1=a(\mathrm{e}-1)-2-\frac{1}{\mathrm{e}}<(\mathrm{e}-1)-2-\frac{1}{\mathrm{e}}<0$，

所以 $f(\mathrm{e})<1$，

又因为 $f(1)=a-1<1$，所以，$f(x)\leqslant 1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上恒成立.

综上，当 $0<a<1$ 时，不等式 $f(x)>1$ 在区间 $[1，\mathrm{e}]$ 上无解.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）数列 $\{2^n\}$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+2}-a_{n+1}=2^{n+2}-2^{n+1}=2^{n+1}$，$a_{n+1}-a_n=2^n$，

所以 $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2^{n+1}-2^n=2^n>0$

所以，数列 $\{2^n\}$ 为“速增数列”

（Ⅱ）因为数列$\{a_n\}$为“速增数列”，$a_1=1$，$a_2=3$，且$a_n\in \mathrm{Z}$.

所以，对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，$a_2-a_1=2$，

所以，$a_3-a_2\geqslant 3$，$a_4-a_3\geqslant 4$，$\cdots$，$a_k-a_{k-1}\geqslant k$.

相加得，$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_k-a_{k-1})\geqslant 2+3+\cdots+k$，

即$a_k-a_1\geqslant \dfrac{(k-1)(k+2)}{2}$.

所以$4044\geqslant (k-1)(k+2)$.

$62\times 65=4030$，$63\times 66=4158$，所以k的最大值为63.

（Ⅲ）

方法一：（反证法）

假设，$c_kc_{k+1}\geqslant 2$.

因为$\{b_n\}$是“速增数列”，且所有项的和等于k，

所以$b_{n+1}-b_n<b_{n+2}-b_{n+1}$，$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=k$，

因为$c_n=2^{b_n}$，$b_n=\log_2 c_n$，$c_n>0$

所以$\log_2 c_{n+1}-\log_2 c_n<\log_2 c_{n+2}-\log_2 c_{n+1}$，且$\log_2 c_1+\log_2 c_2+\cdots+\log_2 c_{2k}=k$.

所以$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}<\dfrac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$，因此$\dfrac{c_2}{c_1}<\dfrac{c_3}{c_2}<\dfrac{c_4}{c_3}<\cdots<\dfrac{c_{2k}}{c_{2k-1}}$，且$c_1c_2c_3\cdots c_{2k}=2^k$

所以对任意的$m\leqslant k-1, m\in N^*$，都有$\dfrac{c_{m+1}}{c_m}<\dfrac{c_{2k+1-m}}{c_{2k-m}}$，即$c_{m+1}c_{2k-m}<c_mc_{2k+1-m}$

所以$c_1c_{2k}>c_2c_{2k-1}>c_3c_{2k-2}>\cdots>c_kc_{k+1}\geqslant 2$.

所以$c_1c_2c_3\cdots c_{2k}>2^k$，与$c_1c_2c_3\cdots c_{2k}=2^k$矛盾，

所以假设错误，所以$c_kc_{k+1}<2$.

方法二：假设，$c_kc_{k+1}\geqslant 2$.

因为$\{b_n\}$是“速增数列”，且所有项的和等于k，

所以$b_{n+1}-b_n<b_{n+2}-b_{n+1}$，且$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=k$，

因为$c_n=2^{b_n}$，

所以$2^{b_{n+1}-b_n}<2^{b_{n+2}-b_{n+1}}$，且$2^{b_1+b_2+\cdots+b_{2k}}=2^k$

所以$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}<\dfrac{c_{n+2}}{c_{n+1}}$，因此$\dfrac{c_2}{c_1}<\dfrac{c_3}{c_2}<\dfrac{c_4}{c_3}<\cdots<\dfrac{c_{2k}}{c_{2k-1}}$，且$c_1c_2c_3\cdots c_{2k}=2^k$

以下同方法一

方法三：要证：$c_kc_{k+1}<2$，即$2^{b_k}2^{b_{k+1}}<2$，只需证：$b_k+b_{k+1}<1$.

假设，$b_k+b_{k+1}\geqslant 1$.

因为$\{b_n\}$是“速增数列”，且所有项的和等于 k，

所以$b_{n+1}-b_n<b_{n+2}-b_{n+1}$，且$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=k$，

所以$b_2-b_1<b_3-b_2<b_4-b_3<\cdots<b_{2k-1}-b_{2k-2}<b_{2k}-b_{2k-1}$，

所以$b_1+b_{2k}>b_2+b_{2k-1}>\cdots>b_k+b_{k+1}\geqslant 1$.

所以$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}>k$，与$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=k$矛盾.

所以假设错误，所以$b_k+b_{k+1}<1$.

所以$c_kc_{k+1}<2$.

方法四：要证：$c_kc_{k+1}<2$，即$2^{b_k}2^{b_{k+1}}<2$，只需证：$b_k+b_{k+1}<1$.

由题意可知$b_{2k}-b_{2k-1}>b_2-b_1$，$b_{2k-1}-b_{2k-2}>b_3-b_2$，⋯，$b_{k+2}-b_{k+1}>b_k-b_{k-1}$.

所以$b_{2k}+b_1>b_{2k-1}+b_2$，$b_{2k-1}+b_2>b_{2k-2}+b_3$，⋯，$b_{k+2}+b_{k-1}>b_{k+1}+b_k$.

所以$b_{2k}+b_1>b_{2k-1}+b_2>\cdots>b_{k+1}+b_k$.

所以$k=(b_{2k}+b_1)+(b_{2k-1}+b_2)+\cdots+(b_{k+1}+b_k)>k(b_{k+1}+b_k)$.

所以$b_k+b_{k+1}<1$.

所以$c_kc_{k+1}<2$.