丰台区2022～2023学年度第二学期综合练习（一）

高 三 数 学

2023.03

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1． 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$ （B）$\{x|0<x\leqslant 1\}$

（C）$\{x|0<x\leqslant 2\}$ （D）$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

2．若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a>b$，则

（A）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ （B）$a^2>b^2$ （C）$ac>bc$ （D）$a-c>b-c$

3. 已知圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2(r>0)$ 与 y 轴相切，则 $r=$

（A）$\sqrt{2}$ （B）$\sqrt{3}$ （C）2 （D）3

4．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(-2)=$

（A）-1 （B）0 （C）1 （D）2

5. 在平面直角坐标系 xoy 中，若角 α 以 x 轴非负半轴为始边，其终边与单位圆交点的横坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 α 的一个可能取值为

（A）$-60°$ （B）$-30°$ （C）$45°$ （D）$60°$

6．在△ABC 中，若 $2\cos A\sin B=\sin C$，则该三角形的形状一定是

（A）等腰三角形 （B）等边三角形

（C）直角三角形 （D）等腰直角三角形

7．设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

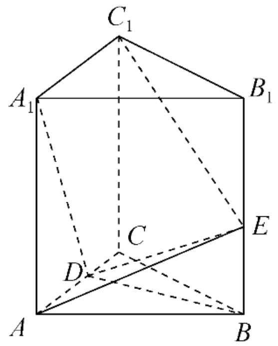
8．已知抛物线 C：$y^2=2px$ $(p>0)$的顶点是坐标原点 O，焦点为 F，A 是抛物线 C 上的一点，点 A 到 x 轴的距离为$2\sqrt{2}$，过点 A 向抛物线 C 的准线作垂线，垂足为 B.若四边形 $ABOF$ 为等腰梯形，则 p 的值为

（A）1　　　（B）$\sqrt{2}$　　　（C）2　　　（D）$2\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$，存在常数 t（$t>0$），使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+t)=f(x)$，当 $x\in[0,t)$ 时，$f(x)=|x-\dfrac{t}{2}|$.若 $f(x)$ 在区间 $(3,4)$ 上单调递减，则 t 的最小值为

（A）3　　　（B）$\dfrac{8}{3}$　　　（C）2　　　（D）$\dfrac{8}{5}$

10．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2$，$BC=1$，$AA_1=2$，点 D 在棱 AC 上，点 E 在棱 BB_1 上，给出下列三个结论：



①三棱锥 $E-ABD$ 的体积的最大值为$\dfrac{2}{3}$；

② A_1D+DB 的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中所有正确结论的个数为

（A）0　　　（B）1　　　（C）2　　　（D）3

第二部分　（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

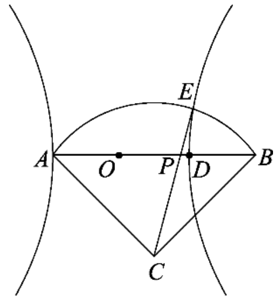
11. 若复数$\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，则 $a=$________.

12. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=60^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

13. 从-2，-1，1，2，3 这 5 个数中任取 2 个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A，“两数均为负数”为事件 B，则 $P(B|A)=$________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}a-x, & x<a,\\ x^3-x, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为________.

15. 三等分角是“古希腊三大几何问题”之一，目前尺规作图仍不能解决这个问题.古希腊数学家 Pappus（300~350 前后）借助圆弧和双曲线给出了一种三等分角的方法：如图，以角的顶点C为圆心作圆交角的两边于A，B两点；取线段AB的三等分点O，D；以B为焦点，A，D为顶点作双曲线$\mathcal{H}$. 双曲线$\mathcal{H}$与弧AB的交点记为E，连接CE，则$\angle BCE=\frac{1}{3}\angle ACB$.



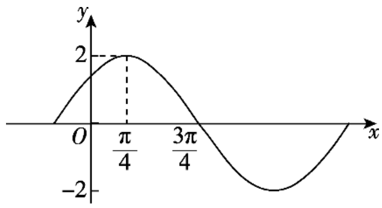
（Ⅰ）双曲线$\mathcal{H}$的离心率为_________；

（Ⅱ）若$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$|AC|=3\sqrt{2}$，CE交AB于点P，则$|OP|=$ _________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示.



（Ⅰ）求$f\left(x\right)$的解析式；

（Ⅱ）若函数$g(x)=f(x)\sin x$，求$g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

17.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面是边长为 2 的菱形，AC交BD于点O，$\angle BAD=60^\circ$，$PB=PD$，点E是棱PA的中点，连接OE，OP.

（Ⅰ）求证：$OE//$平面PCD；

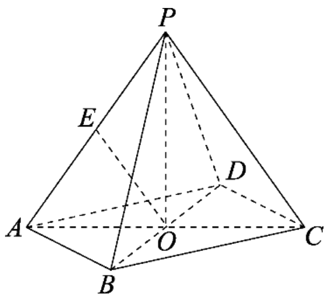
（Ⅱ）若平面 PAC 与平面 PCD 的夹角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求线段 OP 的长.

条件①：平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$；

条件②：$PB\perp AC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分

.

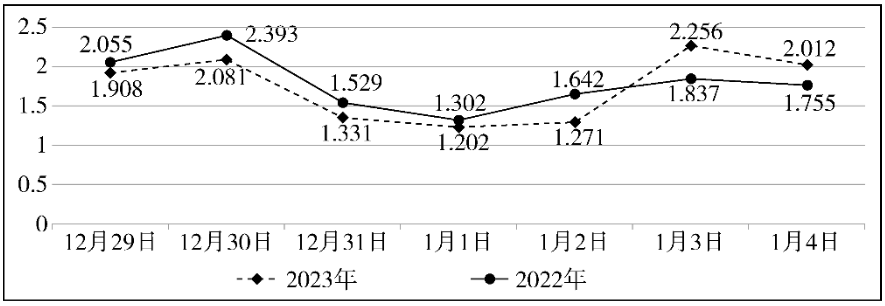


18. （本小题 14 分）

交通拥堵指数（TPI）是表征交通拥堵程度的客观指标，用 TPI 表示，TPI 越大代表拥堵程度越高.某平台计算 TPI 的公式为：TPI=$\dfrac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$，并按 TPI 的大小将城市道路拥堵程度划分为如下表所示的 4 个等级：

TPI	[1，1.5)	[1.5，2)	[2，4)	不低于 4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市 2023 年元旦及前后共 7 天与 2022 年同期的交通高峰期城市道路 TPI 的统计数据如下图：



（Ⅰ）从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

（Ⅱ）从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数记为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦前后共 7 天的交通高峰期城市道路 TPI 依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_7$，将 2022 年同期 TPI 依次记为 $b_1,b_2,\cdots,b_7$.记 $c_i=a_i-b_i\ (i=1,2,\cdots,7)$，$\bar{c}=\dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}c_i$.请直接写出 $\left|c_i-\bar{c}\right|$ 取得最大值时 i 的值.

19. （本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 2.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(2,0)$ 的直线与椭圆 E 交于 B，C 两点，过点 B，C 作直线 $l:x=t$ 的垂线（点 B，C 在直线 l 的两侧），垂足分别为 M，N，记△BMP，△MNP，△CNP 的面积分别为 S_1，S_2，S_3. 试问：是否存在常数 t，使得 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列？若存在，求出 t 的值，若不存在，请说明理由.

20. （本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{\mathrm{e}^x}(a>0)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1，x_2，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明：$x_1+x_2>2\ln a$.

21. （本小题 14 分）

已知集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,2n\}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 4)$，对于集合 S_n 的非空子集 A，若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a,b,c，使得 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 A，则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”.

（Ⅰ）试判断集合 $A_1=\{3,4,5\}$，$A_2=\{3,5,7\}$ 是否为集合 S_4 的“期待子集”；（直接写出答案，不必说明理由）

（Ⅱ）如果一个几何中含有三个元素 x,y,z，同时满足①$x<y<z$, ②$x+y>z$, ③$x+y+z$ 为偶数，那么称该集合具有性质 P.对于集合 S_n 的非空子集 A，证明：集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 A 具有性质 P；

（Ⅲ）若 $S_n(n\geqslant 4)$ 的任意 m 元子集都是集合 S_n 的“期待子集”，求 m 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）