



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



卫生部“十一五”规划教材

全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学

第 7 版

主 编 胡新珉

副主编 王 磊 冀 敏 李晓春



人民卫生出版社

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

1. 医用高等数学 / 第5版
- * 2. 医学物理学 / 第7版
3. 基础化学 / 第7版
4. 有机化学 / 第7版
5. 医学生物学 / 第7版
6. 系统解剖学 / 第7版
7. 局部解剖学 / 第7版
8. 组织学与胚胎学 / 第7版
9. 生物化学 / 第7版
10. 生理学 / 第7版
11. 医学微生物学 / 第7版
12. 人体寄生虫学 / 第7版
13. 医学免疫学 / 第5版
14. 病理学 / 第7版
15. 病理生理学 / 第7版
16. 药理学 / 第7版
17. 医学心理学 / 第5版
18. 法医学 / 第5版
19. 诊断学 / 第7版
20. 医学影像学 / 第6版
21. 内科学 / 第7版
22. 外科学 / 第7版
23. 妇产科学 / 第7版
24. 儿科学 / 第7版
25. 神经病学 / 第6版
26. 精神病学 / 第6版
27. 传染病学 / 第7版
28. 眼科学 / 第7版
29. 耳鼻咽喉头颈外科学 / 第7版
30. 口腔科学 / 第7版
31. 皮肤性病学 / 第7版
32. 核医学 / 第7版
33. 流行病学 / 第7版
34. 卫生学 / 第7版
35. 预防医学 / 第5版
36. 中医学 / 第7版
37. 计算机应用基础 / 第4版
38. 体育 / 第4版
39. 医学细胞生物学 / 第4版
40. 医学分子生物学 / 第3版
41. 医学遗传学 / 第5版
42. 临床药理学 / 第4版
43. 医学统计学 / 第5版
44. 医学伦理学 / 第3版
45. 临床流行病学 / 第3版
46. 康复医学 / 第4版
47. 医学文献检索 / 第3版
48. 卫生法 / 第3版
49. 医学导论 / 第3版
50. 全科医学概论 / 第3版
51. 麻醉学 / 第2版
52. 急诊医学

策划编辑… 奚天舒 郝巨为
责任编辑… 郝巨为 高 博
封面设计… 郭 森
版式设计… 郭 森 陈 脱



ISBN 978-7-117-10140-0



9 787117 101400 >

定价(含光盘): 40.00 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
卫生部“十一五”规划教材
全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学

第 7 版

主 编 胡新珉

副主编 王 磊 冀 敏 李晓春

编 者 (以姓氏笔画为序)

王 磊 (四川大学)

王章金 (华中科技大学)

吉 强 (天津医科大学)

刘新纯 (辽宁医学院)

李晓春 (中南大学)

杨继庆 (第四军医大学)

吴 杰 (昆明医学院)

吴明海 (山东大学)

胡新珉 (四川大学)

郭嘉泰 (长治医学院)

喀蔚波 (北京大学)

童家明 (青岛大学)

鲍修增 (哈尔滨医科大学)

潘志达 (大连医科大学)

冀 敏 (复旦大学)

魏 杰 (蚌埠医学院)

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

医学物理学/胡新珉主编. —7 版. —北京:人民卫生出版社, 2008. 6

ISBN 978 - 7 - 117 - 10140 - 0

I. 医… II. 胡… III. 医用物理学-医学院校-教材 IV. R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 054497 号

本书本印次封底贴有防伪标,请注意识别。

医学物理学

第 7 版

主 编: 胡新珉

出版发行: 人民卫生出版社(中继线 010-67616688)

地 址: 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼

邮 编: 100078

网 址: <http://www.pmph.com>

E - mail: pmph@pmph.com

购书热线: 010-67605754 010-65264830

印 刷: 中国农业出版社印刷厂

经 销: 新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 24.75 插页: 1

字 数: 667 千字

版 次: 1978 年 7 月第 1 版 2008 年 6 月第 7 版第 38 次印刷

标准书号: ISBN 978-7-117-10140-0/R·10141

定价(含光盘): 40.00 元

版权所有, 侵权必究, 打击盗版举报电话: 010-87613394

(凡属印装质量问题请与本社销售部联系退换)

全国高等学校五年制临床医学专业 第七轮 规划教材修订说明

全国高等学校五年制临床医学专业卫生部规划教材从第一轮编写出版至今已有30年的历史。几十年来,在卫生部的领导和支持下,以裘法祖院士为代表的一大批有丰富临床和教学经验、有高度责任感的老教授和医学教育家参与了本套教材的创建和每一轮的修订工作,使我国的五年制临床医学教材不断丰富、完善与更新,形成了一套课程门类齐全、学科系统优化、内容衔接合理的规划教材。本套教材为推动我国医学教育事业的改革和发展做出了历史性巨大贡献。正如老一辈医学教育家亲切地称这套教材是中国医学教育的“干细胞”教材,由她衍生出了八年制和研究生两套规划教材。今天,全国一大批在临床教学、科研、医疗第一线的中青年教授、学者继承和发扬了老一辈的优良传统,积极参与了本套第七轮教材的修订和建设,并借鉴国内外医学教育教学的经验和成果,不断完善和提升编写的水平和质量,已逐渐将每一部教材打造成了精品,使第七轮教材更加成熟、完善和新颖。

第七轮教材的修订从2006年5月开始,其修订和编写特点如下:

① 在全国广泛、深入调研基础上,总结和汲取了前六轮教材的编写经验和成果,尤其是对一些不足之处进行了大量的修改和完善,并在充分体现科学性、权威性的基础上,更考虑其全国范围的代表性和适用性。

② 依然坚持教材编写“三基、五性、三特定”的原则。

③ 内容的深度和广度严格控制在五年制教学要求的范畴,精练文字压缩字数,以更适应广大五年制院校的要求,减轻学生的负担。

④ 在尽可能不增加学生负担的前提下,提高印刷装帧质量,根据学科需要,部分教材改为双色印刷、彩色印刷,以提升教材的质量和可读性。

⑤ 适应教学改革的需求,实现教材的系列化、立体化建设,本轮大部分教材配有《学习指导与习题集》、《实验指导》、《教师用书》以及配套光盘等,且与教材同期出版。

第七轮教材共52种,新增1种,即《急诊医学》。全套教材均为卫生部“十一五”规划教材,绝大部分为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,分两批于2008年出版发行。

第七轮 教材目录

1. 医用高等数学 / 第5版 主编 张选群	27. 传染病学 / 第7版 主编 杨绍基 任 红
2. 医学物理学 / 第7版 主编 胡新珉	28. 眼科学 / 第7版 主编 赵堪兴 杨培增
3. 基础化学 / 第7版 主编 魏祖期	29. 耳鼻咽喉头颈外科学 / 第7版 主编 田勇泉
4. 有机化学 / 第7版 主编 吕以仙	30. 口腔科学 / 第7版 主编 张志愿
5. 医学生物学 / 第7版 主编 傅松滨	31. 皮肤性病学 / 第7版 主编 张学军
6. 系统解剖学 / 第7版 主编 柏树令	32. 核医学 / 第7版 主编 李少林 王荣福
7. 局部解剖学 / 第7版 主编 彭裕文	33. 流行病学 / 第7版 主编 王建华
8. 组织学与胚胎学 / 第7版 主编 邹仲之 李继承	34. 卫生学 / 第7版 主编 仲来福
9. 生物化学 / 第7版 主编 查锡良	35. 预防医学 / 第5版 主编 傅 华
10. 生理学 / 第7版 主编 朱大年	36. 中医学 / 第7版 主编 李家邦
11. 医学微生物学 / 第7版 主编 李 凡 刘晶星	37. 计算机应用基础 / 第4版 主编 邹赛德
12. 人体寄生虫学 / 第7版 主编 李雍龙	38. 体育 / 第4版 主编 裴海泓
13. 医学免疫学 / 第5版 主编 金伯泉	39. 医学细胞生物学 / 第4版 主编 陈誉华
14. 病理学 / 第7版 主编 李玉林	40. 医学分子生物学 / 第3版 主编 药立波
15. 病理生理学 / 第7版 主编 金惠铭 王建枝	41. 医学遗传学 / 第5版 主编 左 伋
16. 药理学 / 第7版 主编 杨宝峰	42. 临床药理学 / 第4版 主编 李 俊
17. 医学心理学 / 第5版 主编 姚树桥 孙学礼	43. 医学统计学 / 第5版 主编 马斌荣
18. 法医学 / 第5版 主编 王保捷	44. 医学伦理学 / 第3版 主编 丘祥兴 孙福川
19. 诊断学 / 第7版 主编 陈文彬 潘祥林	45. 临床流行病学 / 第3版 主编 王家良 王滨有
20. 医学影像学 / 第6版 主编 吴恩惠 冯敢生	46. 康复医学 / 第4版 主编 南登崑
21. 内科学 / 第7版 主编 陆再英 钟南山	47. 医学文献检索 / 第3版 主编 郭继军
22. 外科学 / 第7版 主编 吴在德 吴肇汉	48. 卫生法 / 第3版 主编 赵同刚
23. 妇产科学 / 第7版 主编 乐 杰	49. 医学导论 / 第3版 主编 文历阳
24. 儿科学 / 第7版 主编 沈晓明 王卫平	50. 全科医学概论 / 第3版 主编 杨秉辉
25. 神经病学 / 第6版 主编 贾建平	51. 麻醉学 / 第2版 主编 曾因明
26. 精神病学 / 第6版 主编 郝 伟	52. 急诊医学 主编 沈 洪

全国高等学校临床医学专业第五届教材评审委员会

名誉主任委员	裘法祖
主任委员	陈灏珠
副主任委员	龚非力
委 员	(以姓氏笔画为序)
	于修平 王卫平 王鸿利 文继舫 朱明德 刘国良 李焕章 杨世杰
	张肇达 沈 悌 吴一龙 郑树森 原 林 曾因明 樊小力
秘 书	孙利军

第7版 前言

本书第5版为卫生部规划教材,第6版为教育部评选的普通高等教育“十五”国家级规划教材,第7版是在第6版的基础上修订而成的。

在第7版教材的编写中,我们注意保持第6版教材原有的风格和特点,把教材的先进性、科学性、实用性结合在一起,突出基本理论,重视反映现代物理科学新成就,重视分析问题、解决问题能力的培养,注意联系医学和生物学实际,强化现代物理思想、概念和方法,并且使教材便于教和学。因此,本书内容丰富,格式新颖实用,具有现代化教材的特性。

本书与第6版教材相比较有以下特点:①内容有增也有减,增加了一些新概念和新成就内容,如次声波、超重、失重和微重力、磁共振功能成像等。同时也删去了一些偏难和数学分析多的内容,如黏弹性材料的数学模型、应力分析与测量、电缆方程及生物阻抗微分图等。②教材结构分为两个板块,前18章基本内容为第一板块,后两章专题内容为第二个板块。这种结构体例与国际教科文组织关于21世纪国际物理教育规划的教材模式是一致的,使教材具有较大的弹性,既保证了基本内容的介绍,又不失现代物理新成就的介绍。③强化现代物理思想、思维方法和研究方法,以及物理学家的创新思维,如在力学中介绍了三大时空平移对称性和三大守恒定律及现代时空观,在其他相关章节介绍了对称性、统计性、统一性思想和对应原理等,这些内容是现代物理研究和自然科学研究的指导思想,对启迪学生创新思维,提高读者的综合科学素质有重要作用。④注重联系医学和生物学实际,几乎每章都适当介绍了相应的医学应用或物理因素对生物体的作用,使学生了解现代医学与现代物理学技术和方法的密切关系。⑤本书涉及的物理量和单位的名称、符号,按《中华人民共和国国家标准——量和单位》(GB 3100~3102-1993)进行了修订,使其规范化、国际化。

本书共20章,前18章为基本内容,供必修课讲授用,后2章为专题内容,供选修或自学用。每章前有本章内容提要、学习要求,章后配有一定数量的习题和思考题,习题附有答案,便于学生自学。编写有配套教材《医学物理学学习指导与习题集》和《医学物理实验》,便于教学。本书的教学参考学时数为72~108学时。

本书适合高等医学院校临床、基础、口腔、儿科、法医、医学检验、卫生检验、预防医学、护理学等本科专业用,也可供医药院校相关专业、生命科学专业的师生和研究工作者作为参考书。

本书的编写得到四川大学教务处、物理科学与技术学院和各编者所在单位的关心和支持,在此表示感谢。对热情支持本书编写的国内外专家、教授及其他人员表示诚挚的谢意。

由于编者学识和经验的限制,书中不当之处在所难免,切望使用本书的师生和同志们指正。

编者

2008年2月

绪 论

..... 1

第一章

力学基本定律 3

第一节 质点的运动 / 3

一、位移 运动方程 / 3

二、速度 加速度 / 3

第二节 牛顿运动规律 / 4

一、牛顿运动定律 / 4

二、力学单位的国际单位制和量纲 / 5

三、惯性系和非惯性系 / 5

第三节 功和能 能量守恒定律 / 7

一、功 / 7

二、动能 势能 / 7

三、功能原理 时间平移对称性与能量守恒定律 / 8

第四节 动量 动量守恒定律 / 9

一、冲量与动量 / 9

二、空间平移对称性与动量守恒定律 / 10

三、碰撞 / 11

第五节 刚体的转动 / 12

一、刚体的定轴转动 / 12

二、转动定律 / 13

三、角动量 空间旋转对称性与角动量守恒定律 / 14

四、旋进 / 15

第六节 超重和失重 / 15

一、超重 / 16

二、失重 / 16

思考题与习题一 / 17

第二章

物体的弹性 19

第一节 线应变与正应力 / 19

一、线应变 / 19

二、正应力 / 19

三、正应力与线应变的关系 / 20

四、弯曲 / 22

第二节 切应变与切应力 / 23

一、切应变 / 23

二、切应力 / 23

三、切应力与切应变的关系 / 24



四、扭转 / 24	
第三节 体应变与体应力 / 25	
一、体应变 / 25	
二、体应力 / 25	
三、体应变与体应力的关系 / 25	
* 第四节 生物材料的黏弹性 / 26	
一、生物材料的结构特点 / 26	
二、生物材料的黏弹性 / 26	
思考题与习题二 / 27	

第三章 流体的运动..... 29

第一节 理想流体的稳定流动 / 29	
一、理想流体 / 29	
二、稳定流动 / 29	
三、连续性方程 / 30	
第二节 伯努利方程 / 30	
一、伯努利方程 / 30	
二、伯努利方程的应用 / 32	
第三节 黏性流体的流动 / 34	
一、层流和湍流 / 34	
二、牛顿黏滞定律 / 35	
三、雷诺数 / 36	
第四节 黏性流体的运动规律 / 36	
一、黏性流体的伯努利方程 / 36	
二、泊肃叶定律 / 37	
三、斯托克司定律 / 38	
* 第五节 血液在循环系统中的流动 / 39	
一、血液的组成及特性 / 39	
二、心脏做功 / 40	
三、血流速度分布 / 41	
四、血流过程中的血压分布 / 41	
思考题与习题三 / 42	

第四章 振动..... 44

第一节 简谐振动 / 44	
一、简谐振动方程 / 44	
二、简谐振动的特征量 / 45	
三、简谐振动的矢量图示法 / 45	
四、简谐振动的能量 / 46	
第二节 阻尼振动、受迫振动和共振 / 47	
一、阻尼振动 / 47	
二、受迫振动 / 48	
三、共振 / 49	



第三节 简谐振动的合成 / 49

一、两个同方向、同频率简谐振动的合成 / 49

二、同方向、不同频率的简谐振动的合成 / 50

三、谐振分析 / 51

四、两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成 / 52

思考题与习题四 / 53

第五章

波动 55

第一节 机械波 / 55

一、机械波的产生 / 55

二、波面和波线 / 55

三、波速 波长 波的周期和频率 / 55

第二节 简谐波 / 56

一、波函数 / 56

二、波动方程 / 57

第三节 波的能量 / 57

一、波的能量和强度 / 57

二、波的衰减 / 58

第四节 波的衍射和波的干涉 / 59

一、惠更斯原理 / 59

二、波的叠加原理 / 59

三、波的干涉 / 60

四、调幅波 / 61

五、驻波 / 61

第五节 声波 / 64

一、声压和声强 / 64

二、听觉域 / 65

三、声强级和响度级 / 66

第六节 多普勒效应 / 66

一、多普勒效应 / 66

二、冲击波 / 67

第七节 超声波和次声波 / 68

一、超声波的特性 / 68

二、超声波的产生与探测 / 69

三、超声波在医学中的应用 / 69

四、次声波 / 72

思考题与习题五 / 72

第六章

相对论基础 74

第一节 伽利略变换 / 74

一、经典力学的绝对时空观和相对性原理 / 74

二、伽利略变换 / 74

第二节 洛伦兹变换 / 75



一、迈克耳孙-莫雷实验 / 75	
二、狭义相对论的基本假设 / 76	
三、洛伦兹变换 / 76	
第三节 狭义相对论的时空观 / 77	
一、时间的延缓 / 77	
二、长度的收缩 / 78	
三、同时性的相对性 / 79	
四、因果率(causality)和信号速度 / 79	
五、光多普勒效应 / 80	
第四节 相对论动力学 / 80	
一、动量和质量 / 80	
二、力和动能 / 81	
三、质能关系 / 82	
四、能量和动量的关系 / 82	
第五节 广义相对论简介 / 83	
一、等效原理 / 83	
二、广义相对性原理 / 84	
三、引力场的时空特性 / 84	
四、引力坍缩与黑洞 / 86	
五、引力波 / 86	
思考题与习题六 / 86	

第七章

分子动理论	88
第一节 物质的微观结构 / 88	
第二节 理想气体分子动理论 / 89	
一、理想气体状态方程 / 89	
二、理想气体微观模型 / 89	
三、理想气体的压强公式 / 90	
四、理想气体的能量公式 / 91	
五、理想气体定律的推导 / 92	
第三节 气体分子速率分布律和能量分布律 / 93	
一、麦克斯韦速率分布定律 / 93	
二、平均自由程和平均碰撞频率 / 95	
三、玻耳兹曼能量分布定律 / 96	
第四节 输运过程 / 96	
一、热传导 / 97	
二、扩散 / 98	
三、透膜输运 / 98	
第五节 液体的表面现象 / 99	
一、表面张力和表面能 / 100	
二、弯曲液面的附加压强 / 101	
三、毛细现象和气体栓塞 / 103	
四、表面活性物质与表面吸附 / 104	

**第八章 热力学基础** 107

第一节 热力学的一些基本概念 / 107

一、热力学系统 / 107

二、准静态过程 / 107

第二节 热力学第一定律 / 108

一、功 热量 内能 / 108

二、热力学第一定律 / 108

第三节 典型等值过程中的能量交换 / 109

一、等体过程 / 109

二、等压过程 / 110

三、等温过程 / 111

四、绝热过程 / 111

五、人体的能量交换 / 112

第四节 循环过程 卡诺循环 / 113

一、循环过程和热机效率 / 113

二、卡诺循环及其效率 / 114

第五节 热力学第二定律 / 116

一、热力学第二定律 / 116

二、可逆过程和不可逆过程 / 116

三、热力学第二定律的统计意义 / 117

四、卡诺定理 / 118

第六节 熵 / 118

一、克劳修斯等式 / 118

二、熵的概念 / 119

三、熵增加原理与能量退降 / 120

四、信息熵与遗传 / 122

思考题与习题八 / 124

第九章 静电场 125

第一节 电场强度 / 125

一、电场强度的概念 / 125

二、电场强度的计算 / 126

第二节 高斯定理 / 127

一、电场线和电通量 / 127

二、高斯定理 / 128

三、高斯定理的应用举例 / 129

第三节 电势 / 130

一、静电场的环路定理 / 130

二、电势 / 131

三、电势叠加原理 / 132

四、电场强度与电势的关系 / 132



第四节 电偶极子 电偶层 / 133

一、电偶极子的电场 / 133

二、电偶层 / 134

第五节 静电场中的电介质 / 135

一、电介质的极化 / 135

二、电介质中的静电场 / 137

三、电位移 有电介质时的高斯定理 / 138

四、电容器及其电容 / 139

五、静电场的能量 / 139

第六节 心电知识 / 141

一、心电场 / 141

二、心电图 / 142

三、心电图导联 / 142

思考题与习题九 / 144

第十章 直流电 147

第一节 电流密度 / 147

一、电流强度和电流密度 / 147

二、金属与电解质的导电性 / 148

三、欧姆定律的微分形式 / 149

第二节 基尔霍夫定律 / 150

一、基尔霍夫第一定律 / 150

二、基尔霍夫第二定律 / 150

第三节 电容器的充电和放电 / 152

一、RC 电路的充电过程 / 152

二、RC 电路的放电过程 / 153

第四节 生物膜电位 / 154

一、能斯特方程 / 154

二、静息电位 / 155

三、动作电位 / 156

第五节 电泳 / 156

一、电泳原理 / 157

二、滤纸电泳 / 157

三、毛细管电泳 / 158

思考题与习题十 / 159

第十一章 稳恒磁场 161

第一节 磁场 磁感应强度 / 161

一、磁感应强度 / 161

二、磁通量 磁场中的高斯定理 / 161

第二节 电流的磁场 / 162

一、毕奥-萨伐尔定律 / 162

二、毕奥-萨伐尔定律的应用 / 163



第三节	安培环路定律 / 165
第四节	磁场对电流的作用 / 166
一、	磁场对运动电荷的作用 / 166
二、	磁场对载流导线的作用 / 167
三、	载流线圈所受磁力矩 / 167
四、	霍尔效应 / 168
五、	质谱仪和回旋加速器 / 170
六、	电磁泵和电磁流量计 / 171
七、	磁流体发电 / 172
第五节	磁介质 / 172
一、	介质中的磁场 / 172
二、	磁介质的分类 / 173
三、	超导体及其磁学特性 / 174
第六节	磁场的生物效应 / 176
一、	生物磁现象和生物磁场的测定 / 176
二、	心磁图 脑磁图 肺磁图 / 177
三、	磁场的生物效应 / 179
思考题与习题十一 / 179	

第十二章 电磁感应与电磁波 181

第一节	法拉第电磁感应定律 / 181
一、	法拉第电磁感应定律 / 181
二、	动生电动势 / 182
三、	感生电动势 有旋电场 / 183
第二节	自感和互感 / 184
一、	互感现象 / 184
二、	自感现象 / 185
第三节	磁场的能量 / 186
一、	RL 电路的暂态过程 / 186
二、	磁场的能量 / 188
第四节	麦克斯韦方程组 / 189
一、	位移电流 / 189
二、	麦克斯韦方程组 / 190
第五节	电磁振荡和电磁波 / 191
一、	电磁振荡 / 191
二、	电磁波及电磁波谱 / 192
三、	电磁场对生物体的作用 / 193
第六节	生物电阻抗 / 194
思考题与习题十二 / 195	

第十三章 波动光学 198

第一节	光的干涉 / 198
一、	光的相干性 / 198



二、光程 光程差 / 199	
三、杨氏双缝实验 / 200	
四、劳埃德镜实验 / 201	
五、薄膜干涉 / 202	
六、等厚干涉 / 203	
第二节 光的衍射 / 205	
一、单缝衍射 / 205	
二、圆孔衍射 / 207	
三、光栅衍射 / 207	
第三节 光的偏振 / 208	
一、自然光和偏振光 / 208	
二、马吕斯定律 / 209	
三、布儒斯特定律 / 210	
四、光的双折射 / 211	
五、二向色性和偏振片 / 212	
* 第四节 偏振光的应用 / 213	
一、光弹效应 / 213	
二、克尔效应 / 214	
三、物质的旋光性 / 215	
* 第五节 液晶的光学特性 / 215	
一、液晶的分类和结构 / 216	
二、液晶的双折射现象 / 216	
三、胆甾相液晶的选择反射 / 217	
四、液晶的电光效应 / 217	
五、液晶的光生伏特效应 / 218	
思考题与习题十三 / 218	

第十四章 几何光学 220

第一节 球面折射 / 220	
一、单球面折射 / 220	
二、共轴球面系统 / 222	
第二节 透镜 / 222	
一、薄透镜成像公式 / 223	
二、薄透镜组合 / 224	
三、厚透镜 / 225	
四、柱面透镜 / 226	
五、透镜的像差 / 227	
第三节 眼睛 / 228	
一、眼的光学结构 / 228	
二、眼的调节 / 229	
三、眼的分辨本领及视力 / 229	
四、眼的屈光不正及其矫正 / 230	
第四节 几种医用光学仪器 / 231	



- 一、放大镜 / 231
- 二、光学显微镜 / 232
- 三、纤镜 / 234
- * 四、特殊显微镜 / 235
- 思考题和习题十四 / 239

第十五章 量子力学基础 241

第一节 黑体辐射 / 241

- 一、黑体辐射 / 241
- 二、普朗克能量量子化假设 / 243

第二节 光电效应 / 244

- 一、光电效应 / 244
- 二、爱因斯坦光子假设 / 246

第三节 康普顿效应 / 247

- 一、康普顿效应 / 247
- 二、光子理论对康普顿效应的解释 / 248

第四节 氢原子光谱 玻尔的氢原子理论 / 249

第五节 物质的波动性质 / 252

- 一、德布罗意物质波假设 / 252
- 二、电子衍射 / 253
- 三、不确定关系 / 253

第六节 波函数 薛定谔方程 / 255

- 一、波函数及其统计解释 / 255
- 二、薛定谔方程 / 256
- 三、一维无限深势阱 / 257
- 四、势垒 隧道效应 / 259

第七节 量子力学的原子结构概念 / 261

- 一、四个量子数 / 261
- 二、多电子原子 / 262

第八节 原子光谱与分子光谱 / 264

- 一、原子光谱 / 264
- 二、分子光谱 / 264

思考题与习题十五 / 267



第三节	X射线的基本性质 / 273
一、	X射线的基本性质 / 273
二、	X射线的衍射 / 274
第四节	物质对X射线的衰减规律 / 275
一、	单色X射线的衰减规律 / 275
二、	衰减系数与波长、原子序数的关系 / 276
第五节	X射线的医学应用 / 276
一、	治疗 / 277
二、	诊断 / 277
三、	X-CT / 278
	思考题与习题十六 / 283

第十七章 原子核和放射性 285

第一节	原子核的基本性质 / 285
一、	原子核的组成、质量和大小 / 285
二、	原子核的自旋和磁矩 / 286
三、	原子核的结合能及质量亏损 / 287
四、	原子核的宇称 / 288
第二节	原子核的衰变类型 / 288
一、	α 衰变 / 288
二、	β 衰变 / 289
三、	γ 衰变和内转换 / 290
第三节	原子核的衰变规律 / 291
一、	衰变规律 / 291
二、	半衰期 / 291
三、	放射性活度 / 292
四、	放射性平衡 / 293
第四节	射线与物质的相互作用 / 294
一、	带电粒子与物质的相互作用 / 294
二、	光子与物质的相互作用 / 295
三、	中子与物质的相互作用 / 296
第五节	辐射剂量与防护及测量原理 / 296
一、	辐射剂量及其单位 / 297
二、	辐射防护 / 297
三、	射线的测量原理 / 298
第六节	放射性核素在医学上的应用 / 299
一、	示踪的原理 / 299
二、	放射诊断 / 299
三、	肿瘤放射治疗 / 302
	思考题与习题十七 / 304

第十八章 激光及其医学应用 306

第一节	激光的基本原理 / 306
-----	---------------

一、粒子的能级与辐射跃迁 / 306	
二、粒子数反转分布 / 307	
三、光学谐振腔 / 307	
四、激光器的基本结构 / 309	
第二节 激光的特性 / 310	
一、方向性好 / 310	
二、亮度高、强度大 / 310	
三、单色性好 / 311	
四、相干性好 / 311	
五、偏振性好 / 311	
第三节 激光的医学应用 / 312	
一、激光的生物作用 / 312	
二、激光在基础医学研究中的应用 / 314	
三、激光的临床应用 / 316	
四、医用激光器 / 317	
五、激光的危害与防护 / 317	
思考题与习题十八 / 317	

第十九章 核磁共振 319

第一节 核磁共振的基本概念 / 319	
一、原子核的磁矩 / 320	
二、核磁共振条件和拉莫尔方程 / 321	
三、弛豫过程和弛豫时间 / 323	
第二节 核磁共振谱 / 325	
一、谱线宽度 / 325	
二、化学位移 / 326	
三、自旋-自旋劈裂 / 327	
四、磁共振波谱仪 / 328	
第三节 磁共振成像原理 / 329	
一、磁共振成像的基本方法 / 329	
二、人体的磁共振成像 / 331	
三、如何产生氢核密度 ρ 和 T_1 、 T_2 加权图像 / 332	
四、磁共振成像临床诊断的物理学依据 / 334	
五、磁共振成像系统 / 337	
第四节 磁共振技术在医学中的应用 / 337	
一、分子水平 / 338	
二、细胞水平 / 338	
三、组织水平 / 339	
四、整体水平 / 339	
思考题与习题十九 / 340	

第二十章 生物非线性动力学简介 341

第一节 运动及其相空间描述 / 341	
---------------------	--



一、相空间 / 341	
二、吸引子 / 344	
第二节 混沌运动 / 344	
一、混沌运动行为 / 345	
二、奇怪吸引子 / 347	
第三节 分形与分维 / 347	
一、自相似性 / 348	
二、分数维 / 349	
第四节 生物系统非线性现象 / 350	
一、心脏搏动的电振荡特性 / 350	
二、可兴奋细胞的振荡和混沌 / 350	
三、生物混沌控制 / 352	
思考题与习题二十 / 353	

参考文献	354
------------	-----

中英文对照	356
-------------	-----

附录: 常用物理常数	378
------------------	-----

一、物理学的研究对象

物理学和其他自然科学一样,是以认识物质的基本属性,研究物质运动规律为研究目的的学科。我们周围的所有的客观实在都是物质,一切物质(包括实物和场)都在永恒不息地运动着,宇宙中一切自然现象都是物质运动的表现,这里所指的运动是广义的,它包括机械运动、变化、生长、相互作用等过程。物质运动的形式是极其多样的,各种形式的物质运动之间,相互依存而又本质上相互区别。它们既服从普遍规律,又有自己独特的规律,自然科学的分类就是根据其所研究对象的不同而区分的。

在所有自然科学中,物理学所研究的物质运动形式,具有最基本最普遍的性质。具体地说,物理学所研究的运动包括:机械运动、分子热运动、电磁运动、原子内部运动、场和实物的相互作用等。物理学所研究的运动形式,普遍存在于其他高级的、复杂的物质运动形式之中。因此,物理学所研究的规律,具有最基本、最普遍的意义,使得物理学知识成为研究其他自然科学所不可缺少的基础。在自然科学尚未分类的古代,物理学几乎就是全部自然科学。随着科学的发展,出现了许多自然科学分支,并陆续独立成为一门学科。由于近代科学的迅速发展和相互渗透,出现了许多和物理学直接有关的“边缘学科”,如化学物理学、物理化学、生物物理学、天体物理学、生物物理化学、生物医学工程学等。医学物理学是物理学的重要分支学科,它是现代物理学与医学相结合所形成的交叉学科。物理学上的每一次重大发现都极大地推动了其他自然科学的发展,促进科学技术和生产技术发生根本的变革。由于物理学所研究的规律具有很大的普遍性,它与哲学的关系也十分密切,物理学中许多重大发现,例如,相对论、物质的波粒二象性、基本粒子的相互转化、场和实物间相互作用等,为哲学提供了有力的证据。

二、物理学与生命科学的关系

医学是以人体为研究对象的生命科学,生命现象属于物质的高级运动形式。随着现代物理学的迅速发展,人类对生命现象认识的逐步深入,生命科学和医学已从宏观形态的研究进入微观机制的研究,从细胞水平的研究上升到分子水平的研究,并日益将其理论建立在精确的物理学基础之上。任何生命过程都是和物理过程密切联系的。揭示生命现象的本质,诸如能量的交换、信息的传递、体内控制和调节、疾病发生机制、物理因素对机体的作用等,都必须应用物理学规律。大量事实表明,物理学在生物医学领域中的应用日益广泛和深入。医学物理学的迅速发展,正在对阐明生命现象的本质不断做出新的贡献。

另一方面,物理学所提供的技术和方法已日益广泛应用于生命科学、医学研究及临床医疗实践之中,并且不断更新。例如,光学显微镜、X线透视和照片、放射性核素等在医学上的应用已是人们早已熟知的。而现代电子显微镜与光学显微镜相比,分辨率提高了近千倍,成为研究细胞内部超微结构的重要工具,计算机X线断层摄影术(CT)与通常X线诊断相比,其灵敏度提高了百倍,磁共振成像(MRI)技术既能显示解剖学图像,又能显示反映功能和代谢过程与生化信息的图像,为医学提供了一种崭新的诊断技术。各种光纤内镜取代了刚性导管内镜,提高了疾病的诊断率,减轻了患者的痛苦。物理治疗除常见的热疗、电疗、光疗、放疗、超声治疗等方法外,还应用低温冷冻、微波、激光等手段。电子计算机不仅应用于研究人体生理和病理过程中的各种控制调节,而且用于辅助诊断、自动监护和医院管理。在研究



生物大分子本身的结构、构象、能量状态及其变化,以及这些状态和变化与功能之间的关系方面,除应用了物理学中的量子力学方法外,还普遍应用了物理学中的各种光谱和波谱技术等,如电子自旋共振谱、磁共振谱、激光拉曼谱、圆二色术、旋光色散、红外光谱、荧光偏振、X射线衍射、光散射以及激光全息等物理技术。

物理学在理论上和技术上的新成就不断为生命科学和医学的发展提供理论基础和技术方法。反过来,生命科学和医学的发展,又不断地向物理学提供新的研究课题,二者互相促进、相辅相成。总之,物理学与生命科学的关系可归结为两个方面:①物理学知识是揭示生命现象不可缺少的基础;②物理学所提供的技术和方法为生命科学的研究、临床实践开辟了许多新的途径。

在高等医学院校里开设的医学物理学课是一门重要的必不可少的课程,它的主要任务是给医学生提供系统的物理学知识,使他们在中学物理学的基础上,进一步掌握物理学的基本概念、基本规律、研究方法,扩大物理学知识的领域,为学习现代医学准备必要的物理基础。物理学作为严格的定量的自然科学的带头学科,一直在科学技术发展中发挥极其重要的作用。物理学的发展对人类生产力的提高起到了极大的推动作用,过去是如此,现在是如此,展望未来也是如此。

三、物理学研究方法及其科学思维

大学物理是在比中学物理学高的学术层次上介绍物理学内容和进行物理学实验,因而有可能更好地体现物理学研究方法。而对物理学及其科学思维和研究方法的了解,不仅有助于学生对物理学和其他学科的学习,使其具备高级医学卫生人才所应有的理科素质,而且有助于启迪学生的思维。各门科学包括物理学在内,其基本任务是认识物质属性,研究物质运动规律,其研究方法都是遵循“实践—理论—实践”的认知法则。具体地说,物理学研究方法包括观察、实验、假说和理论各个环节。观察和实验所获得的大量资料是理论的依据。理论是从几条基本原理出发,说明一定范围内的各种物理现象,并且还能在一定程度上预言未知现象的存在,指导进一步的实践。

科学理论具有三个显著的特征:系统化、自我运动的能力和趋向普遍性。理论建立后将继续受到实践的考验,如果发现新的实验事实与理论有矛盾,就将使理论得到修正和发展,甚至推翻原有的理论,建立更能反映客观实际的新理论。

物理学研究方法及其相应的方法原理包括:解释原理、简单性原理、物理世界图像统一原理、数学模型化、守恒原理、对称原理、对应原理、互补原理、可观察性原理以及基元性原理等。物理学知识的高度系统化,运用数学的日益增长程度,对人们世界观影响的深度和它的非常广泛的实际应用——表征物理学的这一切特征使得物理学处于现代科学知识的领先地位。现代物理学是自然科学的主要组成,在现代自然科学知识体系中,物理学继续形成着科学思维的风格,提供科学思维的准则。这就是为什么需要对物理学研究方法及其科学思维予以特别重视的原因。

物理学的研究方法是开发智力和提高能力的途径。物理学思想能启迪学生创新思维,是培养创造型人才的火种。物理学的知识结构体系是科学技术的母体,具有很强的迁移和再生能力。知识的迁移就是智慧,知识的再生就是创造。物理学中的研究方法系统、新颖,创新思想层出不穷。对大学生来说,学好物理学能很好地培养和发展自己的认识结构和创新能力。

(胡新珉)

第一章 力学基本定律

学习要求:

1. 掌握对物体运动状态的描述方法,掌握参照系、位移、速度、加速度、角速度、角加速度的概念。
2. 掌握牛顿运动定律、转动定律。理解惯性系和非惯性系、保守力与非保守力的概念。
3. 理解力、动量、能量、功、转动惯量和角动量等基本概念。
4. 掌握力学中的守恒定律。了解对称性的概念以及与对称性守恒定律的关系。

力学(mechanics)研究的是物体机械运动(mechanical motion)的规律。物体机械运动是指它的位置随时间的改变。力学是学习物理学的基础。

第一节 质点的运动

研究物体运动时如果物体的大小和形状在所研究的问题中可以忽略,就把它抽象为一个质量与它相同的点,称为质点(particle)。

一、位移 运动方程

质点在一段时间内位置的改变叫它在这段时间的位移(displacement)。如图 1-1 所示,设质点在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻分别通过 P 和 P_1 点,其位置矢量,简称位矢(position vector)为 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$,则由 P 引到 P_1 的矢量表示位矢的增量,即 $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ 。这一位矢的增量就是质点在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的位移。

应该注意的是,位移 $\Delta\mathbf{r}$ 是矢量,既有大小又有方向。其大小用 $\Delta\mathbf{r}$ 矢量的长度表示,记作 $|\Delta\mathbf{r}|$ 。这一数量不能简写为 Δr ,因为 $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$,它是位矢的大小在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间的增量。 $|\Delta\mathbf{r}|$ 一般不等于 Δr 。

从运动学的角度看,质点的运动就是它的位置随时间的变化,也就是它的位矢是随时间改变的。这一改变可以用下述函数形式来表示,即

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t) \quad (1-1)$$

式(1-1)是质点运动方程的矢量表示式。若位矢 \mathbf{r} 在直角坐标系中的三个分量分别是 $x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}$, 则有

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \quad (1-2)$$

作为时间函数的三个坐标值可以表示为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (1-3)$$

这样的一组函数叫做质点的运动函数或运动方程的标量表示式,也可看做是质点沿各坐标轴的分运动的表示式。质点的实际运动是各分运动的矢量合成,即运动的叠加原理。

二、速度 加速度

位移 $\Delta\mathbf{r}$ 和发生这段位移所经历的时间的比叫做质点在这一段时间内的平均速度(mean velocity) $\bar{\mathbf{v}}$ 。

$$\bar{\mathbf{v}}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-4)$$

平均速度是矢量,它的方向就是位移的方向,如图 1-1。当 Δt 趋于零时,式(1-4)的极



限,叫做质点在时刻 t 的瞬时速度 (instantaneous velocity),简称速度 (velocity) \mathbf{v} 。

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-5)$$

质点在时刻 t 的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。

速度的大小叫速率 (speed),以 v 表示

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

用 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程。

当 Δt 趋于零时, $|\Delta \mathbf{r}|$ 和 Δs 趋于相同。因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-6)$$

即速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

在直角坐标系中,速度的分量表示式如下

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (1-7)$$

应该注意,速度与速率不同。速度是位移的时间变化率,速率是路程的时间变化率。速度是矢量,速率是标量。

质点的运动速度变化的情况用加速度 (acceleration) 表示。以 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在时刻 t 和时刻 $t+\Delta t$ 的速度,则在这段时间内的平均加速度 $\bar{\mathbf{a}}$ 由下式定义

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-8)$$

平均加速度的极限,称为质点在时刻 t 的瞬时加速度,简称加速度,以 \mathbf{a} 表示加速度,就有

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1-9)$$

应该明确的是,加速度是矢量。由于它是速度对时间的变化率,因此不管是速度的大小发生变化,还是速度的方向发生变化,都有加速度。利用式(1-5),还可得

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-10)$$

在直角坐标系中,加速度的分量表示式如下

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-11)$$

很明显,如果加速度 \mathbf{a} 的方向和速度 \mathbf{v} 的方向一致,则结果只能引起速度 \mathbf{v} 的量值发生变化而不会改变它的方向,质点将做直线运动。只有加速度 \mathbf{a} 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向不一致时,质点才做曲线运动。另一方面如果加速度 \mathbf{a} 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向垂直,则结果只会改变速度的方向而不改变它的量值。故可以把曲线运动在任何时刻的加速度 \mathbf{a} 分解为沿速度 \mathbf{v} 方向的切向加速度 (tangential acceleration) a_t 和垂直于速度 \mathbf{v} 方向的法向加速度 (normal acceleration) a_n 。切向加速度的作用是改变速度的量值,而法向加速度的作用是改变速度的方向。

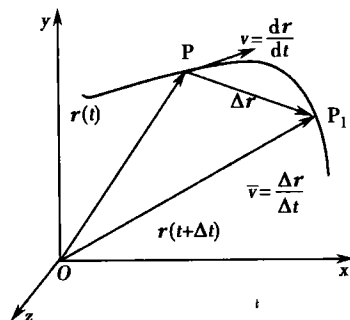


图 1-1 位移与速度

第二节 牛顿运动规律

一、牛顿运动定律

质点运动学 (kinematics) 只涉及了运动的描述,并未研究质点为什么做这样或那样的运



动。研究物体为什么做这样或那样的运动的内容是力学的动力学(dynamics)部分。牛顿(Newton)在《自然哲学的数学原理》一书中提出了三条定律作为动力学的基础,这三条定律统称为牛顿运动定律。以牛顿运动定律为基础建立起来的力学理论叫做牛顿力学。

牛顿第一定律(Newton's first law):物体如果不受外力的作用,它将保持原有的静止状态或做匀速直线运动。牛顿第一定律也叫惯性(inertia)定律。

牛顿第二定律(Newton's second law):作用在物体上的合外力 F 等于物体动量的时间变化率

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (1-12)$$

式中 p 是物体的动量(momentum) mv 。动量是个矢量。如果物体的质量不变,式(1-12)可以写成

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (1-13)$$

牛顿第三定律(Newton's third law):力总是成对出现的。如果物体 A 以力 F_A 作用在物体 B 上,则物体 B 也必然同时以一个等大反向的力 F_B 作用在物体 A 上,即 $F_A = -F_B$ 。

牛顿运动定律引入了力、惯性、质量和动量的概念。力是一个物体对另一个物体的作用,这种作用使得物体的运动状态发生变化。物体在不受外力影响时保持原有运动状态的性质称为惯性,而惯性的大小则是以物体的质量来衡量的。质量大的物体惯性也大,它的速度不容易改变。动量是质量与速度的乘积,它是表征物体运动状态的物理量。牛顿运动定律把上述这些概念和运动学的基本概念联系起来了。

二、力学单位的国际单位制和量纲

应用牛顿定律进行数量计算时,各物理量的单位必须“配套”。相互配套的一组单位称为“单位制”。目前国内外通用的单位制叫国际单位制,即 SI。

在确定各物理量的单位时,总是根据它们之间的相互联系选定少数几个物理量作为基本量,并规定它们的单位,也叫基本单位。其他的物理量都可以根据一定的关系从基本量导出,这些物理量叫导出量。导出量的单位都是基本单位的组合,叫导出单位。由于基本单位的选择不同,就组成了不同的单位制。SI 的力学基本单位是秒(s)、米(m)和千克(kg)。

以 T、L 和 M 分别表示时间、长度和质量基本量。如果单考虑某一导出量是如何由这些基本量组成的,则一个导出量可以用 T、L 和 M 的幂次组合表示出来。表示一个物理量如何由基本量组合的式子,称为物理量的量纲(dimension)。如速度、加速度、力、动量等的量纲分别为 $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$, $[p] = MLT^{-1}$ 。对于不同的单位制,如果基本量的选择不同,则同一物理量的量纲也不同。量纲可用来校核等式,量纲也可以定出同一物理量不同单位之间的换算关系。

三、惯性系和非惯性系

对于不同的参照系(reference frame),同一物体的运动形式可以不同,即运动的描述是相对的。尽管如此,相对于任意参照系,运动的描述都是有意义的。因而如果问题只涉及运动的描述,那时完全可以根据研究问题的方便任意选择参照系。但是,如果问题涉及运动和力的关系,即要应用牛顿定律时,是否也可以任意选择参照系呢?

站台上停着一辆小车,相对于地面参照系进行分析,小车停着,加速度为零。这是因为作用在它上的力相互平衡,即合力为零的缘故,是符合牛顿定律的。如果从加速启动的列车车厢内观察这辆小车,即相对于作加速运动的车厢参照系来分析小车的运动,将发现小车向



车尾方向作加速运动。它受力的方向并无改变,合力仍然是零。合力为零而有了加速度,这是违背牛顿定律的。也就是说相对于作加速运动的车厢参照系,牛顿定律是不成立的。

因此就可以得到这样的结论,对有些参照系牛顿定律成立,对另一些参照系牛顿定律不成立。实际上,牛顿定律只有在惯性参照系中才成立。惯性参照系就是用牛顿第一定律定义的参照系,在此参照系中,一个不受力作用的物体将保持静止或做匀速直线运动。

惯性系(inertial frame)有一个重要的性质,即如果我们确认了某一参照系为惯性系,则相对于此参照系做匀速直线运动的任何其他参照系一定是惯性系。反过来也可以说,相对于一个已知惯性系做加速运动的参照系,一定不是惯性参照系,或者说是一个非惯性系。

具体判断一个实际的参照系是不是惯性系,只能根据实验观察。太阳参照系,即原点固定在太阳中心而各坐标轴指向固定方向(以恒星为基准)的参照系是个很好的惯性系。地心参照系是原点固定在地球中心而坐标轴指向空间固定方向(以恒星为基准)的参照系,地心参照系可以近似地当惯性系看待。地面参照系是坐标轴固定在地面上的参照系。由于地球围绕自己的轴相对于地心参照系不断地自转,所以地面参照系不是惯性系。但由于地面上各处相对于地心参照系的法向加速度最大不超过 $3.40 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (在赤道上),所以地面参照系也可以近似地当惯性系看待。在一般工程技术问题中,相对于地面参照系描述物体的运动和应用牛顿定律,得出的结论也足够准确地符合实际,就是因为这个缘故。

前面提到的加速运动的车厢,由于它相对于地面参照系有明显的加速度,所以不能再当惯性系看待,对它就不能直接运用牛顿定律。

在实际问题中常常需要在非惯性系中观察和处理物体的运动现象。在这种参照系中,牛顿定律是不成立的。但是为了方便起见,我们也常常形式地利用牛顿第二定律分析问题,为此引入惯性力(inertial force)。

以加速平动参照系为例。设有一质点,质量为 m , 相对于某一惯性系 S , 它在实际的外力 F 作用下产生加速度 a 。设想另一参照系 S' , 相对于惯性系 S 以加速度 a_0 平动。在 S' 参照系中,质点的加速度是 a' 。由运动的相对性可知 $a = a' + a_0$ 。根据牛顿第二定律得

$$F = m(a' + a_0) = ma' + ma_0$$

即

$$F + (-ma_0) = ma' \quad (1-14)$$

此式说明,质点受的合外力 F 并不等于 ma' , 因此牛顿定律在参照系 S' 中不成立。但是如果在 S' 中观察时,除了实际的外力 F 外,质点还受到一个大小和方向由 $(-ma_0)$ 表示的力,并将此力也计入合力之内,则式(1-14)就可以形式上理解为:在 S' 系内观测,质点所受的合外力也等于它的质量与加速度的乘积。因而,也就可以在形式上应用牛顿第二定律了。

为了在非惯性系中形式地应用牛顿第二定律而必须引入的力叫做惯性力。由式(1-14)可知,在加速平动参照系中,它的大小等于质点的质量和此非惯性系相对于惯性系的加速度的乘积,而方向与此加速度的方向相反。以 F_0 表示惯性力,则有 $F_0 = -ma_0$ 。

引进了惯性力,在非惯性系中牛顿第二定律的形式为 $F + F_0 = ma'$ 。其中 F 是实际存在的各种力,它们是物体之间的相互作用的表现,其本质都可以归结为四种基本的自然力。惯性力 F_0 只是参照系非惯性运动的表现,或者说是物体的惯性在非惯性系中的表现。它不是物体间的相互作用,也没有反作用力。因此惯性力又称做虚拟力。

绕一个相对于惯性系固定的轴作转动的盘也是一个非惯性系。在这样一个非惯性系中应用牛顿第二定律也需要引入一个虚设的惯性力。图 1-2 是绕固定轴匀速转动的盘,盘上的一根细绳的两端分别连着固定轴和质点 m 。若以盘

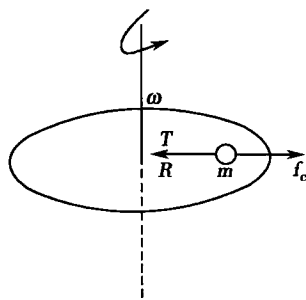


图 1-2 惯性离心力



作为参照系观测,小球虽受到细绳的拉力 T 的作用,却静止不动,不符合牛顿第二定律。为了保持牛顿第二定律的形式,假想小球受到一个与力 T 相平衡的惯性力 f_c ,它的大小为

$$f_c = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

这个惯性力称为惯性离心力,简称离心力。

利用离心力的概念,可制成快速分离悬浮液中不同密度微粒的机械——离心机。使装有试样(血液、尿等)的离心管在水平面上绕轴快速旋转,试样中的微粒受到离心力的作用向管底转移。由于密度大的微粒受到的离心力大,因此经过一段时间以后,管中的微粒将按密度的大小分离,密度最大的位于管底,最小的靠近管口。如果离心机转速高,则向心加速度的值可以比重力加速度值 g 大许多倍,于是可大大加快分离的速度。近代超速离心机的转速可达 $60\,000\text{r} \cdot (\text{min})^{-1}$ 。若以 $R=10\text{cm}$ 计算,则向心加速度约为重力加速度的 40 万倍,即 $4 \times 10^5 g$ 。这样的高速离心机可分离线度小于几个微米的病毒和蛋白质分子。

第三节 功和能 能量守恒定律

一、功

功(work)是描述力在物体移动过程中的空间效果,定义为力在位移方向上的分量与位移的乘积。以 dA 表示功,则

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot d\mathbf{r} \cdot \cos\varphi \quad (1-15)$$

功是标量,功的量纲是 ML^2T^{-2} ,单位焦耳(J)。功没有方向,但有正负。当 $\varphi > \pi/2$ 时, $dA < 0$,即在这个过程中力做负功,也就是物体克服这力做了功。

如果物体沿曲线从 A 运动到 B ,力 \mathbf{F} 对它做的功 A_{AB} 就是

$$A_{AB} = \int_A^B dA = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-16)$$

单位时间内完成的功叫做功率(power),功率的单位叫瓦特(W)。

二、动能 势能

能(energy)是指一个物体或物体系统所具有的做功本领。能是一个因做功而发生改变的量,其量值变化可以作为功的量度。物体能量的大小与它的状态有关,也就是说能量是物体状态的函数。

1. 动能 质量为 m 的物体,在力的作用下沿曲线由 A 至 B 。力的空间累积,即力对物体做的功就是

$$\begin{aligned} A_{AB} &= \int_A^B dA = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F \cos\varphi dr = \int_A^B m \frac{dv}{dt} \cdot v dt \\ &= m \int_{v_A}^{v_B} v \cdot dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned} \quad (1-17)$$

式(1-17)表明,外力所做的功,在量值上等于 $\frac{1}{2} m v^2$ 这个量的改变。这个量是由各时刻物体的运动状态决定的,是一个表示能量的物理量,定义为物体的动能(kinetic energy)。以 E_k 表示物体的动能,则

$$A_{AB} = E_{kB} - E_{kA} \quad (1-18)$$

该式表示,外力对物体所做的功,等于物体动能的增量。这一结论称为动能定理。这里, A_{AB} 包括了所有外力对物体做的功。对于由两个以上物体组成的系统,动能定理可以表述为:所



有外力和所有内力对物体系所做的功之和等于物体系总动能的增量。

2. 势能 如果力对物体所做的功与物体运动的路径无关,仅由运动物体的始末位置所决定。这样的力叫保守力。保守力也可以表述为:一物体沿闭合回路移动一周时,保守力做的功为零。如图 1-3,以 M 所在的位置为原点, m 从 A 点沿 L 到 B 点,然后再沿 L' 到 A 点,力 F 所做的功为

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-19)\end{aligned}$$

由于力 F 所做的功与路径无关,即 $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L'}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,故

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1-20)$$

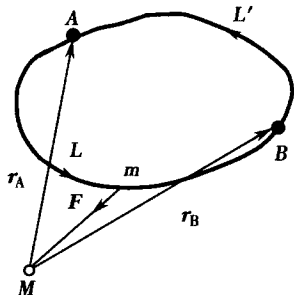


图 1-3 保守力的功

保守力做的功与路径无关,而只决定于物体的始末位置,所以对于一个系统,就存在一个由它们的相对位置决定的状态函数。这个由相对位置决定的函数叫系统的势能(potential energy)函数。以 E_p 表示物体的势能。若以 E_{pA} 和 E_{pB} 分别表示物体在 A 处和 B 处时系统的势能,则保守力做的功 W_{AB} 为

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p \quad (1-21)$$

即保守力做的功等于系统势能的减小。重力就是一个保守力,重力势能(gravitational potential energy)与物体的高度有关,大小为 mgh 。

三、功能原理 时间平移对称性与能量守恒定律

1. 功能原理 系统的内力可分为保守内力和非保守内力。因此,系统内力所做的功就等于保守内力做的功与非保守内力做的功之和。按照物体系动能定理,所有外力和所有内力对物体系所做的功之和等于物体系总动能的增量。而内力中又有保守内力和非保守内力。于是

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_{kB} - E_{kA}$$

由于保守内力做的功等于系统势能的减小,故上式可写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_{kB} + E_{pB}) - (E_{kA} + E_{pA})$$

系统的动能和势能之和叫系统的机械能(mechanical energy),即机械能 $E = E_k + E_p$,所以上式又可写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_B - E_A \quad (1-22)$$

式(1-22)表明,从初态变化到末态时,系统机械能的增量等于非保守力(外力和非保守内力)做功的总和,这就是系统的功能原理,它在惯性系中成立。

一个只受保守力作用的系统,即 $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$,式(1-22)可变为

$$E_B = E_A = c \quad (1-23)$$

这就是说,在只有保守力做功的情况下,物体系的机械能保持不变。这就是机械能守恒定律(law of conservation of mechanical energy)。

2. 时间平移对称性与能量守恒定律 物理学中,对称性(symmetry)的研究方法,是从很简单的不可观测量假设出发,寻找出某种对称性及其普遍结论。如果进行一次变动或操作后事物完全复原,则称该事物对所经历的变动或操作具有对称性,而该操作就叫对称操作(symmetry operation)。

对称性在日常生活中是常见的。球体是中心对称的,圆柱体是轴对称的,平面镜成像是面对称的,正负电子对是共轭对称的,等。基本的对称性有镜像对称、平移对称、旋转对称和



物理定律的对称性等。常见的对称操作是时空操作。空间操作有平移、转动、镜像反射、空间反演、标度变换等。时间操作有时间平移、时间反演等。

物理定律的对称性是指经过某种操作后,物理定律的形式保持不变。因此,物理定律的对称性又叫不变性。关于物理定律的对称性有一条很重要的定律:对应于每一种对称性都有一种对称性守恒定律。

在惯性系中绝对时间是不可观测的,物体运动的时间只能相对的测量,即时间的流逝是均匀的,不同时刻在物理上是等价的,时间具有平移对称性。设封闭系统 t 时刻的能量是 $E(t)$,对时间进行微小平移变换 $t' = t + dt$ 后 t' 时刻的能量是 $E(t') = E(t + dt)$ 。将 $E(t + dt)$ 展开成泰勒级数可得

$$E(t + dt) = E(t) + \frac{\partial E(t)}{\partial t} dt + \dots$$

因 dt 微小,故上式可近似地表示为

$$E(t + dt) = E(t) + \frac{\partial E(t)}{\partial t} dt$$

由于系统的能量不随时间变化,即有 $\frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0$, 所以

$$E(t + dt) = E(t) \quad (1-24)$$

这样,利用时间平移对称性就可以证明机械能守恒定律,即在只有保守力做功的封闭系统内,物体系统的总能量保持不变。如果时间平移量是一个比较大的量 Δt , 可以将 Δt 看成是很多个微小量 dt 之和,用上述方法进行若干次变换,同样可以得到式(1-24)的结果。

第四节 动量 动量守恒定律

一、冲量与动量

当物体受到力的作用时,它的速度要发生变化。因而它的动量也要发生变化。动量变化的大小与力的大小及作用时间的长短有关。为此可以把牛顿第二定律写成微分形式

$$F dt = dp \quad (1-25)$$

$F dt$ 就表示力在时间 dt 内的累积量,称为在 dt 时间内物体所受合外力的冲量(impulse),以 I 表示。在时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 范围内冲量 I 为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 \quad (1-26)$$

即物体在 Δt 时间内动量的改变等于物体在同一时间内所受合外力的冲量,这一结论称为动量定理(theorem of momentum)。

动量定理对碰撞和打击过程的分析特别有用。在这类过程中,力的作用时间很短,而力的量值却很大。这种冲力是很难测量出来的,但是只要知道碰撞前后物体的动量变化,就能算出力的冲量。如果进一步知道冲力的作用时间,冲力的平均值就能求出来。通常引入平均冲力 \bar{F}

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

利用动量定理可以分析人体从高处坠地时怎样延长碰撞时间,减少冲力。人体由于碰撞所造成的伤亡事故是不少见的,高处坠地是其中的一种。坠地时人体所受的冲力和碰撞经历的时间长短有关。落在水、沙、松软的土地上以及双脚着地时弯曲双膝,都可以延长碰撞时间,减少冲力,减少人体由于碰撞所造成的危害。



二、空间平移对称性与动量守恒定律

一个由许多物体组成的系统内部各个物体之间的相互作用,可以引起系统内各个物体的能量发生变化,我们把这些相互作用称为内力。

系统外物体的力也可以影响系统内部的动量,为了把它们和内力分开,把系统外物体的力称为外力。如图 1-4 所示,讨论质量分别为 m_1 和 m_2 两个物体组成的物体系统,二者除受相互作用力(内力) f, f' 外,还受到系统外其他物体的作用力(外力) F, F' 。分别对两物体写出牛顿第二定律

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad \mathbf{F}' + \mathbf{f}' = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

将两式相加,并利用牛顿第三定律 $\mathbf{f} = -\mathbf{f}'$, 则

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

对于由许多物体组成的系统,由于系统内所有内力的矢量和为零,所以

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \quad (1-27)$$

上式表明,系统的总动量随时间的变化率等于该系统所受的合外力。

当系统所受的合外力为零时,系统的总动量保持不变。即当 $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ 时, $\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = 0$ 。故

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \text{常量} \quad (1-28)$$

式(1-28)就是物体系的动量守恒定律(law of conservation of momentum),它揭示了通过物体之间的相互作用,物体机械运动发生转移的规律。当系统不受外力作用时,系统内各物体的动量可以发生变化,但这种变化只能是动量在系统内各个物体间传递,而系统的总动量保持不变。

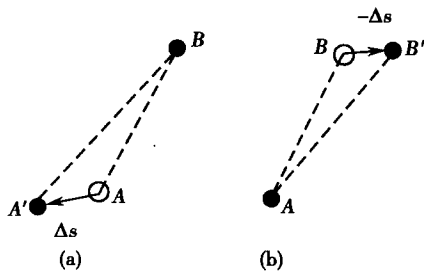


图 1-5 空间平移对称性

在图 1-5 中,物体 B 不动,物体 A 从 A 沿 Δs 移到 A' ,位置改变造成的势能变化为 $\Delta U = -\mathbf{F}_{AB} \cdot \Delta s$;若物体 A 不动,将物体 B 沿 $-\Delta s$ 方向移动到 B' ,则势能改变为 $\Delta U' = -\mathbf{F}_{AB'}(\Delta s)$ 。两种变化的区别仅在于物体 A 和 B 组成的系统整体在空间有个平移,但其相对位置是一样的,即 $\overline{A'B} = \overline{AB'}$ 。空间

平移对称性意味着物体之间的相互作用势能只与它们的相对位置有关,与它们整体在空间的平移无关。因此,以上两种情况终态的势能相等,即

$$\begin{aligned} U + \Delta U &= U + \Delta U' \\ \Delta U &= \Delta U' \\ -\mathbf{F}_{BA} \cdot \Delta s &= \mathbf{F}_{AB} \cdot \Delta s \\ -\mathbf{F}_{BA} &= \mathbf{F}_{AB} \\ \mathbf{F}_{BA} &= \frac{d\mathbf{p}_A}{dt}, \quad \mathbf{F}_{AB} = \frac{d\mathbf{p}_B}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_B}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0 \end{aligned}$$

故

即

所以

而

因此



即在不受外力作用的情况下,系统的总动量是不变的,这就是动量守恒定律。

利用动量守恒定律解决问题时,若系统所受合外力不为零,但合外力在某一方向的分量为零,则总动量在该方向上的分量是守恒的。在某些情况下,物体系统内部的相互作用力比所受外力大得多,即外力对总动量的变化影响很小,诸如爆炸、碰撞等过程,就可以近似利用动量守恒定律解决。同时需要指出的是动量守恒定律只与始末状态的动量有关,只要系统不受外力作用,就不必过问运动过程的细节而利用动量守恒定律求解力学问题。

三、碰撞

碰撞(collision)是指两个物体在运动中相互靠近或发生接触时,在相对较短的时间内发生强烈相互作用的过程。碰撞这一名词的含义比较广泛,除了包含球的撞击、打桩、锻铁以及分子、原子或原子核的互撞等现象以外,还应包含例如人从车上跳下、子弹打入墙壁等现象。

碰撞会使两个物体或其中一个物体的运动状态发生明显的变化。碰撞过程一般都非常复杂,难于对过程进行仔细分析。但由于我们通常只需要了解物体在碰撞前后运动状态的变化,而对发生碰撞的物体系统来说,外力的作用又往往可以忽略,因而我们就可以利用动量、角动量以及能量守恒定律对有关问题求解。

如果两球碰撞前的速度在两球的中心连线上,那么,碰撞时相互作用的冲力和碰撞后的速度也都在这一连线上。这种碰撞称为对心碰撞(或称正碰撞)。设已知两球碰撞前的速度分别为 v_{10} 、 v_{20} ,碰撞后的速度分别为 v_1 和 v_2 ,质量分别为 m_1 和 m_2 。应用动量守恒定律得:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

具体计算时,要把上式改写成标量式:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1-29)$$

上式中,假定碰撞前后各个速度都是向同一方向的(例如向右)。如果计算结果所得到的速度是负值,这就表示运动的速度与假定的方向正相反。

要从两球碰撞前的速度 v_{10} 和 v_{20} (设为已知),求出两球碰撞后的速度 v_1 和 v_2 ,还需第二个方程,这一方程决定于两球的弹性。如果在碰撞后,两物体的动能完全没有损失,我们就称这种碰撞为弹性碰撞(elastic collision),弹性碰撞是理想的极限情形。在一般情况下,两物体碰撞时,总要损失一部分动能(转变为其他形式的能量,例如放出热量等),这时就称为非弹性碰撞。如果两物体在碰撞后,以同一速度运动,并不分开,称为完全非弹性碰撞(perfect inelastic collision)。

在一般情况下,即非弹性碰撞中,两球相碰变形而不能完全恢复原状,一部分机械能将转变为其他形式的能量,机械能守恒定律不能适用。牛顿总结实验结果提出碰撞定律:碰撞后两球的分离速度($v_2 - v_1$),与碰撞前两球的接近速度($v_{10} - v_{20}$)成正比,比值由两球的质料决定,即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (1-30)$$

通常称 e 为恢复系数(coefficient of restitution)。由上式可见,如果 $e=0$,则 $v_2 = v_1$,代入式(1-29)可得

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

这就是完全非弹性碰撞的情况。如果 $e=1$,则分离速度等于接近速度,可以证明,这时两球碰撞前后的总动能不变,这就是所谓弹性碰撞的情形。对于一般的碰撞, $0 < e < 1$, e 值可用实验方法测定。



$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \quad (1-31)$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{(1+e)m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \quad (1-32)$$

利用式(1-31)和式(1-32)两式,可以求出在非弹性碰撞中损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2 \quad (1-33)$$

由式(1-33)可知,如果 $e=1$,则 $\Delta E=0$,这时无机械能损失,亦即弹性碰撞。

第五节 刚体的转动

刚体(rigid body)是固体的理想化模型,如果一个物体在任何力的作用下,它不改变形状和大小,就可以把它当做刚体处理。转动是指物体上的各个质点都绕同一转轴做圆周运动。在这一节中,我们将对刚体的转动做一初步介绍。

一、刚体的定轴转动

刚体可以看成由许多质点组成,每一个质点叫做刚体的一个质元,刚体这个质点系的特点是在外力作用下各质元之间的相对位置保持不变。既然是个质点系,所以以前学过的

关于质点系的基本定律就都可以应用。当然,由于刚体这一质点系有其特点,所以这些基本定律就表现为更适合于研究刚体运动的特殊形式。

1. 刚体的运动 刚体的运动可以是平动、转动或二者的结合。如果刚体在运动中,连接体内两点的直线在空间的指向总保持平行,这样的运动就叫平动。在平动时,刚体内各质元的运动轨迹都一样,而且在同一时刻的速度和加速度都相等。因此在描述刚体的平动时,就可以用一点的运动来代表。通常就用刚体质心的运动来代表整个刚体的平动。

转动的最简单情况是定轴转动(fixed-axis rotation)。在这种运动中各质元均做圆周运动,而且各圆的圆心都在一条固定不动的直线上,这条直线叫转轴。转动(rotation)是刚体的基本运动形式之一。刚体的一般运动都可以认为是平动和绕某一转轴转动的结合。

刚体绕某一固定转轴转动时,各质元的线速度、加速度一般是不同的。但由于各质元的相对位置保持不变,所以描述各质元运动的角量,如角位移、角速度和角加速度都是一样的。因此描述刚体整体的运动时,用角量最为方便。以 $d\theta$ 表示刚体在 dt 时间内转过的角位移,则刚体的角速度(angular velocity)为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-34)$$



它在从 0 到 t 时刻这一段时间内的角位移,仿照匀加速直线运动公式的推导可得匀加速转动的相应公式

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\alpha\theta\end{aligned}\quad (1-38)$$

2. 定轴转动的动能 转动的物体具有动能,其值等于组成物体的各个质点的动能的总和,即

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2\end{aligned}\quad (1-39)$$

3. 定轴转动的转动惯量 若定义(此式也适用于质点系的定轴转动)

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (1-40)$$

则式(1-39)变为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (1-41)$$

将其与质点动能公式 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 类比, $\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$ 的作用与质量 m 相当, J 是一个衡量转动惯性的量, J 越大,要使物体获得一定角速度所需的能量越多,我们把 J 称为刚体对定轴的转动惯量(rotational inertia),它决定于刚体的质量、形状、质量分布和转轴位置。转动惯量是刚体转动惯性的量度,转动惯量越大,刚体的转动惯性就越大。如果刚体的质量是连续分布的,则刚体的转动惯量为

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dv \quad (1-42)$$

式中 dv 表示 dm 的体积元, ρ 表示该处的密度, r 为体积元与转轴的距离。在 SI 制中, J 的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

二、转动定律

一个具有固定轴的静止刚体,在外力作用下是否会绕轴转动,不但与力的大小有关,而且与力的作用点及作用力的方向有关。因此在研究转动问题时需要引入力矩这一概念。力的大小与力臂(即力的作用线和转轴之间的垂直距离)的乘积称为此力对转轴的力矩,单位取 $\text{N} \cdot \text{m}$ 。力矩为矢量,它的方向由右手螺旋定则来规定,即由矢径沿小于 180° 角向力的方向旋转,螺旋前进的方向即代表力矩的方向。

在图 1-6 中,刚体在力 F 的作用下绕垂直于纸面的 O 轴转动。当转动一小角 $d\theta$ 时,力所做的功等于力的作用点的位移 $r d\theta$ 乘以力在位移方向上分量 $F \cos \varphi$ 。即

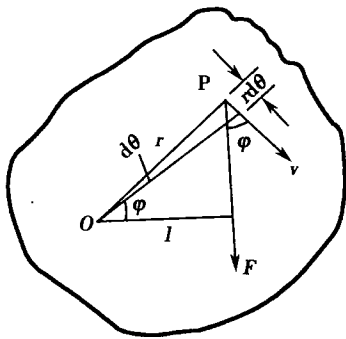


图 1-6 转动定律的推导



$$dA = F \cos \varphi \cdot r d\theta = Fr \cos \varphi d\theta = Fl d\theta$$

式中 Fl 即力矩 M , 故可写成

$$dA = Md\theta$$

做功将引起刚体动能的增加, 则

$$Md\theta = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right)$$

若 J 在转动过程中不变, 则

$$Md\theta = J\omega d\omega$$

而 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 所以

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J\alpha \quad (1-43)$$

上式指出, 转动物体的角加速度与作用的力矩成正比, 与物体的转动惯量成反比。该定律称为转动定律, 相当于质点运动的牛顿第二定律。

三、角动量 空间旋转对称性与角动量守恒定律

1. 角动量 质点对 O 点的角动量 (angular momentum) 是这样定义的: r 是从 O 点指向质点所在位置的位矢, mv 是质点动量, φ 是 r 与 mv 的夹角, 则运动质点对 O 点的角动量

$$L = r \times mv \quad (1-44)$$

角动量是矢量。其大小是动量 mv 与动量臂 $d = r \sin \varphi$ 的乘积, 即 $L = dmv = rmv \sin \varphi$, 其方向用右手螺旋法则确定: 四指从 r 方向沿小于 π 的方向旋转到 mv 方向时, 与之垂直的拇指指向就是 L 的方向。 L 垂直于 r 和 mv 决定的平面。单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。质点系对某点的角动量是所有运动质点对该点角动量的矢量和。即

$$L = \sum (r_i \times m_i v_i) \quad (1-45)$$

如果质点系统绕定轴转动, 所有质点以轴为中心做圆周运动, 有相同的角速度 ω , 轴线到质点的位矢 r_i 与质点的动量 $m_i v_i$ 垂直, 且 $v_i = r_i \omega$, 故

$$L = (\sum m_i r_i^2) \omega \quad (1-46)$$

在刚体中任取一质元 Δm_i , 它相对于转轴的角动量的量值是 $r_i \Delta m_i v_i = r_i \Delta m_i r_i \omega = \Delta m_i r_i^2 \omega$, 因此整个刚体对定轴的角动量是:

$$L = (\sum \Delta m_i r_i^2) \omega = J\omega \quad (1-47)$$

2. 空间旋转对称性与角动量守恒定律 以两个质点组成的封闭系统为例, 由空间旋转对称性导出角动量守恒定律。

两个质点 m_1, m_2 组成的封闭系统可以使用势能定理。质点 m_1, m_2 之间的引力势能可以用二者对坐标原点 O 的连线的张角 φ 表示

$$E_p = E_p(\varphi)$$

如图 1-7 所示, 为简单起见, 设质点 m_1, m_2 位于以 O 点为圆心, R 为半径的圆周上。将两个质点 m_1, m_2 在圆周的轨道上沿同一方向旋转 $d\varphi$ 的角度, 设势能的变化为 dE_p 。由势能定理得

$$-dE_p = dA = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \cdot d\varphi$$

式中 \mathbf{M}_1 是质点 m_2 对质点 m_1 的作用力 f_1 对 O 点的力矩, \mathbf{M}_2 是质点 m_1 对质点 m_2 的作用力 f_2 对 O 点的力矩。因空间具有旋转对称性, 旋转后 m_1, m_2

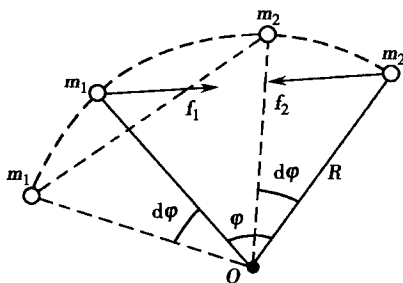


图 1-7 角动量守恒定律



的连线对 O 点的张角仍为 φ , 两质点间的相对位置也不会改变, 因而有 $dE_p = 0$ 。由此可得

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$$

两质点间相互作用力对同一点的力矩的矢量和为零。

$$\text{由于 } \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \text{ 故 } \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = 0$$

即

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \text{恒矢量} \quad (1-48)$$

由 N 个质点组成的封闭系统, 其内可能有相互作用的非保守力。但由于非保守内力也是成对出现的且大小相等方向相反, 对同一点的每一对内力矩也是大小相等方向相反。将整个体系沿某一方向旋转一个微小角度 $d\varphi$, 由于系统内各质点间没有相对角位移, 非保守内力矩做的总功为零, 仍然可以使用势能定理。这样就不难证明 N 个质点组成的封闭系统对同一点的角动量是守恒的:

$$\Sigma \mathbf{L}_i = \text{恒矢量} \quad (1-49)$$

式(1-48)和式(1-49)说明, 封闭系统的角动量是守恒的。封闭系统中的内力矩不会改变系统的总角动量, 这一结论称为角动量守恒定律(law of conservation of angular momentum)。

四、旋进

大家对陀螺的游戏是比较熟悉的, 当玩具陀螺不转动时, 由于受到重力矩的作用, 会倾倒下来。但当陀螺急速旋转时, 尽管同样受到重力矩的作用, 却不会倒下来, 这时陀螺在绕自身对称轴转动的同时, 对称轴还将绕竖直轴 O_z 转动, 如图 1-8 所示。

陀螺以角速度 ω 绕自身对称轴高速转动的现象, 叫自旋, 自旋角动量 $\mathbf{L} = J\omega$ 。在重力矩作用下, 自转轴以角速度 Ω 绕竖直轴转动的现象叫进动。作近似处理(认为所有角动量都沿自转轴方向, 陀螺自转角速度越高, 这种近似就越精确)由 $\mathbf{M}dt = d\mathbf{L}$, 可求得进动角速度 Ω :

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{J\omega} \quad (1-50)$$

式(1-50)表明, 进动角速度 Ω 与 θ 无关, 而与自旋角动量成反比。

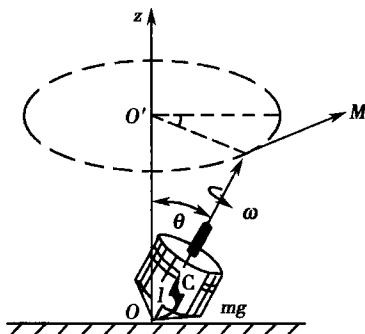


图 1-8 陀螺旋进现象

第六节 超重和失重

人体在漫长的进化过程中, 已经适应了周围的物理环境, 例如地球表面的温度、电磁场、重力场等。地球表面的重力场强度大约在 $9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。人体中的每一器官、组织、细胞以及生物分子都是在这样的重力场中得以演化并赖以生存的。一旦失去了正常的重力场, 生物体的器官和组织就将失去平衡, 导致一系列的生理变化, 甚至危及生命。超重和失重就是两种偏离正常重力场的典型状态。那么, 什么是超重, 什么是失重呢?

哈伯认为, 作用在一个物体上的力矢量和应为零。所有的力可分为三种: 地球引力(重力 F_g)、惯性力(F_i)、机械外力(F_e)。按照他的观点, 作用在某个物体上的合力为 $F_g + F_i + F_e = 0$ 。因为只有机械外力才能引起物体运动, 上式改为 $W = F_g + F_i = -F_e$, W 叫做物体的视重或物体的重量。

$$\text{令 } G = \frac{W}{mg} \quad (1-51)$$



如果 $G > 1$, 即物体视重大于物体的重力时, 称为超重(hypergravitation)。如果 $G < 1$, 即物体视重小于物体的重力, 称为部分失重。当 $G = 0$ 时, 称为失重(null gravity)。若 $G = 1$, 成为标准重力状态, 此时只有地球引力存在。

一、超重

电梯加速向上运动的瞬间, 人的视重在数值上大于人的重力, 产生超重。在航空和航天领域, 当飞机做盘旋、翻转等飞行时, 飞行员头朝圆心, 受到由足指向头的加速度, 而惯性力由头指向足, 飞行员受到超重的作用(一般称为正加速度作用)。当飞机由平飞进入俯冲, 加速度的方向由头指向足, 惯性力由足指向头, 飞行员受到负加速度的作用。

如果从决定超重生物效应方面看, 加速度的大小和作用时间是两个主要参数, 在加速度作用时, 机体的生物学效应随 G 的增大而加强, 一般来讲, 低 G 值产生效应较轻, 耐受时间较长, 高 G 值产生效应较重, 耐受时间较短, 当加速度超过某一阈值时, 将会引起机能障碍和病理损伤。 G 值一定时, 作用时间越长, 影响效应越严重。

目前, 在地面条件下研究超重的生物学效应主要有两种: 一是载人离心机, 可以模拟真实的重力环境。另一种是下体负压装置, 可以模拟超重效应。

二、失重

失重是航天领域中遇到的特殊环境, 例如, 当飞行器以第一宇宙速度($7.9\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)绕地球飞行时, 飞行器所受的地球引力同惯性力大小相等、方向相反, 矢量和为零, 产生失重现象。飞行器中的人做自由落体运动, 但始终无法回到地面。在实际发射中, 由于一些外部因素的影响, 如在太阳光的压力、航天器在调整姿态或修正轨道时, 发动机喷气产生的推力以及载人航天器中航天员走动时产生的干扰力、地球磁场的作用、轨道高度不同等, 导致飞行器不会处在完全失重的状态, 而是处在部分失重状态或微重力状态, 其大小大约只有地球表面重力场强度的百万分之一。当飞行器离开地球的距离超过 $9.2 \times 10^4\text{km}$ 时, 可以认为完全脱离地球引力, 在某些轨道上没有加速度, 也没有重力和惯性力, 处在完全失重的状态。在地面附近的特殊条件下也可遇到失重环境, 人们在乘电梯开始下降的瞬间, 或是在乘飞机飞行中, 由于气流扰动使飞机突然下沉时, 人的加速度几乎为零, 惯性力也为零, 也会出现失重。由于微重力和失重环境对人体生理功能影响相似, 通称为失重。

判断物体失重的一个最重要的标志是, 物体内部各质点之间没有相互作用力。这是因为物体在引力的作用下, 所有质点均具有相同的速度和加速度。平衡是我们最常见的物体的一种运动状态。但力的平衡与失重完全是两回事。例如, 人浮在水面上, 沉入水中, 乘坐飞机等速飞行或乘坐气球升空等, 都处于力的平衡状态, 但并不失重, 因为在这些情况中, 人体内部各部分之间都存在相互的作用力。

航天员在地面利用浸沉在水池中做模拟失重试验。这种水下试验, 其实并不能真正模拟失重。因为人在水中, 除受到地球引力外, 仍受到水的浮力作用而保持平衡。头、躯干、四肢以及身体内部的内脏、器官等都是具有重量的, 它们相互之间存在挤压或牵拉等作用力。真正模拟失重环境, 应使人体各部分, 特别是体内器官、内脏之间相互作用力消失。在这种情况下, 人的前庭器官中的耳石由于失重, 不再与周围的神经细胞接触给中枢神经传输信号, 从而丧失定向功能。前庭器官与人体主管呼吸、消化、循环、排泄、发汗等功能的自主神经系统有密切关系。所以, 一旦前庭器官不起作用, 身体内脏之间正常的相互作用力消失, 就会引起航天员初登太空时产生的那种头晕、恶心、呕吐等所谓“运动病”的症状。

载人航天实践证明微重力状态对身体非常不利, 大大限制了人们在太空中的活动空间和时间, 影响了许多生理功能, 例如对前庭系统、心血管系统、肌肉和骨骼系统等影响较大,



对免疫系统、能量代谢影响相对较小。

思考题与习题一

1-1 回答下列问题

- (1) 位移和路程有何区别?
- (2) 速度和速率有何区别?
- (3) 瞬时速度和平均速度的区别和联系是什么?
- (4) 物体能否有一不变的速率而仍有一变化的速度?
- (5) 速度为零的时刻,加速度是否一定为零? 加速度为零的时刻,速度是否一定为零?
- (6) 当物体具有大小、方向不变的加速度时,物体的速度方向能否有改变?

1-2 回答下列问题

- (1) 物体受到几个力的作用,是否一定产生加速度?
- (2) 物体速度很大,所受到的合外力是否也很大?
- (3) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同?
- (4) 物体运动的速率不变,所受合外力是否为零?

1-3 炮弹以一定的仰角射出,它的轨迹是一条抛物线。设当它到达最高点时,不料发生爆炸,分裂成质量相等的两块碎片,其中一块在爆炸的影响下沿着原来的轨迹返回到出发点。问:

- (1) 另一块碎片将沿怎样的方向飞去? 能否达到预定的地点?
- (2) 到达地面时两者的速率是否相同?
- (3) 两者能否同时到达地面?

1-4 根据动量原理可知:力在时间过程中的累积效应,引起动量的改变。根据功能原理可知:力的空间累积引起动能的改变。

(1) 如果物体受合外力作用了一段时间(即受到合外力的冲量作用),动量发生了改变,那么,是否一定会引起物体动能的改变?

(2) 如果物体受合外力作用,并且在力作用的方向上有了位移(即合外力对物体做了功),使物体的动能发生了变化,是否一定会引起物体动量的改变?

1-5 一质点做半径为 R 的圆周运动,其速率 $v=b-ct$, b, c 均为正的常量,试求:

- (1) 任意时刻质点的加速度的大小和方向; $\left(\frac{\sqrt{R^2 c^2 + (b-ct)^4}}{R} \right)$
- (2) 速度为零时质点绕圆周运动了多少圈? $\left(\frac{b^2}{4\pi c R} \right)$

1-6 在生物物理实验中用来分离不同种类的分子的超级离心机的转速是 $60 \times 10^4 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 。在这种离心机的转子内,离轴 10cm 远的一个大分子的向心加速度是重力加速度的几倍?

(4×10^3)

1-7 桌上有一块质量 $M=1\text{kg}$ 的木版,板上放着一个质量 $m=2\text{kg}$ 的物体,物体和板之间,板和桌面之间的滑动摩擦系数均为 $\mu_k=0.25$,静摩擦系数均为 $\mu_s=0.30$,现以水平力 F 拉木板,物体与板一起以加速度 $a=1\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 运动,试求:

- (1) 物体和板的相互作用力以及板和桌面的相互作用力; (7.35N)
- (2) 若要使板从物体下抽出,需用外力 F 是多少? (16.17N)

1-8 一步枪在射击时,子弹在枪膛内受的推力满足 $F=400-\frac{4}{3} \times 10^5 t$ 的规律变化,已



知击发前子弹速度 $v_0=0$, 子弹出枪口时速度 $v=300\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。求子弹的质量等于多少?

$$(2\times 10^{-3}\text{kg})$$

1-9 质量为 1kg 的球以 $25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率竖直地落到地板上, 以 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的初速率跳回。

(1) 试问在球与地板接触时间内作用在球上的冲量多大? $(-875\text{N}\cdot\text{s})$

(2) 设接触时间为 0.02s , 问作用在地板上的平均力多大? $(43\ 759.8\text{N})$

1-10 质量为 $7.2\times 10^{23}\text{kg}$ 、速度为 $6.0\times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的粒子 A, 与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰, 假定这碰撞是弹性碰撞, 碰撞后粒子 A 的速率为 $5.0\times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 求:

(1) 粒子 B 的速率及偏转角; $(4.7\times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}; 54.2^\circ)$

(2) 粒子 A 的偏转角。 (22.3°)

1-11 一质量为 m 的中子与一质量为 M 的原子核作弹性碰撞, 如中子的初始动能为 E_0 , 试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为 $4mME_0/(M+m)^2$ 。

1-12 地下蓄水池的底面积 $S=50\text{m}^2$, 储水深度 $h=1.5\text{m}$, 若水面低于地面的高度 $h_0=5.0\text{m}$, 问将池水全部抽到地面时, 需做多少功? 若水泵的效率 $\eta=80\%$, 输入功率 $N=35\text{kW}$, 需要多少时间可以抽完? $(1.5\times 10^2\text{s})$

1-13 求质量为 m , 半径为 R 的均匀薄圆环的转动惯量, 轴与圆环平面垂直并且通过其圆心。 (mR^2)

1-14 一根长 l , 质量为 M 的均匀直棒, 其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。今有一子弹, 质量为 m , 以水平速度 v_0 射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。 $\left(\frac{3mv_0}{(M+3m)l}\right)$

1-15 一质量为 m 的物体, 从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下, 设圆形槽的半径为 R , 张角为 $\pi/2$, 如所有摩擦都可以忽略, 求:

(1) 物体刚离开槽底端时, 物体和槽的速度各为多少? $\left(\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}; \sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}\right)$

(2) 物体从槽顶端 A 滑到槽底 B 的过程中, 物体对槽所做的功 A。 $\frac{m^2 gR}{M+m}$

(3) 物体到达 B 时对槽的压力。 $\left[\left(3+\frac{2m}{M}\right)mg\right]$

(杨继庆)

第二章 物体的弹性

学习要求:

1. 掌握物体弹性的基本概念:形变、应变、应力、模量。
2. 理解应力与应变的关系。
3. 了解骨骼的力学特性和生物材料的黏弹性。

物体在外力作用下发生的形状和大小的改变,称为形变(deformation)。在上一章的学习中,将被研究的物体抽象为刚体,也就是说,将物体在受力时所发生的形变忽略不计。在许多实际问题中,形变是不能忽略的,例如在房屋和桥梁的设计时,必须考虑构件在受力时所产生的形变;在生物医学中,对于骨骼、肌肉等器官在这方面力学特性的研究更是十分重要。

形变可分为两类:如果外力撤除后形变完全消失,这种形变称为弹性形变(elastic deformation);如果外力撤除后形变不能完全消失,则称为塑(范)性形变(plastic deformation)。当然,在实际问题中弹性形变和塑性形变的界限不是十分严格。物体在发生弹性形变的同时,通常会有微小的塑性形变,在一定的限度内,把这种形变当作完全弹性形变来处理。

形变有伸长、缩短、切变、扭转、弯曲等几种类型。伸长和缩短合称线变。线变和切变是弹性形变的两种基本类型,其他形变实际上是这两种形变的复合。

本章将首先讨论两个基本概念:应变和应力(又称胁变和胁强),然后找出它们之间的关系,并结合本章所研究的内容对骨骼的力学特性进行初步讨论。

第一节 线应变与正应力

一、线应变

当物体受到外力(拉力或压力)时,其长度会发生改变。设一根直棒在不受外力作用时长度为 l_0 ,两端受到拉力时会伸长,受到压力时会缩短,其长度的增量用 Δl 表示,伸长时 Δl 为正,缩短时 Δl 为负。通常将 Δl 称为该物体的绝对伸长。由于绝对伸长只能表示长度变化的大小而无法描述长度变化的程度,因此引入相对伸长。如果该物体各部分的长度变化是均匀的,则 $\frac{\Delta l}{l_0}$ 称为它的相对伸长,也称线应变,用 ϵ 表示

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2-1)$$

如果其各部分的伸长是不均匀的,可以从中任取出一段微元,用这一段微元的绝对伸长与原长之比来表示该微元段的线应变。在这种情况下,线应变将不再是常数。

二、正应力

物体的形变总是离不开力,也就是说,组成物体的微观粒子之间在力的作用下相对位置会发生改变,因此任一横截面两边材料之间存在一种相互拉伸的内力。力学上称这种垂直于任一截面的拉伸内力为张力,而称垂直于任一截面的相互挤压的内力为压力。如图 2-1 所示,设匀质圆棒两端受到相等的拉力作用,并假定拉力均匀地分布在两个端面上,棒在拉



力作用下有所伸长。设想在棒的某处一个横断面将棒分为 m 、 n 两段,既然 n 段保持平衡,它在横断面处受到 m 段的拉力 F_n 满足

$$F_n = F$$

F_n 就是横断面上的张力。当然 m 段也会受到 n 段所施的张力,它们互为作用力与反作用力。

如果上述圆棒的材料结构均匀,所受的张力应该均匀分布在横截面上,这个张力与横截面面积 S 之比,称为该横截面上的正应力,用符号 σ 表示:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2-2)$$

如果物体受力不均匀或者内部材料不均匀,可以取一个微小的面元,其面积为 dS ,设这个面元上的张力为 dF ,则该面元上的正应力表示为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (2-3)$$

正应力分为张应力(tensile stress)($\sigma > 0$)与压应力(compressive stress)($\sigma < 0$)两种。正应力的单位是 Pa(帕斯卡,简称为“帕”)。

三、正应力与线应变的关系

正应力与线应变之间存在着密切的函数关系。材料不同,函数关系也会有所不同,但具有一些共同特征。下面分别通过低碳钢、骨、主动脉三种不同材质,研究其正应力与线应变的关系。

1. 低碳钢是工程技术中常用的材料,它的机械性能具有代表性,其正应力与线应变的关系如图 2-2 所示。

图中横坐标表示线应变 ϵ ,纵坐标表示正应力 σ 。从图上可将拉伸分为弹性、屈服、硬化和颈缩四个阶段:

弹性阶段是曲线中的近似直线部分 OA 段。在这个范围内,正应力与线应变近似成正比。对应于 A 点的应力是保持正比关系的最大应力,称为正比极限(proportional limit)。低碳钢的正比极限约为 2×10^7 Pa。从 A 点到 B 点的这一段,正应力与线应变虽不再是正比关系,但仍是弹性形变。对应于 B 点的正应力叫做弹性极限(elastic limit);过了 B 点以后,撤去外力,形变会有残留。

屈服阶段是过了 C 点,几乎与横轴平行的一小段曲线,表明该阶段线应变在迅速增加,而正应力并无明显地加大,这叫做材料的屈服。在这一阶段的最大正应力叫做屈服强度。

硬化阶段是从 D 点开始上升的曲线部分。只有加大正应力,才能使物体进一步伸长,此即材料的硬化。到达 E 点,正应力达到最大值,对应于 E 点的正应力叫做强度极限。低碳钢的强度极限约为 4×10^8 Pa。

颈缩阶段是过了 E 点以后的曲线部分。物体的横截面急剧缩小,即使不再加大负荷,也会很快伸长,直至断裂。当应力达到 F 点时材料断裂, F 点称为断裂点(fracture point)。断

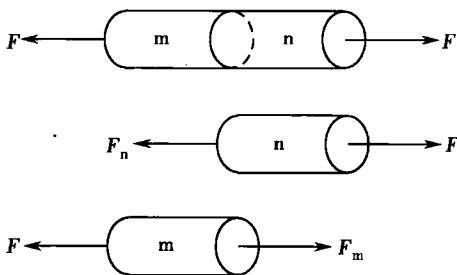


图 2-1 垂直于任一截面的拉伸内力

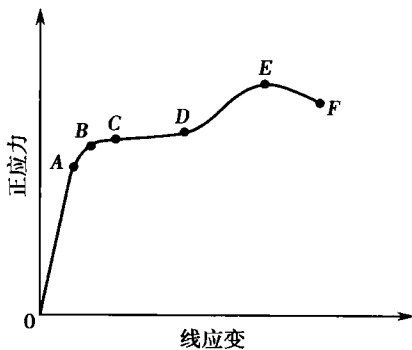


图 2-2 正应力与线应变的关系

裂点的应力称为材料的抗张强度(tensile strength)。压缩时,断裂点的应力称为抗压强度(compressive strength)。图 2-2 中 BF 是材料的塑性(范性)范围。若 F 点距 B 点较远,则这种材料能产生较大的塑性形变,表示它具有展性(malleability)。如果 F 点距 B 点较近,则材料表现为脆性(brittleness)。

实验表明:在正比极限内,正应力与线应变成正比,即

$$\sigma=Y\epsilon \tag{2-4}$$

上式中的比例系数 Y 称为杨氏模量(Young's modulus)。因为 ϵ 为纯数,所以杨氏模量和应力有相同的单位。结合式(2-1)和式(2-2)

$$Y=\frac{\sigma}{\epsilon}=\frac{F/S}{\Delta l/l_0}=\frac{l_0 F}{S\Delta l} \tag{2-5}$$

杨氏模量只与材料的性质有关,它反映材料抵抗线变的能力,其值越大则该物体越不容易变形。几种材料的杨氏模量见表 2-1。

表 2-1 一些常见材料的杨氏模量

材料	低碳钢	铸铁	花岗岩	铅	骨		木材	腱	橡胶	血管
					拉伸	压缩				
杨氏模量 $Y\ 10^9\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$	196	78	50	17	16	9	10	0.02	0.001	0.0002

正应力与线应变的这种关系称为胡克定律,在使用时要特别注意它的适用范围。

2. 骨作为一种弹性材料,在正比极限范围之内,它的正应力和线应变成正比关系,如图 2-3 所示。图中横坐标表示线应变 ϵ ,纵坐标表示正应力 σ 。三条曲线分别表示湿润而致密的成人桡骨、腓骨和肱骨的正应力与线应变的关系。在应变小于 0.5%的条件下,这三种四肢骨的应力—应变曲线皆为直线,成正比关系。

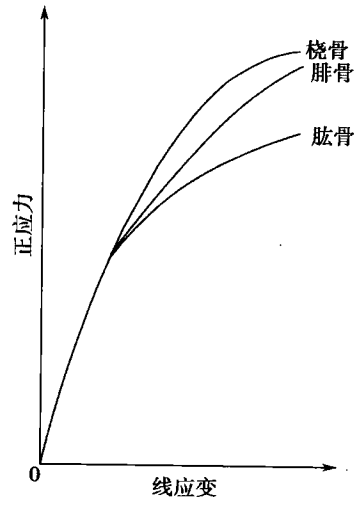


图 2-3 湿润而致密的成人四肢骨的正应力-线应变曲线

骨骼在被拉伸时(相当于人进行悬垂动作时骨受到的作用)可伸长并变细。骨组织在拉伸作用下断裂主要是骨单位间结合线的分离和骨单位的脱离。临床上拉伸所致骨折多见于骨松质。骨骼在被压缩时(如举重时身体各部分都要受到压缩作用)能够刺激骨的生长,促进骨折愈合;但压缩作用较大时能够使骨缩短和变粗。骨组织在压缩载荷作用下破坏的表现主要是骨单位的斜行劈裂。人润湿骨破坏的压缩极限应力大于拉伸极限应力。拉伸与压缩的极限应力分别为 $134\text{MN}\cdot\text{m}^{-2}$ 与 $170\text{MN}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

3. 主动脉弹性组织的正应力与线应变关系并不服从胡克定律,曲线没有直线部分。如图 2-4 所示,主动脉弹性组织的弹性极限十分接近断裂点,这说明只要它没有被拉断,在外力消失后都能恢复原状。另外,从图中可见,应变可达到 1.0,这说明它可以伸长到原有长度的两倍。这一点和橡胶皮是类似的。

【例 2-1】 如图 2-5 所示,一根结构均匀的弹性杆,密度为 ρ ,杨氏模量为 Y 。将此杆竖直悬挂,使上端固定,下端自由。求杆中的应力和应变。

解:弹性杆在自重的作用下伸长,同一横截面里的应力和应变是相同的,但不同横截面里的应力不同,因而应变也不相同。考虑到弹性杆在自重作用下的长度变化十分微小,为简化计算起见,可认为悬挂后其密度仍保持为常量 ρ 。

设杆在悬挂时的长为 l ,横截面积为 S 。以悬挂点为原点向下作 Ox 轴,如图 2-5 所示,

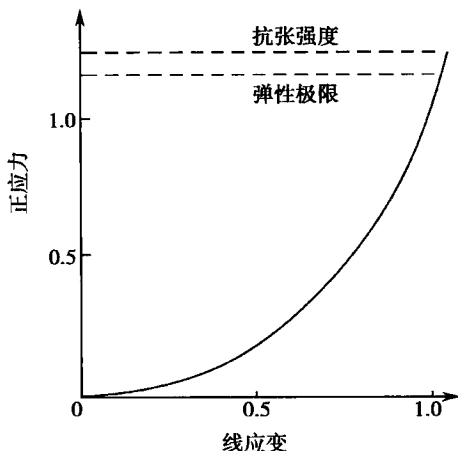


图 2-4 主动脉弹性组织的正应力-线应变曲线

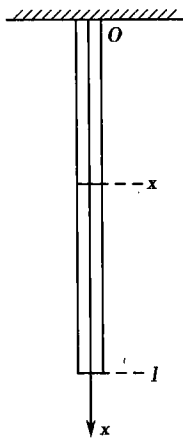


图 2-5 例 2-1

计算坐标为 $x(0 < x < l)$ 的横截面处的应力和应变。

由 $\sigma = \frac{F}{S}$ 得这个截面处的应力为：

$$\sigma = \frac{\rho(l-x)Sg}{S} = \rho(l-x)g$$

又因为 $\sigma = Y\epsilon$ ，所以这个截面处的应变为：

$$\epsilon = \frac{\sigma}{Y} = \frac{\rho(l-x)g}{Y}$$

〔例 2-2〕 股骨是大腿中的主要骨骼。如果成年人股骨的最小截面积是 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ，问受压负荷为多大时将发生碎裂？又假定直至碎裂前，应力-应变关系还是线性，试求发生碎裂时的应变。（抗压强度 $\sigma = 17 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ）

解：导致骨碎裂的作用力

$$F = \sigma S = 17 \times 10^7 \times 6 \times 10^{-4} = 1.02 \times 10^5 (\text{N})$$

这个力是很大的，约为 70kg 重的人体所受重力的 150 倍。如果一个人从几米高处跳到坚硬的地面上，就很容易超过这个力。

根据骨的杨氏模量 $Y = 0.9 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ，可求碎裂时的应变

$$\epsilon = \frac{\sigma}{Y} = \frac{17 \times 10^7}{0.9 \times 10^{10}} = 0.019 = 1.9\%$$

由此可见，在引起碎裂的负荷下，骨头的长度将减少 1.9%。

四、弯曲

弯曲是一种比较复杂的形变，在此只讨论平面弯曲。所谓平面弯曲是指物体具有一个纵向的对称面，所有外力的合力都集中在这个对称面里。也就是说，物体除了受到自身的重力和支撑物的支持力以外，往往受到其他物体的横向压力或拉力作用，而这些力是集中作用在这个对称面上的。因此，可以用这个对称面来代替整个物体。

如图 2-6(a)所示，在两个支架上放置一横梁。当横梁受到一个垂直于轴线的横向压力 P 时，如图 2-6(b)所示，横梁发生弯曲。显然，凸出的一侧被拉伸，凹进的一侧被压缩。

选取梁的一横截面，取出截面左边一小段考察其应力分布状况。

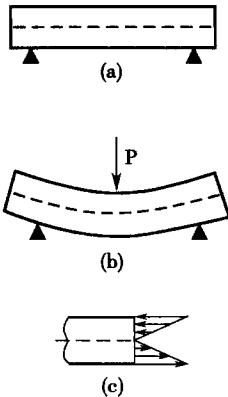


图 2-6 平面弯曲现象



如图 2-6(c)所示,由于弯曲,在横梁的上部发生压缩形变,即出现压应力,越接近上缘压缩越严重;在横梁的下部发生拉伸形变,即出现拉应力,越接近下缘拉伸越严重。而中间一层既不拉伸又不压缩,所以无应力,通常称该层为中性层。由于中性层对抗弯的贡献很小,因此经常用空心管代替实心柱,用工字梁代替方形梁,这样既能减轻重量,又能节省材料。众所周知,许多生物的组织结构是属于管状的。对于飞禽来说减轻骨骼的重量无疑是非常重要的,而它们的骨骼恰好都是比较薄的管子。例如天鹅的翅骨内径与外径比为 0.9。横截面积只是同样强度的实心骨骼的 38%。人骨也常常是空心的,人的股骨内外径之比为 0.5,横截面积为同样抗弯强度实心骨的 78%。在受力比较大的股骨部分,长有许多交叉的骨小梁,借以提高抗弯强度。

骨骼在受到使其轴线发生弯曲的力的作用时,也将发生弯曲效应。受到弯曲作用的骨骼同样存在一个没有应力与应变的中性层,在中性对称轴凹侧一面骨骼受压缩载荷作用,在凸侧受拉伸作用。对成人骨骼,破裂开始于拉伸侧,因为成人骨骼的抗拉能力弱于抗压能力。相反,未成年人骨则首先自压缩侧破裂。

第二节 切应变与切应力

一、切应变

当物体两端同时受到反向平行的拉力 F 作用时会发生形变,如图 2-7 所示。弹性体在平行于某个截面的一对方向相反的平行力的作用下,其内部与该截面平行的平面发生错位,使原来与这些截面正交的线段变得不再正交,这样的形变叫做切应变。发生错位的这些平面叫做剪切面,平行于这个平面的外力叫做剪切力。

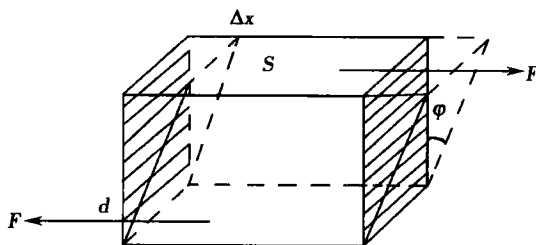


图 2-7 切应变

在图 2-7 中,原来与上底面正交的线段虽仍保持为直线,但不再与上、下底面正交,它们相对于原来的位置偏转了 φ 角。设两底面相对偏移位移为 Δx ,垂直距离为 d ,则剪切的程度以比值 $\frac{\Delta x}{d}$ 来衡量,这一比值称为切应变(shearing strain),以 γ 表示,即

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d} = \tan \varphi \quad (2-6)$$

在实际情况中,一般 φ 角很小,上式可写成

$$\gamma \approx \varphi$$

二、切应力

弹性体发生切变时,任一剪切面两边材料之间存在相互作用并且大小相等的切向内力。通过弹性体内某一个面元的切向内力与该面元的面积之比值称为切应力(shearing stress),用 τ 表示。即:

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (2-7)$$

当内力在上下底面上分布均匀时,则有:



$$\tau = \frac{F}{S} \quad (2-8)$$

上式中: S 为图 2-7 中长方体上底或下底的面积。

三、切应力与切应变的关系

实验证明, 在一定的限度内, 切应力与切应变成正比, 这种正比关系叫做切变的胡克定律。即:

$$\tau = G\gamma \approx G\varphi \quad (2-9)$$

上式中比例系数 G 称为切变模量, 也叫刚性模量。结合式(2-6)和式(2-8)

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F/S}{\Delta x/d} = \frac{Fd}{S\Delta x} \quad (2-10)$$

与杨氏模量类似, 切变模量也只与材料的性质有关, 几种材料的切变模量见表 2-2。

表 2-2 一些常见材料的切变模量

材料	钨	低碳钢	铜	铸铁	玻璃熔石英	铝	骨	木材	铅
切变模量 $G \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$	140	78	40	35	30	25	10	10	6

剪切作用时, 人骨骼所能承受的剪切载荷比拉伸和压缩载荷都低。骨骼的剪切破坏应力约等于 $54 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

四、扭转

每个使用过螺丝刀的人都会对扭转状态有所体会。若使圆柱体两端分别受到对中心轴的力矩, 且方向相反, 则圆柱体便会发生扭转现象。扭转是一种比较复杂的形变, 本节只讨论圆杆的扭转。

如图 2-8 所示, 将结构均匀的圆杆下端固定, 对中心轴的力矩作用其上端, 使杆的各个横截面发生一定的角位移, 母线 AA' 发生倾斜变为 AA'' , 形成母线的倾斜角, 用 φ 表示。此时, 图 2-8 中圆杆一端相对于另一端的角位移称为扭转角, 用 δ 表示。实验证明, 各个横截面的角位移与该截面到下端的距离成正比。扭转角 δ 与母线的倾斜角 φ 之间的关系为:

$$a\delta = l\varphi \quad (2-11)$$

其中 l 为杆的长度, a 为杆的半径。

实验证明, 当圆杆发生微弱的扭转时(即圆杆的各个横截面在扭转前后大小不变; 每个横截面里的点有相同的角位移, 而不发生轴向位移), 扭转角 δ 与扭转力矩 M 有如下的关系:

$$M = \frac{\pi G a^4}{2l} \delta \quad (2-12)$$

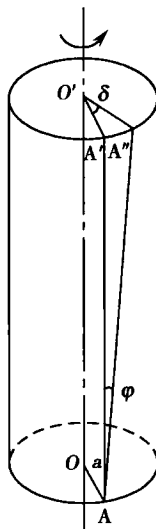
其中 G 为材料的切变模量。

图 2-8 圆柱体扭转现象

由式(2-12)可见, 在扭转角 δ 相同的条件下, 扭转力矩 M 与杆的半径 a 的四次方成正比。显然, 当杆的半径稍粗一点, 扭转就会困难许多。

由于圆杆在被扭转时, 其横截面每一点均承受切应力作用, 切应力的数值与该点到中心轴的距离成正比。也就是说, 离中心轴越远的地方, 切应力越大。显然, 如果因扭转而发生破裂, 必然从外缘开始。由式(2-9)和式(2-11)可知, 外缘的切应力为:

$$\tau = G \frac{a\delta}{l} \quad (2-13)$$





结合式(2-12),得到最大切应力为:

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^3} \quad (2-14)$$

了解最大切应力对于防止因扭转而导致断裂是十分重要的。

由于承担最大的切应力的是圆杆的外缘材料,并且从抗扭转性能来看,靠近中心轴的各层作用不大,因此常用空心管来代替实心柱,这样既可以节省材料,又可以减轻重量。根据计算,如果用厚度为半径 1/2 的圆管来代替同样外径的圆杆,则在相同的扭矩的作用下,最大切应力增加 6%,而材料可节省 25%。这一点与人体骨骼的生理结构极为相似。

人体骨骼的抗扭转强度最小,因而过大的扭转很容易造成扭转性骨折。表 2-3 列出了有关人体的四肢骨的断裂力矩和相应的扭转角度。

表 2-3 人骨的扭断力矩和扭转角

骨	扭断力矩 N·m	扭转角	骨	扭断力矩 N·m	扭转角
下肢			上肢		
股骨	140	1.5°	肱骨	60	5.9°
胫骨	100	3.4°	桡骨	20	15.4°
腓骨	12	35.7°	尺骨	20	15.2°

第三节 体应变与体应力

虽然体应变与体应力不是弹性形变的基本类型,但由于其在生物医学领域中应用比较广泛,在此介绍一些有关的基本概念。

一、体应变

物体各部分在各个方向上受到同等压强时体积发生变化而形状不变,则体积变化 ΔV 与原体积 V_0 之比称为体应变(volume strain),以 θ 表示即

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} \quad (2-15)$$

二、体应力

物体在外力作用下发生体积变化时,如果物体是各向同性的,则其内部各个方向的截面积上都有同样大小的压应力,或者说具有同样的压强。因此,体应力(volume stress)可以用压强来表示。

三、体应变与体应力的关系

在体积形变中,压强与体应变的比值叫做体变模量(bulk modulus),以符号 K 表示

$$K = \frac{-p}{\theta} = -\frac{p}{\Delta V/V_0} = -V_0 \frac{p}{\Delta V} \quad (2-16)$$

式中负号表示体积缩小时压强是增加的。几种材料的体变模量见表 2-4。

表 2-4 一些常见材料的体变模量

材料	钢	铜	铁	铝	玻璃熔石英	水银	水	乙醇
体变模量 $K \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$	158	120	80	70	36	25	2.2	0.9

体变模量的倒数,称为压缩率(compressibility),记为 k



$$k = \frac{1}{K} = -\frac{\Delta V}{pV_0} \quad (2-17)$$

物质的 k 值越大,越易被压缩。

* 第四节 生物材料的黏弹性

生物材料包括天然生物材料和人工合成生物材料。天然生物材料即活体器官、组织、部件及体液等,人工合成生物材料是用化学合成方法制成的人造生物材料,它能用于与人体活组织或生物流体直接相接触的部位,具有天然器官组织或部件的功能。如人工血管、心脏、关节、血液代用品等等。研究生物材料的力学性质,对判断人体器官组织的疾病及研究制作人工器官组织等生物材料都有重要意义。

许多物质虽然具有弹性特征,但并不是一个单纯的弹性体,而是既表现有弹性,也表现有黏性,被称为黏弹体,其特征称为黏弹性。沥青是有弹性的固体,但放置时间长了它会流动,表现有黏性,所以沥青是一种黏弹性固体。又如,蛋清是一种黏性液体,但在受到搅动以后,它有回缩现象,表现出弹性,因而蛋清也是一种黏弹性液体。生物材料中的液体和固体几乎都是黏弹体,如血液、呼吸道黏液、关节液、软骨、血管、食管以及人工关节、瓣膜、皮肤等。只不过有的弹性较弱,有的黏性较弱,在程度上有所差别。下面仅对生物材料的结构特点、黏弹性材料的基本性质做简要介绍。

一、生物材料的结构特点

生物材料多数是高分子聚合物。其分子间可以形成多种不同的三维结构,大致可分为三类。其一,分子不交联的无定型聚合态。这种聚合态的分子可互相分开,分子间可互相滑动,材料能拉长或无规则地形变,但不能恢复原状,所以是非弹性的,如体液等。其二,分子交联的无定型聚合态。这类分子因交联而不能互相滑动。当生物材料拉长时,长分子可在拉长方向上伸直,被拉长到原来的 3 倍左右;放松时,又能卷曲和弹开,能恢复到接近原来的尺寸,如弹性蛋白就具有这种性质。其三,分子交联成定型的结构。此类生物材料具有较高的弹性模量($1 \sim 10 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$),如胶原纤维、骨骼等。所有组成人体器官的生物材料都是由上述三种聚合物和其他参合物(无机盐、水、空气等)构成的复杂结构。除生物金属材料外,大多数合成生物材料也是高分子聚合物,它们的力学性质介于弹性固体和黏性液体之间,即同时具有弹性固体的弹性和黏性液体的黏性,所以合成生物材料大多也是黏弹性材料。

二、生物材料的黏弹性

弹性体的特点是其内部任一点、任一时刻的应力,完全取决于当时当地的应变,与应变的历史过程无关。当外力去掉后,弹性体将立刻恢复它原先的形状和大小。而黏弹性材料则与此不同,其中任一点任一时刻的应力状态,不仅取决于当时当地的应变,而且与应变的历史过程有关,即材料是有“记忆”的。下面仅介绍黏弹性材料的基本性质。

1. 延迟弹性(delayed elasticity) 对弹性体,应变对应力的响应是即时的,而黏弹性材料,其应变对应力的响应不是即时的,应变滞后于应力。如图 2-9(a)所示,黏弹性材料在恒定压力作用下,应变随时间逐渐增加,最后趋近于恒定值;当外力去除后,应变只能逐渐减小到零,即应变总是落后于应力的变化,这种表现就是延迟弹性。其原因在于大分子链运动困难,以及回缩过程中需克服内摩擦力。

2. 应力松弛(stress relaxation) 当黏弹体发生形变时,若使黏弹体应变维持恒定,则应力随时间的增加而缓慢减小,如图 2-9(b)所示,这种现象称为应力松弛,如血管和血液就



具有此特性。其原因仍与生物材料的分子结构和黏性有关。

3. 蠕变(creep) 若黏弹体维持应力恒定,应变随时间增加而增大的现象称为蠕变,如图 2-9(c)所示。生物材料的应变通常由弹性应变、延迟弹性应变、黏性应变叠加形成,后两种应变决定其蠕变性。如关节软骨就具有这种特点。

4. 滞后(hysteresis) 如果对黏弹体周期性加载和卸载,则卸载时的应力-应变曲线同加载时的应力-应变曲线不重合,如图 2-9(d)所示,这种现象称为弹性滞后。滞后现象的原因是大分子构型改变的速度跟不上应力变化,构型改变时有内摩擦力作用。血液、红细胞等存在滞后现象。

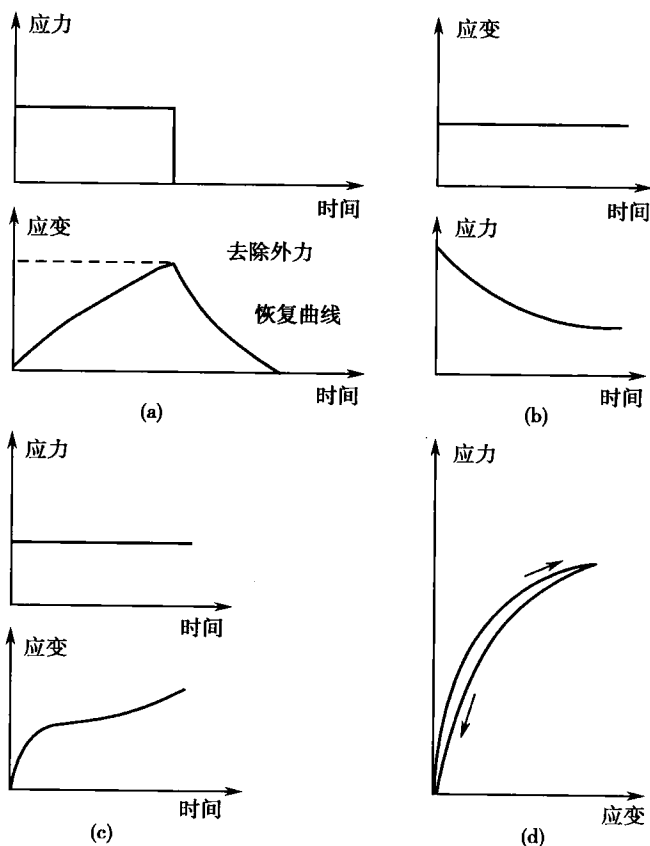


图 2-9 黏弹性材料的应力和应变

以上是黏弹性材料的基本性质。但对具有黏弹性的每一种生物材料而言,由于分子构型不同,还有自己的特性,有关内容在生物力学中有详细介绍。

思考题与习题二

- 2-1 在日常生活中,哪些形变属于弹性形变,哪些属于塑性形变?
- 2-2 切应变与线应变的区别何在? 切应力与正应力的区别何在?
- 2-3 举出日常生活和生产中发生扭转变形的例子。
- 2-4 杨氏模量的物理含义是什么?
- 2-5 动物骨头有些是空心的,从力学角度来看它有什么意义?
- 2-6 如果某人的一条腿骨长 0.5m,平均横截面积为 3cm^2 、站立时,两腿支持整个人体



重为 600N,问此人每条腿骨要缩短多少? 已知骨的杨氏模量为 $10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。 ($5 \times 10^{-5} \text{ m}$)

2-7 低碳钢螺栓的受力部分长 120mm,拧紧后伸长 0.04mm,求线应变和正应力。

(3.33×10^{-4} ; $6.53 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$)

2-8 实心圆轴的直径 $d=10\text{cm}$,长 $l=2\text{m}$,两端所加的扭矩 $M=10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。设材料的切变模量 $G=8 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$,求扭转角及最大切应力。

(0.0255 rad ; $5.1 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$)

2-9 在边长为 0.02m 的正方体的两个相对面上,各施加大小相等、方向相反的切向力 $9.8 \times 10^2 \text{ N}$,求施加力后两面的相对位移。假设该物体的切变模量是 $4.9 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

(0.001 m)

(吉 强)

第三章 流体的运动

学习要求:

1. 掌握理想流体和稳定流动的概念、连续性方程和伯努利方程的物理意义并熟练应用,掌握牛顿黏滞定律和泊肃叶定律的物理意义及其应用。
2. 理解黏性流体伯努利方程的物理意义、层流和湍流的概念、雷诺数、斯托克司定律及应用。
3. 了解血液的特性、心脏做功、血流速度及血管中血压的分布。

具有流动性(fluidity)的物体称为流体(fluid)。所谓流动性是指流体各部分之间极易发生相对运动的特性。气体和液体具有流动性,故统称为流体。流体没有一定的形状,容器的形状就是它们的形状。研究流体运动规律的学科称为流体动力学(fluid dynamics),本章将介绍它的一些基本概念和规律。

流体动力学是水力学、空气动力学、生物力学等学科的理论基础。掌握流体运动的规律对研究人体循环系统、呼吸过程以及相关的医疗设备是十分必要的。

第一节 理想流体的稳定流动

一、理想流体

实际流体的运动十分复杂,这是因为任何实际流体都有可压缩性(compressibility)和黏性(viscosity)。所谓可压缩性,即流体的体积随压强不同而改变的性质;实际液体的可压缩性很小,例如,对水增加 1000atm 的压强,仅使水的体积减少 5% 左右。气体虽容易压缩,但它的流动性好,除密闭容器外,只要有很小的压强差就可以使气体迅速流动起来,从而使各处的密度趋于均匀。因此,实际液体和流动中的气体都可近似看做是不可压缩的。所谓黏性,即当流体各层之间有相对运动时,相邻两层间存在内摩擦力(internal friction)的性质。许多液体(如水和乙醇)的黏性很小,气体的黏性则更小,因此,由黏性造成的影响在某些情况下可以忽略。

在一些实际问题中,流体的可压缩性和黏性只是影响运动的次要因素,而决定流体运动的主要因素是其流动性,因此,往往采用理想流体(ideal fluid)模型来分析问题。所谓理想流体,就是绝对不可压缩、完全没有黏性的流体。

二、稳定流动

流体流动过程中的任一时刻,流体在所占据空间的每一点都具有一定的流速,即 $v = v(x, y, z, t)$,通常将这种流速随空间的分布称为流体速度场,简称流场(field of flow)。为了形象地描述流场,在任一时刻,可以在流场中画出一系列假想的曲线,并使曲线上每一点的切线方向与流经该点的流体粒子的速度方向一致,这些曲线称为这一时刻流体的流线(stream line)。如图 3-1 所示。

一般情况下,流场中各点的流速随时间而变,但在实际问题中,常遇到整个流动随时间的变化并不显著,或可

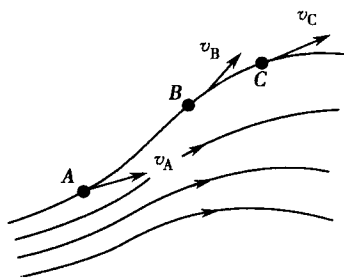


图 3-1 流线



以忽略其变化的情况,这时可近似认为流场中各点的流速不随时间变化,即 $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x, y, z)$, 这样的流动称为稳定流动(steady flow)。流体做稳定流动时,流线的形状将保持不变,流线与流体粒子的运动轨迹相重合。图 3-1 中, A、B、C 是流场中的三个点,并处在同一流线上,流体流经这三点的速度虽各不相同,但在稳定流动的情况下, A、B、C 三点的速度都不随时间变化。

如果在稳定流动的流体中画出一个截面 S_1 (图 3-2), 则把通过其周边各点的流线所围成的管状区域称为流管(tube of flow)。由于每一点有唯一确定的流速,所以

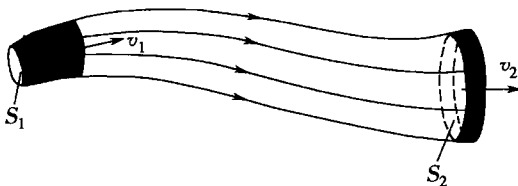


图 3-2 流管

以流线不可能相交,流管内外的流体都不会穿越管壁。可以把整个流动的流体看成是由许多流管组成的,只要搞清楚流体在流管中的运动规律,也就可以了解流体流动的一般情况。

三、连续性方程

在稳定流动的流场中任取一段细流管,如图 3-2 所示,流管的任一横截面上各点的物理量都可以看成是均匀的。设截面 S_1 和 S_2 处的流速分别为 v_1 和 v_2 , 流体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 。经过一短时间 Δt , 通过截面 S_1 进入该流管段的流体(图中 S_1 附近阴影部分)质量为

$$m_1 = \rho_1 (v_1 \Delta t) S_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$$

同时,通过截面 S_2 流出该流管段的流体(即图中 S_2 附近阴影部分)质量为

$$m_2 = \rho_2 (v_2 \Delta t) S_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

根据质量守恒原理及稳定流动的特点,有 $m_1 = m_2$, 即

$$\begin{aligned} \rho_1 S_1 v_1 \Delta t &= \rho_2 S_2 v_2 \Delta t \\ \rho_1 S_1 v_1 &= \rho_2 S_2 v_2 \end{aligned} \quad (3-1)$$

式(3-1)对于流管中任意两个与该流管垂直的截面都是正确的,故可写成

$$\rho S v = \text{常量} \quad (3-2)$$

式(3-2)表明,流体做稳定流动时,同一流管中任一截面处的流体密度 ρ 、流速 v 和该截面面积 S 的乘积为一常量,这个关系称为稳定流动时的连续性方程(continuity equation)。 $\rho S v$ 是单位时间内通过任一截面 S 的流体质量,常称为质量流量,因此连续性方程又称为质量流量守恒定律。

如果研究的是不可压缩流体,此时 $\rho_1 = \rho_2$, 从式(3-1)和式(3-2)可得出

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (3-3)$$

$$S v = \text{常量} \quad (3-4)$$

式(3-4)是不可压缩流体做稳定流动时的连续性方程, $S v$ 是单位时间内通过任一截面 S 的流体体积,常称为体积流量,所以式(3-4)又可称为体积流量守恒定律。因此对于不可压缩的且做稳定流动的流体来说,不仅质量流量守恒,体积流量也是守恒的。

式(3-4)表明,当不可压缩的流体在流管中做稳定流动时,单位时间内通过垂直于流管的任一截面的流体体积都相等。因此流速与横截面积成反比,即截面积大处流速小,截面积小处流速大。

第二节 伯努利方程

一、伯努利方程

理想流体作稳定流动时,流体在流管中各处的流速、压强和高度之间有一定的关系,下



面利用功能原理来进行推导。

设理想流体在重力场中作稳定流动。在流场中任取一细流管,并截取一段流体 XY 作为研究对象,如图 3-3 所示。设经过极短时间 Δt 后,此段流体由 XY 移到了 $X'Y'$ 位置。由于所取的流管很细,并且时间 Δt 极短,则介于 XX' 间的流体体积很小,可以认为其中各点的压强、流速及相对于参考面的高度都相同,分别以 p_1 、 v_1 、及 h_1 表示。 XX' 部分的截面积可认为不变,设为 S_1 ,且该段流体体积 $\Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t$ 。

同理,用 p_2 、 v_2 、 h_2 及 S_2 表示 YY' 间流体的压强、速度、相对于参考面的高度及截面积,则有 $\Delta V_2 = S_2 v_2 \Delta t$ 。现在分析在 Δt 时间内外力对这段流体所做的功以及由此而引起的机械能变化。

在流动过程中,由于理想流体没有黏性,因此, XY 段流体所受的外力是周围流体对它的压力,而对其做功的只有流管中 XY 段以外的流体对它的压力,即图中的 F_1 和 F_2 ,且有

$$F_1 = p_1 S_1 \quad F_2 = p_2 S_2$$

F_1 沿着流体流动方向做正功, F_2 逆着流动方向做负功。 X 面的位移是 $v_1 \Delta t$, Y 面的位移是 $v_2 \Delta t$,故当流体从 XY 移至 $X'Y'$ 时,两力所做的总功为

$$A = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

上式中的 $S_1 v_1 \Delta t$ 和 $S_2 v_2 \Delta t$ 分别等于流管中 XX' 段和 YY' 段的流体体积。由于是理想流体作稳定流动,因此这两段流体体积相等,用 ΔV 表示,上式可写成

$$A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \quad (a)$$

现在讨论 XY 段流体流至 $X'Y'$ 时的机械能增量。由图 3-3 可以看出,在流动过程前后 X' 与 Y 之间的那段流体的运动状态没有变化,所以 XY 段流体流至 $X'Y'$ 时的机械能增量仅反映在 XX' 和 YY' 两段流体上。设 XX' 段流体的机械能为 E_1 , YY' 段流体的机械能为 E_2 ,从连续性方程可知, XX' 和 YY' 两段流体的质量相等,现设为 m ,若机械能增量用 ΔE 表示,则

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right) \quad (b)$$

由功能原理有

$$A = \Delta E$$

将(a)和(b)式代入上式得:

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right)$$

移项得:

$$p_1 \Delta V + \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = p_2 \Delta V + \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

以 ΔV 除各项得:

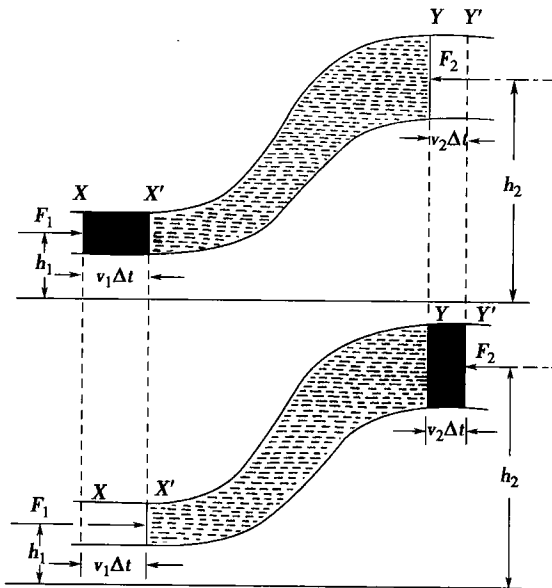


图 3-3 伯努利方程的推导



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 \quad (3-5)$$

式中 $\rho = m/\Delta V$ 是流体的密度。

因为 X 和 Y 是在流管上任意选取的两个截面,所以对同一流管的任一垂直截面来说,上式可表示为

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{常量} \quad (3-6)$$

式(3-5)或式(3-6)称为伯努利方程(Bernoulli's equation),该方程说明,理想流体在流管中作稳定流动时,单位体积的动能、重力势能以及该点的压强之和为一常量。伯努利方程中的三项都具有压强的量纲,其中 $\frac{1}{2}\rho v^2$ 项与流速有关,常称之为动压(dynamical pressure), p 和 ρgh 项与流速无关, p 常称之为静压(static pressure)。

如果流体在水平管中流动($h_1 = h_2$),则流体的势能在流动过程中不变,式(3-6)变成

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{常量} \quad (3-7)$$

从上式可以看出,在水平管中流动的流体,流速小的地方压强较大,流速大的地方压强较小。

[例 3-1] 设有流量为 $0.12\text{m}^3\text{s}^{-1}$ 的水流过图 3-4 所示的细管。A 点的压强为 $2 \times 10^5\text{Pa}$,A 点的截面积为 100cm^2 ,B 点的截面积为 60cm^2 。假设水的黏性可以忽略不计,求 A、B 两点的流速和 B 点的压强。

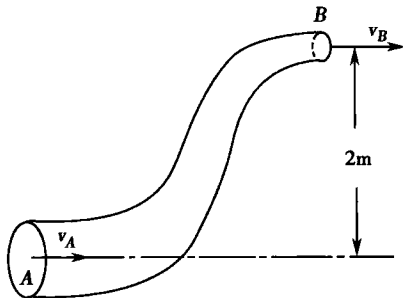


图 3-4 例 3-1

解:已知 $Q = 0.12\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_A = 10^{-2}\text{m}^2$, $S_B = 60 \times 10^{-4}\text{m}^2$, $p_A = 2 \times 10^5\text{Pa}$,设 A 点所在水平面为参考面,则有 $h_A = 0\text{m}$, $h_B = 2\text{m}$ 。

水可看作不可压缩流体,根据连续性方程有

$$S_A v_A = S_B v_B = Q$$

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0.12}{10^{-2}} = 12(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{0.12}{60 \times 10^{-4}} = 20(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

又根据伯努利方程可知

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gh_B$$

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho gh_B$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 12^2 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 20^2 - 1000 \times 9.8 \times 2 \\ &= 5.24 \times 10^4 (\text{Pa}) \end{aligned}$$

二、伯努利方程的应用

1. 空吸作用 若液体在截面积不均匀的水平管中作稳定流动时,由连续性方程知,截面积小处流速大;由式(3-7)知,速度大处压强小。因此,对水平管中而言,截面积小的地方压强也小。当管中某处截面积小到一定程度时可出现负压,即小于大气压 p_0 ,若在此处开一小孔 c,液体不但不会流出,且外面的空气反而会被吸进来。如果在小孔处插一根细管,细管下端放入盛有另一种液体(密度为 ρ)的容器中,只要满足 $p_0 - p_c > \rho gh_c$,容器中的液体就会被吸到水平管中,这就是空吸作用。 p_c 表示小孔处压强, h_c 是小孔与容器中液面间的距离。



水流抽气机、喷雾器及各种射流真空泵都利用了空吸作用。

2. 流量计 流体的流量可用汾丘里流量计(Venturi meter)来测量,它是一段水平管,两端的截面与管道截面一样大,中间逐渐缩小以保证流体稳定流动。图 3-5 所示的水平管是用来测液体流量的简单装置。设管子粗、细两处的截面积、压强、流速分别为 S_1 、 p_1 、 v_1 和 S_2 、 p_2 、 v_2 ,粗、细两处竖直管内的液面高度差为 h ,根据水平管伯努利方程有

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

由连续性方程有

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

将上二式联立求解,并将 $p_1 - p_2 = \rho gh$ 代入可得

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

因此,流体的流量为

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} \quad (3-8)$$

上式中, S_1 和 S_2 为已知,只要测出两竖直管中液面的高度差 h ,就可求出管中液体的流量。图 3-5 所示的装置稍加改变即可用来测气体的流量。

3. 流速计 皮托管(Pitot tube)是一种测流体流速的装置,图 3-6 是它的基本结构。图中 a 是一根直管,b 是一根直角弯管,直管下端的管口截面与流体流线平行,而弯管下端管口截面与流体流线垂直。流体在弯管下端 d 处受阻,形成流速为零的“滞止区”。这时两管所测出的压强是不相同的,设管中流体为液体,则比较图中 c、d 两处的压强可得

$$p_c + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_d \quad (3-9)$$

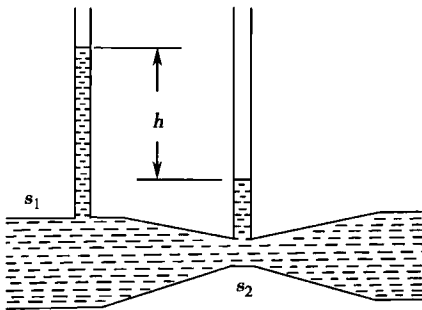


图 3-5 汾丘里流量计

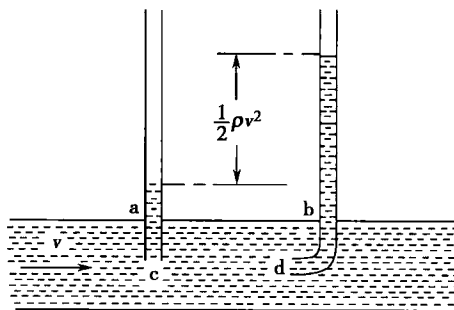


图 3-6 流速计原理

式中 v 是液体在 c 处的流速,对于粗细均匀的这段流管来说也就是管中各点的流速。 p_d 比 p_c 大 $\frac{1}{2}\rho v^2$,这说明流体的动压在滞止区全部转化成了静压。对该装置,只要测出两管的液面高度差,便可得到 p_d 与 p_c 的差值,进而求得流速 v 。

图 3-7 是实际所用的皮托管的示意图,测量时把它放在待测流速的流体(密度为 ρ)中,使 A 孔正对着流体前进方向,形成“滞止区”,M 孔的孔面平行与流线。两处的压强差可从 U 形管中液面的高度差测得,即

$$p_A - p_M = (\rho' - \rho)gh$$

式中 h 是 U 形管中液面的高度差, ρ' 是 U 形管中工作液体的密度。据式(3-9)有

$$p_A - p_M = \frac{1}{2}\rho v^2$$



由以上两式可得流速

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho}} \quad (3-10)$$

4. 体位对血压的影响 如果流体在等截面管中流动,若流速不变,由伯努利方程可得

$$\begin{aligned} p_1 + \rho gh_1 &= p_2 + \rho gh_2 \\ p + \rho gh &= \text{常量} \end{aligned} \quad (3-11)$$

在这种情况下,高处的压强较小,而低处的压强较大。

用上述关系,可解释体位变化对血压的影响。如图 3-8 所示,某人取平卧位时头部动脉压为 12.67kPa*,静脉压为 0.67kPa,而当取直立位时头部动脉压则变为 6.80kPa,静脉压变为 -5.20kPa,减少的 5.87kPa 是由高度改变所造成的。同理,对于足部来说,由平卧位改为直立位时,动脉压将由 12.67kPa 变成 24.40kPa,静脉压将由 0.67kPa 变成 12.40kPa,增加的 11.73kPa 也是由高度原因所致。因此,测量血压时一定要注意体位和所测量的部位。(* 1mmHg=0.13328kPa)

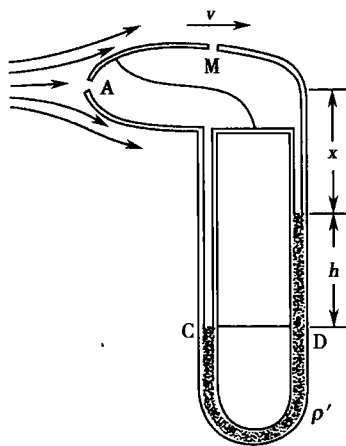


图 3-7 皮托管

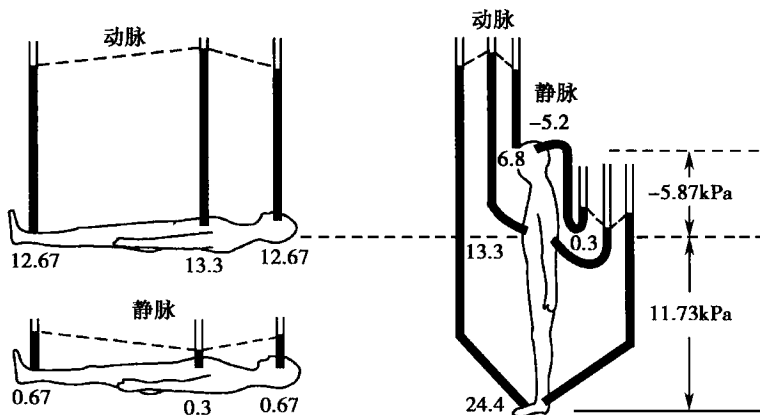


图 3-8 体位对血压的影响

第三节 黏性流体的流动

一、层流和湍流

在实际流体中,像甘油、糖浆之类的黏性是不能忽略的,称它们为黏性流体。黏性流体的流动状态有层流(laminar flow)、湍流(turbulent flow)及过渡流动三种情况。

1. 层流 所谓层流,即流体的分层流动状态。在此状态,相邻两层流体之间只作相对滑动,层流间没有横向混杂。甘油是黏性流体,若在一支垂直放置的滴定管中倒入无色甘油,其上面再加上一段着色的甘油,打开下端活塞甘油流出,从着色甘油的流动形态可以看出管中甘油的流速并不完全相同。如图 3-9 所示。愈靠近管壁速度愈



图 3-9 黏性流体的流动



慢,与管壁接触的液层附着在管壁上,速度为零,中央轴线处速度最大。流体沿竖直方向分成许多平行于管轴的圆筒形薄层,各流体层之间有相对滑动,这种现象说明管内的流体是分层流动的,图 3-10 是层流的示意图。

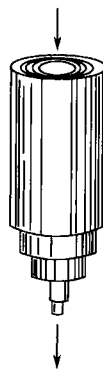


图 3-10 层流示意图

2. 湍流 当流体流动的速度超过一定数值时,流体不再保持分层流动状态,而有可能向各个方向运动,即在垂直于流层的方向有分速度,因而各流体层将混淆起来,并有可能形成旋涡,整个流动显得杂乱而不稳定,这样的流动状态叫做湍流。流体作湍流时所消耗的能量比层流多,湍流区别于层流的特点之一是它能发出声音,在水管及河流中都可以看到这些现象并听到湍流声。

介于层流与湍流间的流动状态很不稳定,称为过渡流动。

二、牛顿黏滞定律

实际流体在流动时常表现出黏性(或称黏滞性),这是因为,流体在层流时,相邻两层流体作相对滑动,两流层之间存在着切向的阻碍相对滑动的相互作用力,此力即为前面已提到的内摩擦力(internal friction)或黏性力(viscous force)。黏性力是由分子间的相互作用力引起的,液体的黏性力比气体大得多。

在层流中,黏性力的大小与从一层到另一层流速变化的快慢程度有关。如图 3-11 所示,流体沿 yz 平面分层流动,设相距 Δx 的两流层的速度差为 Δv ,比值 $\Delta v/\Delta x$ 表示在 Δx 距离内速度的平均变化率。若两流层无限接近($\Delta x \rightarrow 0$),比值 $\Delta v/\Delta x$ 的极限为 dv/dx ,表示流层速度沿 x 方向的变化率,称为速度梯度(velocity gradient)。实验表明,黏性力 f 的大小与两流层的接触面积 S 以及接触处的速度梯度 dv/dx 成正比,即

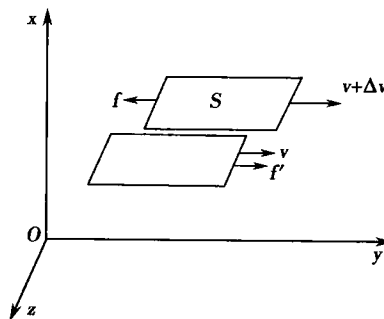


图 3-11 黏性力、速度梯度

$$f = \eta S \frac{dv}{dx} \quad (3-12)$$

上式称为牛顿黏滞定律,式中比例系数 η 称为流体的黏度(viscosity)。 η 值的大小取决于流体的性质,并和温度有关。一般来说,液体的 η 值随温度升高而减小,气体的 η 值随温度升高而增大。在国际单位制中, η 的单位是 $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ 或 $\text{Pa} \cdot \text{s}$,有时也用 P (Poise,泊), $1\text{P} = 0.1\text{Pa} \cdot \text{s}$ 。表 3-1 列出了几种液体的 η 值。

表 3-1 一些液体的黏度

液体	温度	黏度 $\eta(\text{Pa} \cdot \text{s})$	液体	温度	黏度 $\eta(\text{Pa} \cdot \text{s})$
水	0℃	1.8×10^{-3}	汞	100℃	1.0×10^{-3}
水	20℃	1.000×10^{-3}	蓖麻油	7.5℃	1225.0×10^{-3}
水	37℃	0.69×10^{-3}	蓖麻油	50℃	122.7×10^{-3}
水	100℃	0.3×10^{-3}	血液	37℃	$2.0 \sim 4.0 \times 10^{-3}$
汞	0℃	1.68×10^{-3}	血浆	37℃	$1.0 \sim 1.4 \times 10^{-3}$
汞	20℃	1.55×10^{-3}	血清	37℃	$0.9 \sim 1.2 \times 10^{-3}$

通过证明,式(3-12)也可写为



$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (3-13)$$

式中 $\tau = f/s$ 为切应力, 表示作用在流层单位面积上的内摩擦力; $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dx}$ 为切变率, 即切应变 γ 对时间的变化率。在生物力学中, 牛顿黏滞定律常采用式(3-13)的形式。

遵循牛顿黏滞定律的流体称为牛顿流体(Newtonian fluid), 这种流体的黏度在一定温度下具有一定的数值, 即切应力 τ 与切变率 $\dot{\gamma}$ 成正比, 水、血浆、乙醇、稀油等都属于牛顿流体。不遵循牛顿黏滞定律的流体称为非牛顿流体, 如血液、悬浮液、原油等。非牛顿流体的黏度不是常量, 即切应力与切变率不成正比关系。

血液是一种非均匀液体, 含有大量血细胞。分析血液的黏性, 对于某些疾病的诊断具有重要的参考价值。牛顿黏滞定律是研究血液流动及生物材料力学性质的重要基础。

三、雷诺数

黏性流体的流动状态是层流还是湍流, 不仅决定于流动速度 v , 还与流体的密度 ρ 、黏度 η 以及管子的半径 r 有关。雷诺提出了一个无量纲的数, 作为决定层流向湍流转变的判据, 即

$$R_e = \frac{\rho v r}{\eta} \quad (3-14)$$

R_e 称为流动的雷诺数(Reynolds number)。实验结果表明: ①当 $R_e < 1000$ 时, 流体作层流; ②当 $R_e > 1500$ 时, 流体作湍流; ③当 $1000 < R_e < 1500$ 时, 流动状态很不稳定(可以由层流变为湍流, 或相反), 即过渡流动。

从式(3-14)可以看出, 流体的黏度愈小、密度愈大, 愈容易发生湍流, 而细的管子不易出现湍流。如果管子是弯曲的, 则在较低的 R_e 值也可发生湍流, 且弯曲程度愈大 R_e 的临界值就愈低。因此流体在管道中流动时, 凡有急弯或分支的地方, 就容易发生湍流。对生物循环系统, 人的心脏、主动脉以及支气管中的某些部位都是容易出现湍流的地方。临床医生常根据听诊器听到的湍流声来辨别血流和呼吸是否正常。

[例 3-2] 设主动脉的内半径为 0.01m , 血液的流速、黏度、密度分别为 $v = 0.25\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\eta = 3.0 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$ 、 $\rho = 1.05 \times 10^3\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 求雷诺数并判断血液以何种状态流动。

解: 雷诺数为

$$R_e = \frac{1.05 \times 10^3 \times 0.25 \times 0.01}{3.0 \times 10^{-3}} = 875$$

这一数值小于 1000, 所以血液在主动脉中为层流。

第四节 黏性流体的运动规律

一、黏性流体的伯努利方程

在理想流体的伯努利方程推导中, 我们忽略了流体的黏性和可压缩性。讨论黏性流体的运动规律时, 可压缩性仍可忽略, 但流体的黏性必须考虑。黏性流体在流动时存在黏性力, 流体必须克服黏性力做功, 因而要消耗流体运动的部分机械能(使之转化为热能)。这就是说, 流体沿流管流动的过程中, 总机械能将不断减少。对图 3-3 所示的流管, 如果是黏性流体做稳定流动, 在 XY 段流体流至 $X'Y'$ 的过程中, 单位体积流体因黏性力的存在而引起的能量损耗若为 ΔE , 则可得到如下关系

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta E \quad (3-15)$$



式中 v 和 p 分别为流管横截面上速度和压强的平均值。上式即为黏性流体做稳定流动时的伯努利方程。

如果流体在水平细管中稳定流动, 由于 $h_1 = h_2$, $v_1 = v_2$, 上式变为:

$$p_1 = p_2 + \Delta E$$

可以看出 $p_1 > p_2$ 。因此, 在水平均匀细管的两端, 必须维持一定的压强差, 才能使黏性流体作稳定运动。

若流体在开放的粗细均匀的管道中维持稳定流动, 由于 $v_1 = v_2$, $p_1 = p_2 = p_0$ (大气压), 则有

$$\rho gh_1 - \rho gh_2 = \Delta E$$

即必须有高度差才能维持稳定流动。

二、泊肃叶定律

黏性流体在等截面水平细管中做稳定流动时, 如果雷诺数不大, 则流动的形态是层流。由黏性流体的伯努利方程可知, 要使管内的流体匀速流动, 必须有一个外力来抵消黏性力, 这个外力就是来自管子两端的压强差。实验表明, 在等截面水平细圆管内作层流的黏性流体, 其体积流量与管子两端的压强差 Δp 成正比, 即

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta L} \quad (3-16)$$

式中 R 是管子的半径, η 是流体的黏度, L 是管子的长度。上式称为泊肃叶定律 (Poiseuille's law)。

下面我们来推导泊肃叶定律:

1. 速度分布 设黏性流体在半径为 R 、长度为 L 的水平管内分层流动, 管左端的压强为 p_1 , 管右端的压强为 p_2 , 且 $p_1 > p_2$, 即流体向右流动。

在管中取与管同轴、半径为 r 的圆柱形流体元 (图 3-12) 为研究对象, 它所受到的压力差为

$$\Delta F = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

周围流体作用在该圆柱形流体元表面的黏性力为

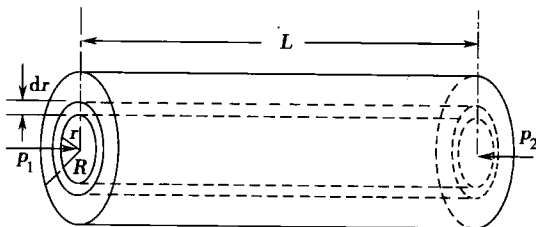


图 3-12 泊肃叶定律的推导

$$f = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

式中负号表示 v 随 r 的增大而减小, dv/dr 是流体在半径 r 处的速度梯度。

由于管内流体做稳定流动, 所以以上两力合力为零, 即

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

$$\text{由上式可得} \quad dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r dr$$

$$\text{对上式积分得到} \quad v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta L} r^2 + C$$

$$\text{根据 } r=R \text{ 时, } v=0 \text{ 的条件, 求得 } C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} R^2$$

$$\text{代入上式得} \quad v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (3-17)$$

式(3-17)给出了流体在等截面水平细圆管中稳定流动时, 流速随半径的变化关系。从此式



可以看出,管轴($r=0$)处流速有最大值 $\frac{p_1-p_2}{4\eta L}R^2$,流速 v 沿管径方向呈抛物线分布。

2. 流量 在管中取一半径为 r 、厚度为 dr 的圆管状流体元,该流体元的截面积为 $2\pi r dr$,流体通过该流体元的流量为

$$dQ = v 2\pi r dr$$

式中 v 是流体在半径 r 处的流速。将式(3-17)代入得

$$dQ = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} (R^2 - r^2) r dr$$

那么,通过整个管截面的流量为

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

积分后得

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L}$$

此式即为泊肃叶定律,如果令 $R_f = 8\eta L / \pi R^4$,泊肃叶定律可改写成

$$Q = \frac{\Delta p}{R_f} \quad (3-18)$$

当管子的长度、半径以及流体的黏度确定时, R_f 是一定值。式(3-18)表明黏性流体在等截面水平细圆管中稳定流动时,流量 Q 与管两端的压强差 Δp 成正比,与 R_f 成反比。这与电学中的欧姆定律极为相似,所以把 R_f 称为流阻(flow resistance)(在循环系统中称为外周阻力)。值得注意的是,流阻与管半径的四次方成反比,半径的微小变化就会对流阻造成很大影响。血管可以收缩和舒张,其管径的变化对血液流量的影响是很显著的。

如果流体流过几个“串联”的流管,则总流阻等于各流管流阻之和。若几个流管相“并联”,则总流阻与各流管流阻的关系与电阻并联的情形相同。

[例 3-3] 成年人主动脉的半径约为 $1.3 \times 10^{-2} \text{ m}$,问在一段 0.2 m 距离内的流阻 R_f 和压强降落 Δp 是多少? 设血流量为 $1.00 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta = 3.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

$$\text{解: } R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8 \times 3.0 \times 10^{-3} \times 0.2}{3.14 \times (1.3 \times 10^{-2})^4} = 5.97 \times 10^4 (\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3})$$

$$\Delta p = R_f Q = 5.97 \times 10^4 \times 1.0 \times 10^{-4} = 5.97 (\text{Pa})$$

可见在主动脉中,血压的下降是微不足道的。

三、斯托克司定律

当物体在黏性流体中作匀速运动时,物体表面附着一层流体,此层流体随物体一起运动,因而与周围流体之间存在黏性力,所以物体在运动过程中必须克服这一阻力。如果物体是球形的,且流体对于球体作层流运动,则球体所受阻力的大小为

$$f = 6\pi\eta v R \quad (3-19)$$

式中 R 是球体的半径, v 是球体相对于流体的速度, η 是流体的黏度。式(3-19)称为斯托克司定律(Stokes's law)。

设在黏性液体内有一半径为 R 的小球,它受重力作用而下沉。小球所受合力大小为

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma g - 6\pi\eta v R$$

其中 ρ 是球体密度, σ 是液体密度, $\frac{4}{3} \pi R^3 \sigma g$ 为向上的浮力, $6\pi\eta v R$ 为向上的阻力。

在此合力作用下,小球以加速度下沉。但随着速度 v 的增加,阻力愈来愈大,最后当合力 $F=0$ 时,它将匀速下降。此时有

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \sigma) g = 6\pi\eta v R$$



所以

$$v = \frac{2}{9} \frac{R^2 (\rho - \sigma) g}{\eta} \quad (3-20)$$

该速度 v 称为收尾速度 (terminal velocity) 或沉降速度。由式 (3-20) 可知, 当小球 (空气中的尘粒、黏性液体中的细胞、大分子、胶粒等) 在黏性流体中下沉时, 沉降速度与颗粒大小、密度差以及重力加速度 g 成正比, 与流体的黏度成反比。对于颗粒很小的微粒, 我们利用高速离心机来增加有效 g 值, 就可以加快它的沉降速度。在生物化学中常用到沉降系数这一概念, 所谓沉降系数是沉降速度与离心机向心加速度的比。

式 (3-20) 也常被用来测定液体的黏度, 其方法是, 把一个已知 R 值和 ρ 值的小球放入待测液体中下沉, 测出它的沉降速度 v 值, 就可计算出液体的黏度 η 。

* 第五节 血液在循环系统中的流动

人体的循环系统包括动力和管路两部分, 其动力部分是心脏, 管路部分是血管。血液在循环系统中的流动是比较复杂的。这是因为: ①血液是含有多种血细胞的非牛顿流体; ②心脏、血管都具有弹性, 并受神经控制。下面首先简要介绍血液的特性, 然后利用流体运动的基本规律来分析血液流动时的心脏做功、血流速度分布、血压等问题。

一、血液的组成及特性

血液 (blood) 由血浆和血细胞两部分组成。血浆部分的体积约占血液的 55%~70%, 其中有 90% 以上的水、7% 左右的蛋白质和 0.9% 左右的无机盐, 其余是非蛋白质的无机盐。血细胞部分的体积约占血液的 30%~45% (称血细胞比容), 其中红细胞 (red blood cell, RBC) 最多, 约占血细胞部分的 99.9%, 其余的 0.1% 中是白细胞和血小板。红细胞是双凹圆盘形, 直径约 $7.6\mu\text{m}$, 厚度约 $2.8\mu\text{m}$ 。白细胞较圆, 呈球状, 有核, 较红细胞稍大。血小板较小, 直径约 $2.5\mu\text{m}$ 。

血液的比重约在 1.050~1.060 之间, 血浆的比重约在 1.025~1.030 之间, 红细胞的比重约为 1.098。血液中红细胞数愈多则血液比重愈大; 血浆中蛋白质含量愈高则血浆比重愈大。红细胞比重大于血浆, 因此红细胞在重力作用下将从悬浮液中沉淀出来, 这种现象叫沉降, 沉降的速度叫沉降率 (sedimentation rate)。红细胞的沉降率不仅取决于它本身的密度和尺寸、血浆的密度和黏度, 而且还与红细胞的形状和方位有关。此外, 红细胞聚集和红细胞串之间的相互作用, 也都将影响红细胞的沉降率。进行血沉试验时, 通过做沉降曲线来确定某时刻红细胞的沉降率。

血液是黏性流体, 是一种由水、无机化合物、溶解气体、各种大小的有机分子蛋白质、脂质和糖等高分子组成的复杂溶液, 其中又悬浮着大量的血细胞, 因此血液是一种非牛顿型流体, 即血液的黏度不是常数。常用以下几种黏度描述血液的黏性, ①表观黏度: 即流体的切应力与切变率的比值。牛顿流体的表观黏度就是它的黏度, 是一个与切变率无关的量。非牛顿流体的表观黏度是一个随切变率变化的量。实验指出, 在其他条件不变时, 血液的表观黏度随切变率的增大而减小, 这种现象叫剪切稀化。当切变率增大到一定限度时, 表观黏度便不再减小而趋于恒定, 此时的血液流动状态接近于牛顿流体的流动。②相对黏度: 即流体表观黏度与其溶剂黏度的比值 (亦称比黏度)。全血黏度与血浆黏度的比值, 称为血液对于血浆的相对黏度。③还原黏度: 血液黏度的大小除与浓度有关外, 还与分子 (或颗粒) 结构以及分子间 (或颗粒间) 的相互作用有关。前者对黏度的影响称为浓度黏度, 后者对黏度的影响称为结构黏度, 结构黏度比浓度黏度更能反映血液的物理特性, 若消除浓度影响仅反映结构黏度时, 称为全血还原黏度。



血液具有屈服应力(yield stress)。非牛顿流体中的一些流体(如血液)具有这样的特点,即只有当切应力超过某一数值后,才发生流动,低于这一数值则不发生流动。这个能够引起流体发生流动的最低切变应力值,叫做流应力,又叫屈服应力。这种流体称为塑性流体。血液的屈服应力是纤维蛋白原浓度和红细胞比容的函数,当红细胞比容小于 0.10 时没有屈服应力,大于 0.10 才有屈服应力。

血液有黏弹性(viscoelasticity)。在非稳定流动条件下,血液既表现出黏性又表现出弹性,即应力不仅取决于瞬时切变率,而且与历史过程有关。血液在体内的流动都是非稳定的,因此血液具有黏弹性,是黏弹体。在分析大血管血流时,为简化问题通常不计黏弹性,但血管较小时,血液的黏弹性应予考虑。

血液具有触变性(thixotropy)。血液在非稳定流动状态,其表观黏度除了与切变率大小有关外,还与切应力的作用时间有关,即在切变率恒定时,血液黏度会随切应力施加时间的延长而减小,这就是血液的触变性。需要说明的是,若切应力施加时间足够长,黏度达一定数值后不再随时间改变,其数值大小取决于切变率。

血液还有其他一些特性,如血液的成分、血管直径、血细胞的聚集性和变形性、温度等都对血液黏度有影响。

二、心脏做功

血液循环由心脏做功来维持。为了讨论问题方便,把整个心血管系统简化为如图 3-13 所表示的物理模型。左右两心室相当于两个唧筒,当左(右)心室收缩(即唧筒容积减小)时瓣膜开放,血液从左(右)心室射入主(肺)动脉;舒张时(即唧筒容积增大)瓣膜关闭,停止射血。整个循环系统由体循环和肺循环两部分组成,血流方向如图中箭头所示。左心室供血给体循环,右心室供血给肺循环。计算心脏做功有两种方法。

其一,心脏所做的功等于左、右两心室做功之和。设左心室每收缩一次做功为 A_L 、平均压强为 p_L 、容积变化为 ΔV_L ;右心室每收缩一次做功为 A_R 、平均压强为 p_R 、容积变化为 ΔV_R ;则心脏每收缩一次所做的功

$$A = A_L + A_R = p_L \Delta V_L + p_R \Delta V_R$$

其二,根据功能关系,心脏所做的功应等于血液流经心脏前后的能量变化。设单位体积的血液进入左心时的能量为 E_{L1} ,离开左心时的能量为 E_{L2} ,则左心对单位体积血液所做的功应为 A'_L

$$A'_L = E_{L2} - E_{L1}$$

同理,右心对单位体积血液所做的功 A'_R 与单位体积血液进入右心时的能量 E_{R1} 和离开右心时的能量 E_{R2} 之间的关系为

$$A'_R = E_{R2} - E_{R1}$$

心脏对单位体积血液所做的功 A' 应为

$$A' = A'_L + A'_R = (E_{L2} - E_{L1}) + (E_{R2} - E_{R1})$$

根据本章第二节中单位体积流体在流动时的能量算法,并考虑到进入心脏时的血流速度和血压都很小,可视为零,忽略血液进出心脏时的高度变化,则有

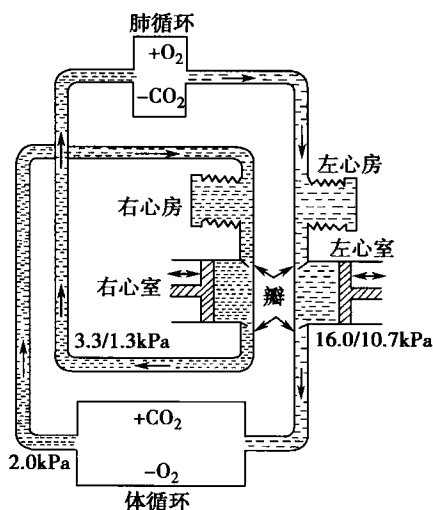


图 3-13 心脏做功的物理模型



$$A' = p_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 + p_R + \frac{1}{2} \rho v_R^2$$

式中 ρ 表示血液的密度, p_L 表示血液离开左心室时的平均压强(即主动脉平均血压), v_L 表示离开左心室时的血流速度, p_R 表示血液离开右心室时的平均压强(即肺动脉平均血压), v_R 表示离开右心室时的血流速度。因肺动脉平均血压大约是主动脉平均血压的 $1/6$, 并且血液离开左、右心室时的流速相同, 所以

$$A' = p_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 + \frac{1}{6} p_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 = \frac{7}{6} p_L + \rho v_L^2 \quad (3-21)$$

若测出主动脉血压及血液流速, 可根据上式求出心脏做功多少, 从而了解心功能的情况。

三、血流速度分布

我们知道, 心脏的射血是断续的, 但由于血管的弹性、血流本身的惯性以及内外摩擦等原因, 使血液在血管中的流动基本上是连续的。当心脏收缩时, 有相当数量的血液进入原已充满血液的主动脉内, 使得该处的弹性管壁被撑开。此时, 心脏推动血液所做的功转化为血管的弹性势能。心脏停止收缩, 扩张了的那部分血管壁也跟着收缩, 驱使血液向前流动; 结果又使前面血管的管壁跟着扩张, 如此类推。这种过程与波动在弹性介质中的传播类似, 因此常称之为脉搏波(pulse wave)。脉搏波的传播速度约为 $8 \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。应该注意, 脉搏波的传播速度和血液的流速是不同的。

血液在循环系统中可近似视为不可压缩液体在管中作稳定流动。由于血管的垂直总截面面积从动脉到毛细血管逐渐增大, 而从毛细血管到静脉又逐渐减小, 由连续性原理可知, 血流速度从动脉到毛细血管逐渐减慢, 而从毛细血管到静脉又逐渐加快, 如图 3-14 所示。但需要说明的是: ①由于血管有分支, 因而截面积 S 指的是同类血管的总截面积; ②由于血液是黏性液体, 血管中同一截面上靠近管壁和靠近轴心处的流速并不相等, 因而流速 v 指的是截面上的平均流速。

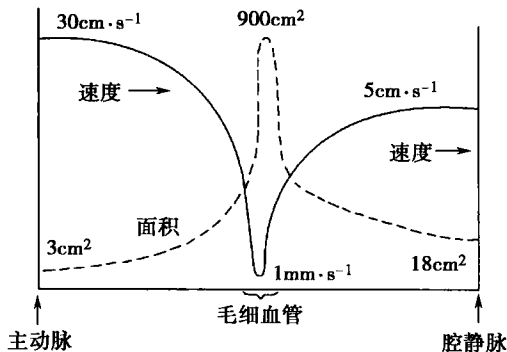


图 3-14 人体各类血管的总截面积和血液的平均流速间的关系

四、血流过程中的血压分布

血压是血管内血液对管壁的侧压强, 主动脉中的血压随着心脏的收缩和舒张周期性变化。当左心室收缩而向主动脉射血时, 主动脉中的血压达到的最高值, 称为收缩压(systolic pressure)。在左心室舒张期, 主动脉回缩, 将血液逐渐注入分支血管, 血压随之下降并达到最低值, 此最低值称为舒张压(diastolic pressure)。收缩压与舒张压之差, 称为脉压(pulse pressure)。脉压随着血管远离心脏而减小, 到了小动脉几乎消失。一个心动周期中动脉血压的平均值 \bar{p} 称为平均动脉压(mean arterial pressure), 常用来说明主动脉中血压的平均情况。如图 3-15 所示, 平均动脉压等于图中积分面积 $\int_0^T p(t) dt$ 与心动周期 T 之比, 即, $\bar{p} = (1/T) \int_0^T p(t) dt$, 为了计算方便, 平时常使用舒张压加上 $1/3$ 脉压来估算。需要注意的是平均动脉压并不是收缩压和舒张压的平均值。



血压的高低与血液流量、流阻及血管的柔软程度有关,用生理学上术语来说,就是与心输出量、外周阻力及血管的顺应性有关。由于血液是黏性流体,有内摩擦力做功消耗机械能,因此血液从心室射出后,它的血压在流动过程中是不断下降的。图 3-16 代表全部血液循环系统的血压变化曲线。

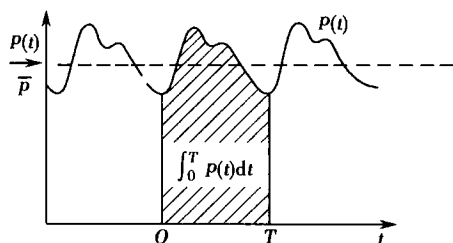


图 3-15 平均动脉压

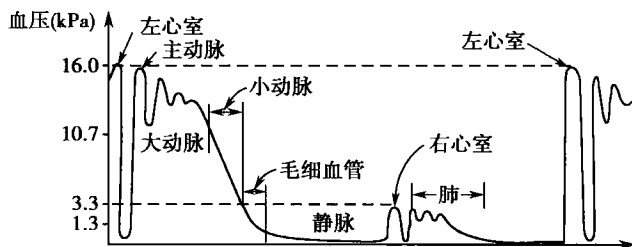


图 3-16 心血管系统的血压变化

心脏内的血流情况比在血管中复杂的多,一是它的形态结构较特殊,另外它还受神经系统控制和外周血流的影响。近几年,有人利用磁共振成像技术,观察心流场的流线及涡旋,由此了解心脏内的血流规律,为心脏内血液流动的研究提供一种新的方法。

血液的黏弹性和血液循环方面的知识在生理学和医学中十分重要,这方面的许多问题并不能只用物理学来解释,涉及生理学和医学方面的问题,这里不进行讨论。

思考题与习题三

3-1 若两只船平行前进时靠得较近,为什么它们极易碰撞?

3-2 为什么自来水沿一竖直管道向下流时,形成一连续不断的水流,而当水从高处的水龙头自由下落时,则断裂成水滴,试说明之。

3-3 有人认为从连续性方程来看,管子愈粗流速愈小,而从泊肃叶定律来看,管子愈粗流速愈大,两者似有矛盾,你认为如何?为什么?

3-4 在水管的某一点,水的流速为 $2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,高出大气压的计示压强为 10^4Pa ,设水管的另一一点的高度比第一点降低了 1m ,如果在第二点处水管的横截面积是第一点的 $1/2$,求第二点处的计示压强。(忽略水的黏性) (13.8kPa)

3-5 水在粗细不均匀的水平管中作稳定流动,已知截面 S_1 处的压强为 110Pa ,流速为 $0.2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,截面 S_2 处的压强为 5Pa ,求 S_2 处的流速。 (0.5m · s⁻¹)

3-6 水在截面不同的水平管中作稳定流动,出口处的截面积为管的最细处的 3 倍,若出口处的流速为 $2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,问最细处的压强为多少?若在此最细处开一小孔,水会不会流出来。 (85kPa)

3-7 一直立圆柱形容器,高 0.2m ,直径 0.1m ,顶部开启,底部有一面积为 10^{-4}m^2 的小孔,水以每秒 $1.4 \times 10^{-4}\text{m}^3$ 的快慢由水管自上面放入容器中。问容器内水面可上升的高度?若达到该高度时不再放水,求容器内的水流尽需多少时间。 (0.1m; 11.2s)

3-8 一种测流速的装置如图 3-17 所示。设 U 形管内装有密度为 ρ' 的液体,在水平管中有密度为 ρ ($\rho < \rho'$) 的液体做稳定流动,已知水平管中粗、细两处的横截面积分别为 S_A 和 S_B ,测得 U 形管两液面的高度差为 h ,求液

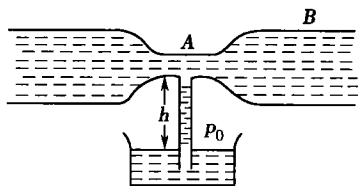


图 3-17 习题 3-8 示意图



体在粗管处的流速 v 。

$$v = s_B \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}}$$

3-9 用如图 3-6 所示的流速计插入流水中测水流速度,设两管中的水柱高度分别为 $5 \times 10^{-3} \text{m}$ 和 $5.4 \times 10^{-2} \text{m}$,求水流速度。 (0.98 m · s⁻¹)

3-10 一条半径为 3mm 的小动脉被一硬斑部分阻塞,此狭窄段的有效半径为 2mm,血流平均速度为 50 cm · s⁻¹,设血液黏度为 $3.0 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$,密度为 $1.05 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,试求:

(1) 未变窄处的血流平均速度。 (0.22 m · s⁻¹)

(2) 会不会发生湍流。 (不发生湍流,因 $R_e = 350$)

(3) 狭窄处的血流动压强。 (131.2 Pa)

3-11 20℃ 的水在半径为 $1 \times 10^{-2} \text{m}$ 的水平均匀圆管内流动,如果在管轴处的流速为 $0.1 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,则由于黏滞性,水沿管子流动 10m 后,压强降落了多少? (40 Pa)

3-12 设某人的心输出量为 $0.83 \times 10^{-4} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$,体循环的总压强差为 12.0 kPa,试求此人体循环的总流阻(即总外周阻力)是多少 $\text{N} \cdot \text{S} \cdot \text{m}^{-5}$ 。 ($1.44 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{S} \cdot \text{m}^{-5}$)

3-13 假设排尿时,尿从计示压强为 40 mmHg 的膀胱经过尿道后由尿道口排出,已知尿道长 4 cm,体积流量为 $21 \text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$,尿的黏度为 $6.9 \times 10^{-4} \text{Pa} \cdot \text{s}$,求尿道的有效直径。 (1.4 mm)

3-14 一个红细胞可以近似的认为是一个半径为 $2.0 \times 10^{-6} \text{m}$ 的小球,它的密度是 $1.09 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。试计算它在重力作用下在 37℃ 的血液中沉淀 1 cm 所需的时间。假设血浆的黏度为 $1.2 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$,密度为 $1.04 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。如果利用一台加速度($\omega^2 r$)为 $10^5 g$ 的超速离心机,问沉淀同样距离所需的时间又是多少? ($2.8 \times 10^4 \text{s}$; 0.28 s)

(冀 敏)

第四章 振动

学习要求:

1. 掌握简谐振动的基本规律。
2. 能求解有关简谐振动表达式。
3. 掌握简谐振动的合成求法。

振动(vibration)是自然界中最常见的运动形式之一。如发声体的振动和晶体中的原子不停的振动等。广义地说,任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动。交流电中的电流和电压,电磁波中电场和磁场的周期性变化等,都属于振动的范畴。

物体在一定位置附近所作的来回往复的运动称为机械振动(mechanical vibration)。一切振动现象都具有相似的规律,我们可以从机械振动的分析中,了解振动现象的一般规律。

第一节 简谐振动

简谐振动(simple harmonic motion)是一种最简单、最基本的振动,任何复杂的振动都可以看成是若干个简谐振动的合成。

一、简谐振动方程

对于质量为 m 的物体与轻弹簧组成的弹簧振子,根据胡克定律,物体所受到的弹性力 F 与物体相对平衡位置的位移 x 成正比,即

$$F = -kx \quad (4-1)$$

式中 k 为轻弹簧的劲度系数,负号表示弹性力与物体位移的方向相反。根据牛顿第二定律,物体的运动方程表示为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

式中 k 和 m 均为正量,令 $k/m = \omega^2$,上式可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (4-2)$$

式(4-2)称为简谐振动动力学方程,其解可表示为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4-3)$$

式中 A 和 φ 为积分常数。这种用时间的余弦(或正弦)函数来描述的运动,称为简谐振动。从分析中可以看出,物体只要在形如 $F = -kx$ 的线性回复力的作用下运动,其位移 x 必定满足微分方程(4-2),而这个方程的解即为简谐振动的运动表达式(4-3)。

将式(4-3)对时间求一阶、二阶导数,得简谐振动物体的速度和加速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4-4)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (4-5)$$

可见,物体作简谐振动时,其速度和加速度也随时间作周期性变化。式(4-5)说明,简谐振动的加速度和位移成正比而反向。



二、简谐振动的特征量

对一定的简谐振动来说,其运动表达式(4-3)中的 A 、 ω 和 φ 为常量,它们是决定一具体简谐振动的特征量。

1. 振幅 振动物体离开平衡位置的最大位移,称为振幅(amplitude),常用 A 表示。

2. 周期和频率 振动物体完成一次完整振动所需要的时间,称为振动周期(period),常用 T 表示。在单位时间内所完成的振动次数,称为频率(frequency),常用 ν 表示。振动物体在 2π 秒内所完成的振动次数,称为角频率(angular frequency),常用 ω 表示。显然 ω 、 ν 和 T 三者的关系为

$$\begin{aligned}\nu &= 1/T \\ \omega &= 2\pi\nu = 2\pi/T\end{aligned}\quad (4-6)$$

T 、 ν 和 ω 的单位分别是 s(秒)、Hz(赫兹)和 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (弧度/秒)。考虑到 $k/m = \omega^2$, 并联式(4-6)可知,无阻尼自由振动的 ω 、 ν 和 T 完全决定于振动系统本身的性质,分别称为系统的固有角频率(natural angular frequency)、固有频率和固有周期。

3. 相位和初相位($\omega t + \varphi$) 是决定简谐振动状态的物理量,称为振动的相位(phase)。相位中的 φ 称为初相位(initial phase),单位是 rad(弧度)。相位的概念在比较两个同频率的简谐振动的步调时特别有用。设有下列两个简谐振动

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}$$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

即它们在任意时刻的相位差都等于初相位差而与时间无关。当 $\Delta\varphi = 0$ (或 2π 的整数倍)时,两个振动的步调完全相同,这种情况称为同相(in-phase)。当 $\Delta\varphi = \pi$ (或 π 的奇数倍)时,两个振动的步调相反,这种情况称为反相(antiphase)。

A 和 φ 决定于初始条件(initial condition),即 $t=0$ 时的位移 x_0 和速度 v_0 的值。在式(4-3)和式(4-4)中令 $t=0$

$$\begin{aligned}x_0 &= A \cos \varphi \\ v_0 &= -\omega A \sin \varphi\end{aligned}$$

由以上两式可得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (4-7)$$

$$\varphi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} \quad (4-8)$$

三、简谐振动的矢量图示法

简谐振动可以用一个旋转矢量来描绘。如图 4-1 所示,在 x 轴上任取一点 O 为原点,自 O 点起作一矢量 A 。若矢量 A 以匀角速度 ω 绕原点 O 逆时针旋转,则矢量末端 M 在 x 轴上的投影点 P 就在 x 轴上作简谐振动。设在 $t=0$ 时, A 与 x 轴的夹角为 φ ,经过时间 t 后, A 与 x 轴的夹角变为 $(\omega t + \varphi)$,则投影点 P 相对于原点 O 的位移为

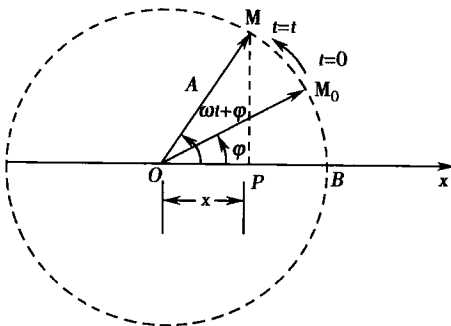


图 4-1 简谐振动的矢量图示法



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

用一个旋转半径为 A 的质点在某一直径上的投影点的运动来表示简谐振动。这种方法称为简谐运动的旋转矢量法。

四、简谐振动的能量

现在以弹簧振子为例来讨论简谐振动中能量的转换和守恒问题。弹簧振子的位移和速度分别由式(4-3)和式(4-4)给出。在任意时刻,系统的动能和弹性势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (4-9)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (4-10)$$

可见系统的动能和势能都随时间作周期性变化。位移(绝对值)最大时,势能达最大值,动能为零;物体通过平衡位置时,势能为零,动能达最大值。

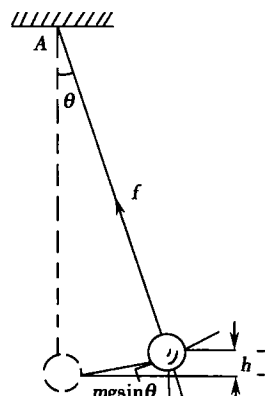
考虑到 $k = m\omega^2$, 由式(4-9)和式(4-10)得弹簧振子的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (4-11)$$

即振动系统的总机械能在振动过程中守恒,该结论对任一简谐振动系统都是正确的。这一点是和弹簧振子在振动过程中没有外力对它做功的条件相符的。

[例 4-1] 一长度为 l 的无弹性细线,一端被固定在 A 点,另一端悬挂一质量为 m 、体积很小的物体。静止时,细线沿竖直方向,物体处于 O 点(图 4-2)。把物体从其平衡位置拉开一段距离,使细线与竖直方向成一小角度 θ ,然后由静止释放,物体就在平衡位置附近往返摆动起来。这种装置称为单摆(simple pendulum)。在忽略空气阻力情况下,证明单摆的振动是简谐振动,并分析其能量。

解: 选择小物体相对平衡位置 O 的角位移 θ 为描述单摆位置的变量。并规定物体处于平衡位置右方 θ 为正。





$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

式中积分常数 θ_0 为单摆的振幅, φ 为初相位。这就证明了, 在偏角 θ 很小时单摆的振动是简谐振动。

单摆系统的机械能包括两部分, 一部分是物体运动的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

另一部分是系统的势能, 即单摆与地球所组成的系统的重力势能

$$E_p = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

式中 h 是当角位移为 θ 时物体相对平衡位置上升的高度。可将 $\cos\theta$ 展开为

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

因为 θ 很小, 我们可以只取上式的前两项。所以

$$E_p = \frac{1}{2} mgl\theta^2 = \frac{1}{2} mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

可见, 单摆系统的动能和势能都是时间的周期函数。

单摆系统的总能量等于其动能和势能之和, 即

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} mgl\theta_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

因为 $\omega^2 = g/l$, 所以上式可化为

$$E = \frac{1}{2} mgl\dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \dot{\theta}_0^2$$

上式表示, 尽管在简谐振动过程中单摆系统的动能和势能都随时间作周期性变化, 但总能量是守恒的, 并与振幅的平方成正比。

第二节 阻尼振动、受迫振动和共振

一、阻尼振动

任何实际的振动都必然要受到阻力的作用而损失能量, 因而振幅也随之减小。振幅随时间减小的振动, 称为阻尼振动(damped vibration)。

实验表明, 当运动物体的速度不太大时, 阻力 f 与物体的速度 v 的大小成正比, 而与物体速度的方向相反, 可以表示为

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \quad (4-12)$$

式中 γ 称为阻力系数(damping coefficient), 它的大小由物体的形状、大小、表面状况以及介质的性质决定。

考虑了阻力的情况下, 物体的振动方程应为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (4-13)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, 式(4-13)可以改写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4-14)$$

这是阻尼振动的动力学方程, 它是一个常系数线性齐次微分方程。式中 ω_0 为振动系统的固有频率, β 称为阻尼常量。在阻尼作用较小(即 $\beta < \omega_0$)时, 式(4-14)的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4-15)$$



其中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A_0 和 φ 是由初始条件决定的积分常数。式(4-15)即阻尼振动的表达式, $A_0 e^{-\beta t}$ 可以看作是随时间变化的振幅, 它随时间按指数规律衰减, 如图 4-3 曲线 a 所示。阻尼作用越大, 振幅衰减的越快。显然阻尼振动不是简谐振动。阻尼振动的周期可表示为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (4-16)$$

可见, 阻尼振动的周期比振动系统的固有周期要长。这种阻尼作用较小的情况称为欠阻尼 (underdamping)。

如阻尼较大, 以致 $\beta > \omega_0$, 这时运动已不是周期性的了。偏离平衡位置的距离随时间按指数规律衰减, 以致需要较长时间系统才能到达平衡位置, 这种情况称为过阻尼 (overdamping), 如图 4-3 曲线 b 所示。

如阻尼的影响介于前两者之间, 且 $\beta = \omega_0$, 系统最快地回到平衡位置并停下来, 这种情况称为临界阻尼 (critical damping), 如图 4-3 曲线 c 所示。

在钟表里, 阻尼振动效应是有害的, 但在电流计里, 如果没有阻尼效应, 指针就会一直摇晃不定。高级电表里使阻尼常量接近临界值。

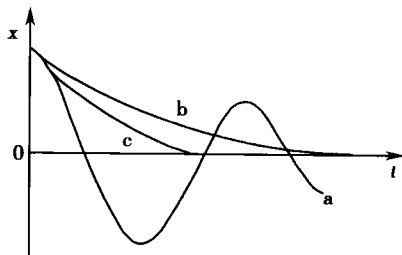


图 4-3 阻尼振动曲线

二、受迫振动

在周期性外力持续作用下发生的振动, 称为受迫振动或强迫振动 (forced vibration)。如声波引起耳膜的振动、马达转动导致基座的振动等等。引起受迫振动的周期性外力称为驱动力 (driving force)。实际的振动系统不可避免地要受到阻尼的作用而消耗能量, 这会使振幅逐渐衰减。通过驱动力对振动系统做功, 不断给系统补充能量, 若补充的能量恰好补偿因阻尼所损失的能量, 振动就得以维持并会达到稳定状态。受迫振动是物体在阻尼力、弹力和驱动力的共同作用下进行的。

设驱动力为 $F_0 \cos \omega' t$, 其振动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega' t \quad (4-17)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, $h = \frac{F_0}{m}$, 上式可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos \omega' t \quad (4-18)$$

这是一个二阶常系数线性非齐次微分方程。在小阻尼的情况下这个方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega' t + \varphi) \quad (4-19)$$

式(4-19)表示, 受迫振动是由第一项所表示的阻尼振动和第二项表示的简谐振动两项叠加而成。第一项随时间逐渐衰减, 经过一段时间将不起作用。第二项是振幅不变的振动, 这就是受迫振动达到稳定状态时的等幅振动。受迫振动的稳态方程为

$$x = A \cos(\omega' t + \varphi) \quad (4-20)$$

可以证明, 振幅和初相位分别为

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2}} \quad (4-21)$$



$$\varphi = \arctan \frac{-2\beta\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2} \quad (4-22)$$

可见,受迫振动的初相位 φ 和振幅 A 仅决定于振动系统自身的性质、驱动力的频率和振幅,与系统的初始条件无关。稳定状态的受迫振动是一个与简谐驱动力同频率的简谐振动。

三、共振

由式(4-21)可知,受迫振动的振幅 A 主要由驱动力频率 ω' 与系统固有频率 ω_0 之间的关系而定。当式(4-21)右边分母为最小值时,振幅 A 即达最大值。令式(4-21)右边分母中被开方式的一阶导数为零,可求得当驱动力频率 ω' 达到

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (4-23)$$

时,受迫振动的振幅最大。因 β 常远小于 ω_0 ,所以驱动力频率已接近系统的固有频率。

当驱动力频率接近系统固有频率时,系统作受迫振动的振幅急剧增大,这种现象称为共振(resonance)。共振时的外力频率 ω_r 称为共振频率。共振时最大振幅为

$$A_r = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (4-24)$$

由式(4-23)和式(4-24)可知, β 越大,共振角频率越低,共振振幅也越小; β 越小,共振频率越接近系统的固有频率,共振振幅也越大。当 $\beta \rightarrow 0$ 时, $A_r \rightarrow \infty$,这时 $\omega_r \rightarrow \omega_0$ 。共振曲线如图 4-4 所示。

共振的概念在声学、原子过程和核磁共振等方面有着广泛的应用。收音机、电视机利用电磁共振来接受空间某一频率的电磁波。构成物质的分子、原子和原子核,都具有一定的电结构,并存在振动,当外加交变电磁场作用于这些微观结构时,物质将表现出对交变电磁场能量的强烈吸收。从不同方面研究这种共振吸收,如顺磁共振、核磁共振和铁磁共振等,已经成为现今研究物质结构以及医疗诊断等的重要手段。应该指出,在现代化的生活里,人们的生存环境发生了变化,如重劳动的机械化,行驶的高速化等,充满了各种自然的和人为的振动,有必要研究机械振动对蛋白质分子、细胞器、细胞、组织、器官、原生动物和人体的生物效应及其规律,从而防止振动给人体造成的伤害。不同频率的振动能激起人体不同部位的共振,对人体造成危害。

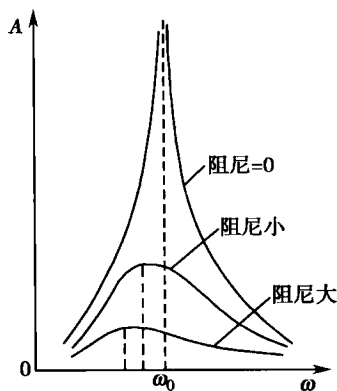


图 4-4 共振曲线

第三节 简谐振动的合成

一、两个同方向、同频率简谐振动的合成

设一个质点在同一直线上同时进行两个独立的同频率的简谐振动。取这一直线为 x 轴,质点的平衡位置为坐标原点,则在任意时刻 t 这两个简谐振动的位移可表示为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

由于两个简谐振动处于同一直线上,在任意时刻合振动的位移为

$$x = x_1 + x_2$$

对这种情况虽然利用三角公式不难求得合成结果,但是利用简谐振动的矢量图

示法可以更简洁直观地求物体所参与的合振动。如图 4-5 所示。两个分振动分别与旋转矢量 A_1 和 A_2 相对应,在 $t=0$ 时, A_1 、 A_2 与 x 轴的夹角分别为 φ_1 、 φ_2 。由于 A_1 、 A_2 以相同的角速度 ω 逆时针旋转,所以它们之间的夹角不变,因而合矢量 A 的大小亦不变。从图中可以看出,任一时刻合矢量 A 在 x 轴上的投影 x 正好等于该时刻 A_1 和 A_2 在 x 轴上的投影 x_1 和 x_2 的代数和。因此,矢量 A 就是合振动所对应的旋转矢量,合振动的表达式为

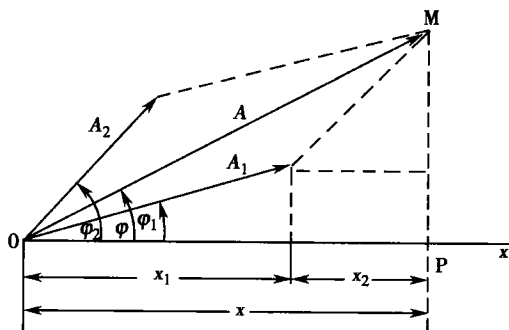


图 4-5 同方向、同频率简谐振动的合成(矢量图示法)

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

可见,合振动是一简谐振动,频率与分振动频率相同。利用矢量合成法按几何关系,由图 4-5 可以求得合振动的振幅 A 和初相位 φ 分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4-25)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (4-26)$$

由式(4-25)和式(4-26)可知,合振动的振幅和初相位都与两个分振动的振幅和初相位有关。对于 $k=0,1,2,\dots$,得

- (1) 若相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$ 时, $A = A_1 + A_2$, 合振幅最大。
- (2) 若相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k+1)\pi$ 时, $A = |A_1 - A_2|$, 合振幅最小。
- (3) 当相位差取其他值时, $|A_1 - A_2| < A < (A_1 + A_2)$ 。

二、同方向、不同频率的简谐振动的合成

如果两个同方向简谐振动的频率不同,则在矢量图中两个旋转矢量间的夹角或相位差将随时间变化,因而它们的合矢量也将随时间而变化,合矢量的投影不再是简谐振动。图 4-6 表示两个频率比为 1:3, 振幅一定的两个简谐振动的合成,虚线和点状线分别代表分振动,实线代表它们的合振动。图 4-6(a)、(b)、(c), 分别表示三种不同的初相位差所对应的合振动,由于初相位差的不同,合成结果就不一样。合振动不再是简谐振动,但仍然是周期性振动,而且合振动的频率与分振动中的最低频率相等。不难理解,合振动的形式由分振动的频率、振幅及初相位差而定。

考虑两个频率不同,但振幅和初相位相同的两个振动的合成,两分振动的表达式分别为

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

利用三角学中的和差化积公式,得

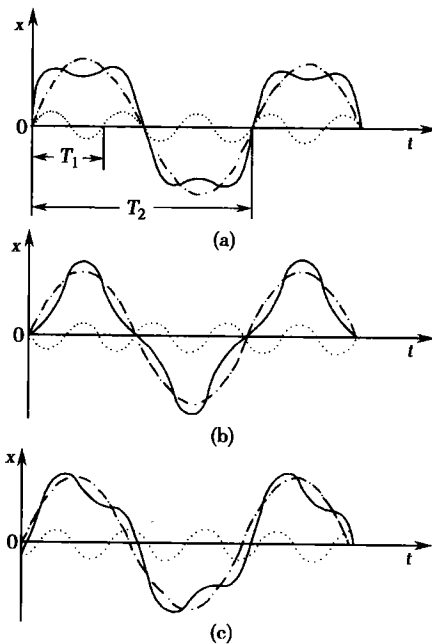


图 4-6 两个频率之比为 1:3 的简谐振动的合成



$$\begin{aligned}
 x &= x_1 + x_2 = A [\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)] \\
 &= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right)
 \end{aligned}
 \quad (4-27)$$

在上式中,当 ω_1 和 ω_2 相差很小时, $(\omega_2 - \omega_1) \ll (\omega_2 + \omega_1)$, 因而 $2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ 相对于后者是随时间缓慢变化的量。因此,式(4-27)可以近似地看成振幅为 $\left| 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \right|$ (因为振幅总是正值,所以取绝对值)、角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的谐振动(图 4-7)。由于两个分振动频率的微小差异而产生的合振动振幅时强时弱的现象,称为拍(beat)。单位时间内振动加强或减弱的次数称为拍频(beat frequency)。由于余弦函数的绝对值在一个周期内两次达到

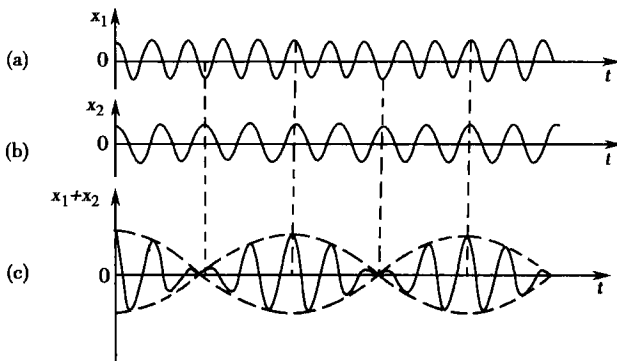


图 4-7 拍的形成

最大值,所以单位时间内最大振幅出现的次数应为 $\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ 的频率的两倍,即

$$\nu = 2 \times \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) = \nu_2 - \nu_1 \quad (4-28)$$

上式表明,拍频等于两个分振动频率之差。

三、谐振分析

与振动的合成相反,任一复杂的周期性振动都可以分解为一系列简谐振动。根据实际振动曲线形状,或它的位移时间函数关系,求出它所包含的各种简谐振动的频率和振幅的数学方法称为傅里叶分析(Fourier analysis)。按傅里叶级数理论,一个周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 可以展开为正弦或余弦函数的级数,即

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (4-29)$$

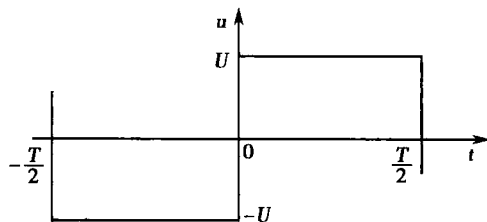
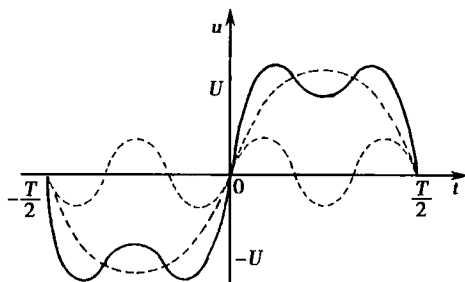
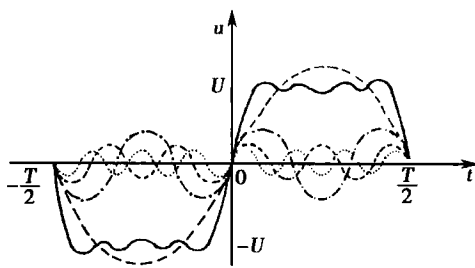
其中各分振动的振幅 A_n 与初相位 φ_n 都可以由函数 $f(t)$ 的积分求得。这些分振动中频率最低的叫基频振动(fundamental vibration),它的频率就是原周期函数 $f(t)$ 的频率,称为基频(fundamental frequency)。其他分振动的频率都是基频的整数倍,依次分别称为 2 次、3 次、 \dots n 次谐频(harmonic frequency)。这种把一个复杂的周期性振动分解为一系列简谐振动的办法,称为谐振分析(harmonic vibration analysis)。在进行谐振分析时,所取级数的项数越多,其合成情况与实际情况就越接近。

例如,某电压 $u(t)$ 随时间作周期为 T 、振幅为 U 的矩形振动(方波),如图 4-8(a)所示。按傅里叶级数展开为

$$u(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

上式表明:方波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的,这些正弦波的频率依次为基频的奇数倍。图 4-8(b)和图 4-8(c)是取前 2 项和前 4 项合成时的方波波形。

将一周期性振动展开为傅里叶级数的结果,可以直观地表示为:以角频率 ω 为横坐标,相应的振幅为纵坐标作出的频谱图。图 4-9 画出了方波的频谱图,其中每一条线称为谱线

(a) 方波 $u(t)$ 的图像(b) $u(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right)$ 的图像(c) $u(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t \right)$ 的图像图 4-8 方波 $u(t)$ 的图像

(spectral line), 长度代表相应频率的分振动的振幅值。一般来说, 频率越高的简谐振动的振幅就越小, 对合振动的贡献也越小。实际应用中, 可根据要求精度取有限项数即可。

谐振分析在理论研究和实际应用中都有着十分重要的意义。在医学上, 对发声、听觉、心电图和脑电图等进行定量分析, 绘出频谱图, 可为诊断各种疾病提供依据。例如, 发声器官由声带、软骨韧带结构的支架、控制声带位置和张力的肌肉群等组成, 当气流从气管呼出时, 呈一定张力的声带便可振动发声, 其声音基频的高低取决于声带的长短和张力。声波沿耳蜗内基底膜传播过程中, 声波的频率与基底膜某处的固有频率相等时, 即发生共振现象, 位于基底膜上最大振幅区的听觉细胞与听神经受到的刺激最强, 从而产生不同的音调感觉, 这就是耳蜗对声音频率的分析作用。

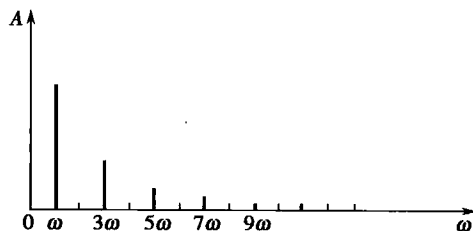


图 4-9 方波的频谱

四、两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成

设两个频率相同的简谐振动在相互垂直的 x 、 y 轴上进行, 振动表达式分别为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合并两式, 消去 t 得合成振动的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4-30)$$

一般来说, 这是个椭圆方程。两个互相垂直的、频率相同的简谐振动合成, 其合振动的轨迹为一椭圆, 而椭圆的形状决定于分振动的相位差。下面分析几种特殊情形。

(1) $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, 即两振动同相, 式(4-30)变为



$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0$$

合振动的轨迹是通过坐标原点而斜率为 A_2/A_1 的一条直线。

(2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, 即两振动反相, 式(4-30)变为

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$$

合振动的轨迹仍是一过原点的直线, 不过斜率为负值, 即 $-A_2/A_1$ 。

(3) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$, 式(4-30)变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

这表示合振动的轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆。当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ 时, 振动沿顺时针方向进行; 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ 时, 振动沿逆时针方向进行。如果两个分振动的振幅相等, 即 $A_2 = A_1$, 椭圆变为圆。

(4) $\varphi_2 - \varphi_1$ 等于其他值, 合振动的轨迹一般是椭圆, 其形状和运动方向由分振动振幅的大小和相位差决定。

图 4-10 表示相位差为某些值时合成振动的轨迹。可见, 合振动在一直线、椭圆或圆上进行。

如果两个分振动的频率接近, 其相位差将随时间缓慢地变化, 合振动轨迹将不断按图 4-10 所示的顺序变化, 即在图中所示的矩形范围内由直线变成椭圆再变成直线, 并不断重复下去。

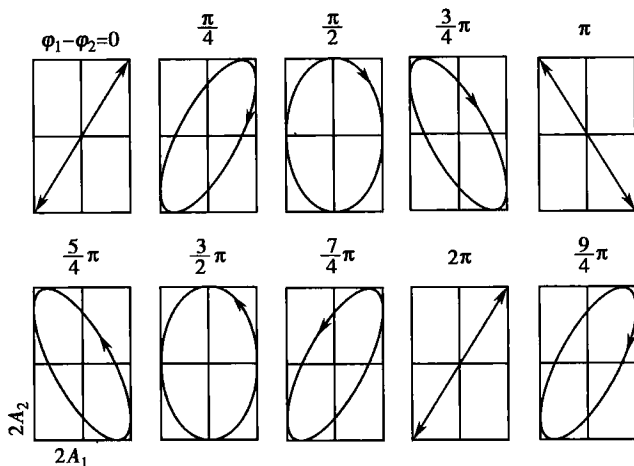


图 4-10 两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成

思考题与习题四

4-1 什么是简谐振动? 说明下列振动是否为简谐振动:

- (1) 拍皮球时球的上下运动。
- (2) 一小球在半径很大的光滑凹球面底部的小幅度摆动。

4-2 简谐振动的速度与加速度的表达式中都有个负号, 这是否意味着速度和加速度总是负值? 是否意味着两者总是同方向?

4-3 当一个弹簧振子的振幅增大到两倍时, 试分析它的下列物理量将受到什么影响: 振动的周期、最大速度、最大加速度和振动的能量。

4-4 轻弹簧的一端相接的小球沿 x 轴作简谐振动, 振幅为 A , 位移与时间的关系可以用余弦函数表示。若在 $t=0$ 时, 小球的运动状态分别为

- (1) $x = -A$ 。
- (2) 过平衡位置, 向 x 轴正方向运动。
- (3) 过 $x = A/2$ 处, 向 x 轴负方向运动。
- (4) 过 $x = A/\sqrt{2}$ 处, 向 x 轴正方向运动。



试确定上述各种状态的初相位。

4-5 任何一个实际的弹簧都是有质量的,如果考虑弹簧的质量,弹簧阵子的振动周期将如何变化?

4-6 一个弹簧振子沿 x 轴作简谐振动,已知弹簧的劲度系数为 $k=15.8\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$,物体质量为 $m=0.1\text{kg}$,在 $t=0$ 时物体对平衡位置的位移 $x_0=0.05\text{m}$,速度 $v_0=-0.628\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。写出此简谐振动的表达式。
 $[x=0.0707\cos(12.56t+\pi/4)\text{m}]$

4-7 一沿 x 轴作简谐振动的物体,振幅为 $5.0\times 10^{-2}\text{m}$,频率 2.0Hz ,在时间 $t=0$ 时,振动物体经平衡位置处向 x 轴正方向运动,求振动表达式。如该物体在 $t=0$ 时,经平衡位置处向 x 轴负方向运动,求振动表达式。

$$[x=5.0\times 10^{-2}\cos(4\pi t-\pi/2)\text{m}; x=5.0\times 10^{-2}\cos(4\pi t+\pi/2)\text{m}]$$

4-8 一个运动物体的位移与时间的关系为 $x=0.10\cos(2.5\pi t+\pi/3)\text{m}$,试求:

(1) 周期、角频率、频率、振幅和初相位。

(2) $t=2\text{s}$ 时物体的位移、速度和加速度。

$$[(1)0.80\text{s}; 2.5\pi\text{s}^{-1}; 1.25\text{Hz}; 0.10\text{m}; \pi/3 (2)-5\times 10^{-2}\text{m}; 0.68\text{m}\cdot\text{s}^{-1}; 3.1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]$$

4-9 一质量为 10g 的物体作简谐振动,其振幅为 24cm ,周期为 4.0s ,当 $t=0$ 时,位移为 $+24\text{cm}$ 。求:

(1) $t=0.5\text{s}$ 时,物体所在位置。

(2) $t=0.5\text{s}$ 时,物体所受力的大小和方向。

(3) 由起始位置运动到 $x=12\text{cm}$ 处,物体的速度、动能以及系统的势能和总能量。

$$[(1)0.17\text{m}; (2)-4.19\times 10^{-3}\text{N}, \text{指向平衡位置};$$

$$(3)-0.326\text{m}\cdot\text{s}^{-1}; 5.32\times 10^{-4}\text{J}; 1.78\times 10^{-4}\text{J}; 7.10\times 10^{-4}\text{J}]$$

4-10 两个同方向、同频率的简谐振动表达式为 $x_1=4\cos(3\pi t+\pi/3)\text{m}$ 和 $x_2=3\cos(3\pi t-\pi/6)\text{m}$,试求它们的合振动表达式。
 $[x=5\cos(3\pi t+0.128\pi)\text{m}]$

(吴明海)

学习要求:

1. 掌握波的传播规律,理解波函数的物理意义。
2. 掌握波的干涉现象和规律。
3. 了解声学的基本概念;理解声强级和响度级;了解超声波的特性及其医学应用。

波动是振动在空间的传播。声波、脉搏波和电磁波等都是波。各种信息的传播几乎都要借助于波。各类波的本质不同,各有其特殊的性质和规律,但在形式上它们又具有许多共同的特征和规律。本章主要讨论简谐波的特征和基本规律,然后介绍特定的波动形式——声波、超声波和次声波。

第一节 机械波

一、机械波的产生

在弹性介质中,由于弹性力的联系,某个质点因外界扰动而引起振动时,周围的质点也会跟着振动起来。这样,振动由近及远地传播出去。机械振动在弹性介质中的传播过程,称为机械波(mechanical wave)。波源和弹性介质是产生和传播机械波的必要条件。

质点振动方向与波的传播方向垂直的波称为横波(transverse wave)。质点振动方向与波的传播方向平行的波称为纵波(longitudinal wave)。在波动过程中,虽然波形沿介质由近及远地传播着,而介质中参与波动的各个质点仅在各自的平衡位置附近振动,并不随波前进,传播的只是振动的状态。

二、波面和波线

对波作几何描述时,把某一时刻振动相位相同的点连成的面称为波面(wave surface)。最前面的波面称为波前(wave front)。

在各向同性的均匀介质中,波动在各个方向的传播速度相同,点波源所产生的波面是一系列同心球面,称为球面波(spherical wave)。波面为平面的波,称为平面波(plane wave)。表示波传播方向的线称为波线(wave ray)。波线与波面相垂直(图 5-1)。

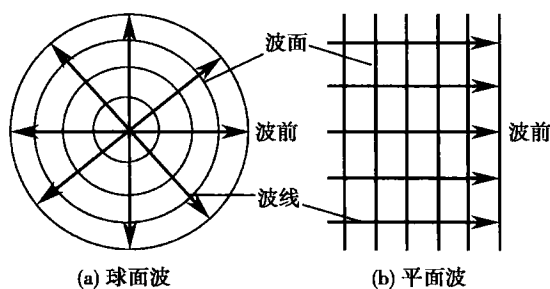


图 5-1 波面与波线

三、波速 波长 波的周期和频率

波速是单位时间内振动传播的距离,又称相速度,用 u 表示。机械波的波速决定于介质的弹性模量和密度等。弹性模量是介质弹性的反映,密度则是介质质点惯性的反映。固体中既能传播与剪切弹性有关的横波,又能传播与体变或拉伸弹性有关的纵波。在固体中,横



波和纵波的波速分别为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{G/\rho} (\text{横波}) \\ u &= \sqrt{Y/\rho} (\text{纵波}) \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

式中, G 和 E 分别为介质的切变模量和杨氏模量。液体和气体中只能传播与体变弹性有关的纵波。在液体和气体中, 纵波的波速为

$$u = \sqrt{K/\rho} \quad (5-2)$$

式中 K 为体变模量。

在波动中, 同一波线上两个相位差为 2π 的点之间的距离称为波长(wavelength), 用 λ 表示。一个完整的波通过波线上某点所需的时间称为波的周期, 用 T 表示。周期的倒数称为波的频率, 即单位时间内通过波线上某点的完整波的数目, 用 ν 表示。因为在一个周期内波前进一个波长的距离, 所以波速

$$u = \lambda/T = \lambda\nu \quad (5-3)$$

同一波在不同介质中波速不同, 而周期(或频率)不变, 所以波长随介质而改变。

第二节 简谐波

一、波函数

简谐振动的传播所形成的波, 称为简谐波(simple harmonic wave)。简谐波是最简单最基本的波。一切复杂的波都可看成是由多个简谐振动的传播所构成的波合成的。如图 5-2 所示, 设一平面简谐波在各向同性的均匀介质中, 以速度 u 沿 x 轴的正方向无衰减的传播。在波线上取一点 O 作为坐标原点, 该波线就是 x 轴。设在 t 时刻, O 点的振动表示为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

现在来考虑 x 轴上距原点 O 为 x 的任一点 P 的振动情况。因为振动是从 O 点处传过来的, 所以 P 点振动的相位将落后于 O 点。若振动从 O 点传到 P 点所需的时间为 x/u , 那么, 在时刻 t , P 点处质点的位移, 就是 O 点处质点在 $t - x/u$ 时刻的位移。 P 点处的质点振动应写为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (5-4)$$

上式就是沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的表达式, 称为平面简谐波波函数(wave function)。由 ω 、 ν 、 T 、 λ 、和 u 诸量之间的关系, 上式可写成其他形式

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] \\ y &= A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] \\ y &= A \cos [\omega t - kx + \varphi] \end{aligned} \quad (5-5)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, 称为波数(wave number), 表示在 $2\pi(\text{m})$ 内所包含完整波的数目。

在平面简谐波波函数中, 含有 x 和 t 两个自变量: ①对于给定时刻 t 来说, 位移 y 仅是 x 的函数, 这时波函数表示某一时刻在直线 Ox 上各质点的位移分布, 即该时刻的波形; ②对一给定位置 x 来说, 位移 y 仅是 t 的函数, 表明该质点在各时刻的振动情况; ③ t 和 x 都在变

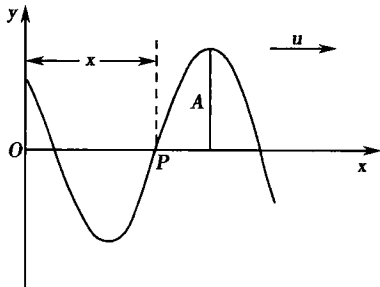


图 5-2 平面简谐波表示式的推导



化时,波函数表示沿波的传播方向上各个不同质点在不同时刻的位移,反映了波形的传播。

如果简谐波向 x 轴的负方向传播,图 5-2 中 P 质点比 O 处质点早开始振动,因此,波函数为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (5-6)$$

波线上任意两点之间的相位差 $\Delta\varphi = \omega \frac{\Delta x}{u} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$ 。

[例 5-1] 一波源以 $y = 0.04 \cos 2.5\pi t$ (m) 的形式作简谐振动,并以 $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度在某种介质中传播。试求:①波函数;②在波源起振后 1.0s,距波源 20m 处质点的位移及速度。

解:(1) 根据题意,波函数为

$$y = 0.04 \cos 2.5\pi(t - x/100) \text{ (m)}$$

(2) 在 $x = 20 \text{ m}$ 处质点的振动为

$$y = 0.04 \cos 2.5\pi(t - 0.2) \text{ (m)}$$

在波源起振后 1.0s,该处质点的位移为

$$y = 0.04 \cos 2.0\pi = 4 \times 10^{-2} \text{ (m)}$$

该处质点的速度为

$$\begin{aligned} v &= dy/dt = -\omega A \sin 2.5\pi(t - 0.2) \\ &= -2.5\pi \times 0.04 \sin 2.0\pi \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

由此可见,质点的振动速度与波的传播速度是两个完全不同的概念。

二、波动方程

将平面简谐波的波函数式(5-4)分别对 t 和 x 求二阶导数,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \end{aligned}$$

比较两式,得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5-7)$$

这个微分方程称为平面波的波动方程(wave equation)。该方程是由平面简谐波的波函数导出的,可以证明它是各种平面波所必须满足的微分方程式,而且平面波波函数就是它的解。它是物理学中最重要的方程之一,其普遍意义在于:任何物理量 y ,无论力学量、电学量或其他量,只要它与时间和坐标的关系满足式(5-7),则这一物理量就是按平面波的形式传播,而且偏导数 $\partial^2 y / \partial t^2$ 的系数是该波的传播速度 u^2 的倒数。

第三节 波 的 能 量

一、波的能量和强度

1. 波的能量 波传播时,介质中各质点要产生振动,同时介质要发生形变,因而具有动能和弹性势能,波的能量就是这些动能和势能之和。可见波的传播过程是能量的传播过程。为简单起见,暂不考虑介质对能量的吸收。设一平面简谐波,以速度 u 在密度为 ρ 的均匀介质中传播,其波函数用式(5-4)表示。可以证明,在任意坐标 x 处取体积元 ΔV ,在时刻 t 的动能 ΔE_k 和势能 ΔE_p 为



$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (5-8)$$

可见,该体积元的动能和势能完全相同,都是时间的周期函数,并且大小相等,相位相同。体积元 ΔV 中的总机械能量为

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (5-9)$$

上式表明任一体积元的总的机械能量在零和幅值 $\rho \Delta V A^2 \omega^2$ 之间周期性变化,需要用相位来描述。在能量由零增大到幅值的过程中,该体积元吸收能量;在能量由幅值减小到零的过程中,该体积元放出能量,能量传播的速度就是波速 u ,这就是波动传递能量的机制。

介质中单位体积具有的波动能量,称为波的能量密度,用 w 表示,即

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (5-10)$$

能量密度在一个周期内的平均值,称为平均能量密度,用 \bar{w} 表示。因为正弦函数的平方在一个周期内的平均值是 $1/2$,即

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] dt = \frac{1}{2}$$

所以平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (5-11)$$

上式对横波和纵波都适用。机械波的能量与振幅的平方、频率平方及密度成正比。

2. 波的强度 能量随着波动的进行在介质中传播,因而可以引入能流的概念。单位时间内通过介质中某一面积的能量,称为通过该面积的能流(energy flow)。在介质中取面积为 S 并垂直于波线的平面,则在单位时间内通过该面的能量等于体积 uS 内的能量。通过 S 面的能流是随时间作周期性变化的,通常取在一个周期内的平均值,这个平均值称为通过 S 面的平均能流,并表示为

$$\bar{P} = \bar{w} u S = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u S$$

通过与波线垂直的单位面积的平均能流,称为平均能流密度或波的强度(intensity of wave),用 I 表示

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 \quad (5-12)$$

单位是 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。上式表明,波的强度与振幅的平方、频率的平方成正比。

二、波的衰减

机械波在介质中传播时,它的强度将随着传播距离的增加而减弱,振幅也随之减小,这种现象称为波的衰减。导致波衰减的主要原因有:①由于波面的扩大造成单位截面积通过的波的能量减少,称为扩散衰减;②由于散射使沿原方向传播的波的强度减弱,称为散射衰减;③由于介质的黏滞性(内摩擦)等原因,波的能量随传播距离的增加逐渐转化为其他形式的能量,称为介质对波的吸收。以下主要讨论吸收衰减的规律。

设平面波在均匀介质中沿 x 轴正方向传播,在 $x=0$ 处入射波的强度为 I_0 ,在 x 处波的强度衰减为 I ,通过厚度为 dx 的一层介质时,由于介质的吸收,波的强度减弱了一 dI 。实验表明,

$$-dI = \mu I dx$$

比例系数 μ 与介质的性质和波的频率有关,称为介质的吸收系数。解这一微分方程,并利用边界条件: $x=0, I=I_0$,得



$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (5-13)$$

上式表明平面波的强度在传播过程中按指数规律衰减。因为波的强度 I 与振幅 A 的平方成正比,故有

$$A = A_0 e^{-\mu x/2}$$

第四节 波的衍射和波的干涉

一、惠更斯原理

在介质中,任何一个质点的振动都将直接引起邻近各质点的振动。惠更斯原理(Huygens principle)表述为:介质中波前上的每一点都可以看作新波源,向各个方向发射子波;在其后的任一时刻,这些子波的包迹就是该时刻的新波前。

应用惠更斯原理,可以从已知的波前用几何作图法求出下一时刻的新波前,因而解决了波的传播方向问题。图 5-3(a)中,波动从波源 O 出发,以速度 u 向四周传播,已知 t 时刻的波前是半径为 R_1 的球面 S_1 ,要找出 $t + \Delta t$ 时刻的波前 S_2 ,先以 S_1 上各点为球心(子波源),以 $u\Delta t$ 为半径,画一系列半球形子波,再作这些子波的包迹面,就是新波前 S_2 。平面波的情况,如图 5-3(b)所示。

图 5-3(c)中,让平面波垂直入射到有狭缝 AB 的障碍物上时,应用惠更斯原理作出下一时刻的波前,这个新波前除中央部分仍为平面外,靠近狭缝边缘部分发生弯曲。因为在各向同性的介质中,波线垂直于波面,所以边缘的波线改变了原来的方向,这表明波动能绕过障碍物传播,这种现象称为波的衍射(diffraction of wave)。

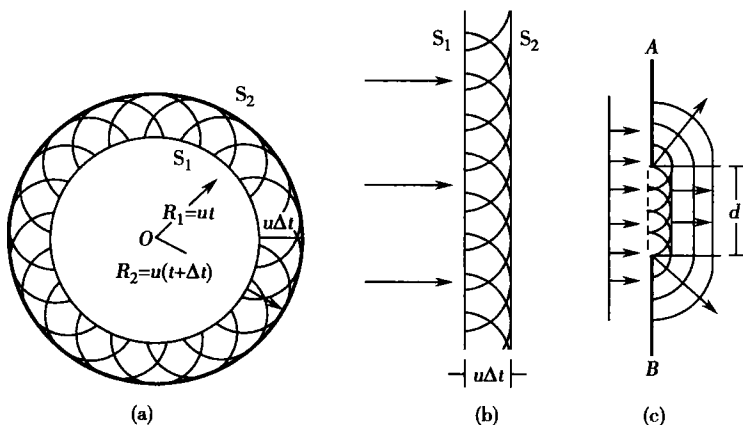


图 5-3 用惠更斯原理求波面

实践和理论都证明,不是在任何情况下都发生明显的衍射现象。只有当波面上被阻挡部分的线度(即障碍物的线度)或者波面上未被阻挡部分的线度(即孔或缝的线度)比入射波长短或差不多时,才能发生明显的衍射现象。衍射现象是波的独具特征之一。

应用惠更斯原理还可解释波的反射和折射,学生可做练习。

二、波的叠加原理

实验表明:几列波在同一介质中传播时,都将保持其原有的特性(频率、波长、振动方向和传播方向)不变;在相遇处,任一质点的位移是各列波在该处单独引起的振动位移的矢量和。这种波动传播的独立性及在相遇处的振动合成,称为波的叠加原理(superposition prin-



principle of wave)。例如,各种音乐声波传入人耳时,各种声音保持原有的音色,人们仍能分辨,而不混淆。掉在水中的两块石头激发的圆形水面波互相交叠后仍然以各自小石块的落水点为中心成圆形波面独立传播。波的叠加原理,只对线形波动成立,对于由于爆炸或其他原因产生的冲击波,是一种非线性振动的传播,叠加原理失效。

三、波的干涉

一般来说,振幅、频率和相位都不同的两列波在某一点叠加时,引起的合振动是很复杂而不稳定的。满足频率相同、振动方向相同、初相位相同或相位差恒定的两列波相遇时,叠加后的波形是稳定的,波的强弱分布是不变的。在叠加区域的某些位置上,振动始终加强,而在另一些位置上振动始终减弱或完全抵消,这种现象称为波的干涉(interference of wave)。满足上述三个条件,能产生干涉现象的波,称为相干波(coherent wave),相应的波源称为相干波源(coherent sources)。

设有两个相干波源 O_1 和 O_2 ,其振动表达式分别为

$$y_{o1} = A_{o1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_{o2} = A_{o2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

若介质是均匀各向同性的,叠加区中任一点 P 到两波源的距离分别为 r_1 和 r_2 ,两波在 P 点的振幅分别为 A_1 和 A_2 ,则 P 点的两个分振动的表达式分别为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

P 点的合振动为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中 A 是合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)} \quad (5-14)$$

合振动的初相位 φ 由下式决定

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (5-15)$$

两个相干波在 P 点引起的两个分振动的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ 是一个常量,合振幅 A 也是一个常量。由合振幅 A 的表达式可知,适合

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, k=0,1,2,\dots \quad (5-16)$$

的各点,合振幅最大, $A = A_1 + A_2$, 称为干涉加强。而适合

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k+1)\pi, k=0,1,2,\dots \quad (5-17)$$

的各点,合振幅最小, $A = |A_1 - A_2|$, 称为干涉减弱。若 $A_1 = A_2$, 则 $A = 0$, 称为干涉相消。

如果 $\varphi_1 = \varphi_2$, 即对于初相位相同的相干波源, $\Delta\varphi$ 只决定于两个波源到点 P 的路程差或称为波程差 $\delta = r_2 - r_1$ 。当

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (5-18)$$

即波程差等于半波长的偶数倍时, P 点为干涉加强;当



$$\delta = r_2 - r_1 = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,\dots \quad (5-19)$$

即波程差等于半波长的奇数倍时, P 点为干涉减弱。

干涉现象是波独有的又一特征。干涉不仅存在于机械波,而且也存在于其他波,只不过机械波容易产生干涉。

四、调幅波

设两个振幅相等、初相位均为零的简谐波以接近的频率和波长在同一介质中、沿 x 轴正方向传播,其波函数分别为

$$y_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

它们叠加后得

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) \quad (5-20)$$

令

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, k_g = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$A_g = 2A \cos(\omega_g t - k_g x)$$

则式(5-20)可写为

$$y = 2A \cos(\omega_g t - k_g x) \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x) = A_g \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x) \quad (5-21)$$

因为 ω_1 和 ω_2 接近,所以 $\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \omega_1$ 或 ω_2 , 而 $\bar{\omega} \approx \omega_1$ 或 ω_2 。式(5-21)可以解释为一个高频率 $\bar{\omega}$ 的迅变波,其振幅被一个频率 ω_g 很低的包络所调制(图 5-4)。调制因子为 A_g 。合成波振幅本身(合成波的包络)形成一个波,这个波相对合成波而言是缓慢变化的,称为调幅波(amplitude modulated wave)。

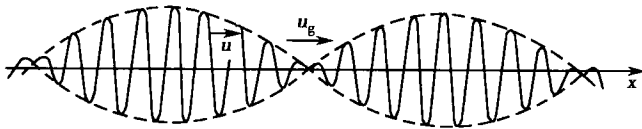


图 5-4 调幅波的相速度、群速度

由式(5-21)可列出两个特征速度来。一个是具有一定相位的点的传播速度 $u = \bar{\omega}/\bar{k}$, 这种振动状态的传播过程也就是相位的传播过程,因此也称为相速度(phase velocity)。另一个是调制包络的运动速度,即图 5-4 中虚线表示的波的传播速度。由于包络包裹着一群短波,称为波群或波包。波群的运动速度称为群速度(group velocity)。定义为 $u_g = \omega_g/k_g = \Delta\omega/\Delta k \rightarrow d\omega/dk$ 。因为 $\omega = uk$, 得

$$u_g = u + k \frac{du}{dk}$$

若相速度 u 与频率无关,则 $du/dk=0$, 此时 $u_g = u$ 。因此,在非色散介质中,相速度和群速度之间无差别,但在色散介质中,它们可以是不同的。在研究光的散射以及微观粒子波动性等问题时,群速度是非常重要的概念。

五、驻波

当两列振幅相同的相干波沿同一直线相向传播时,合成波是一种波形不随时间变化的波,称为驻波(standing wave)。驻波是一种特殊的相干波。

设有两列振幅相同的相干波分别沿 x 轴正方向(短虚线)和负方向(长虚线)传播(图 5-5)。取两波的振动相位始终相同的点作为坐标轴的原点,并且在 $x=0$ 处振动质点向上移动

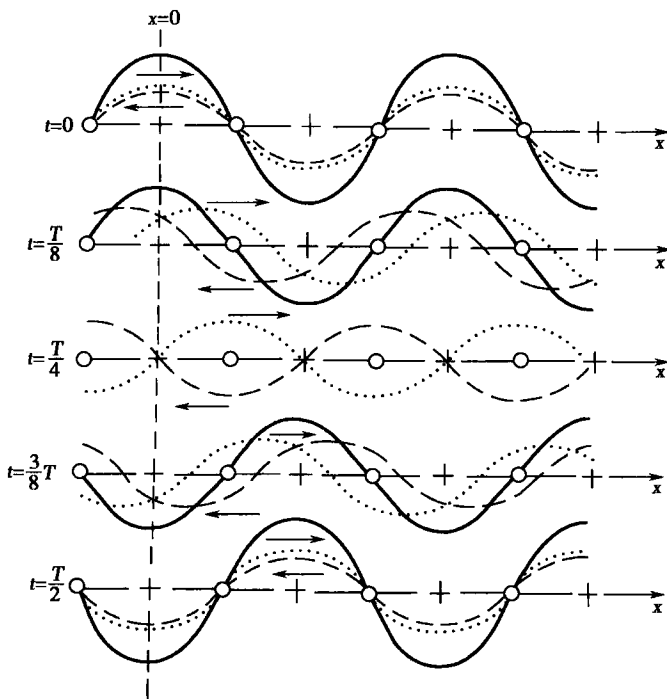


图 5-5 驻波的形成

到最大位移时开始计时,即使该处质点振动的初相位为零。沿 x 轴正、负方向传播的波分别表示为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

利用三角函数 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, 求得合成波为

$$y = y_1 + y_2 = \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (5-22)$$

上式就是驻波的表达式。式中括号内的项与时间无关,取绝对值就是振幅,且随位置不同作余弦变化。括号外右边的项是时间的函数,说明各点都在作简谐振动。

下面根据驻波的表达式讨论驻波的特性。

1. 振幅分布 振幅最大的位置,称为波腹(antinode)。波腹的位置应满足

$$\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1, \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, k=0, 1, 2, \dots$$

波腹位于

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}, k=0, 1, 2, \dots \quad (5-23)$$

振幅为零,即静止不动的位置,称为波节(node)。波节的位置应满足

$$\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 0, \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, k=0, 1, 2, \dots$$

波节位于

$$x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4}, k=0, 1, 2, \dots \quad (5-24)$$



由式(5-23)和式(5-24)可见,相邻两波腹或两波节之间的距离都是半波长。

2. 相位关系 两相邻波节之间各点的振动方向相同、相位相同,故各点必定同时达到最大位移,又同时通过平衡位置。达到最大位移时,各质点的速度为零,即动能为零。波节两侧的点振动方向相反、相位相反。说明驻波没有相位的传播。

3. 能量分布 正向波的能量密度 $I_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$, 负向波的能量密度 $I_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 (-u)$, 驻波的总能量密度 $I = I_1 + I_2 = 0$ 。说明驻波中没有能量的定向传播,驻波的能量禁闭在两波节之间。如果把两波节之间的驻波视为“波包”,驻波能量只可能是波包能量的整数倍而不能连续变化。认识这一特性,对理解量子力学中能量的不连续性是很重要的。

驻波可以用实验演示,如图 5-6 所示。音叉末端系一水平的细绳 AB, B 处有一尖劈,可以左右移动,调节 AB 间的距离。重物 m 使绳产生张力。音叉振动时,绳上产生波动,向右传播,在 B 点产生反射,反射波向左传播。这样,入射波和反射波在同一绳子上沿相反方向传播,它们相互干涉,就能在绳子上产生驻波。

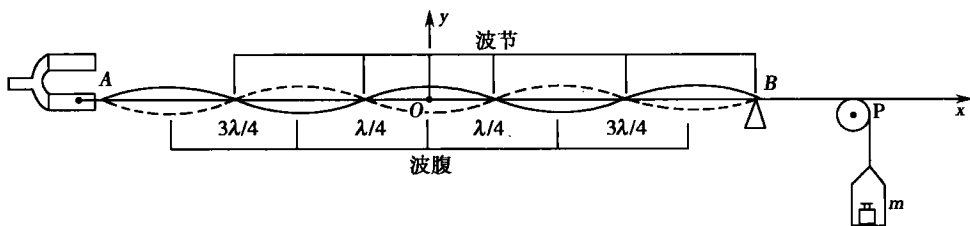


图 5-6 驻波

驻波现象有许多实际应用。例如,将长为 L 的弦线两端拉紧固定,当拨动弦线时,弦线中就产生经两端反射而成的两列反向传播的波,叠加后形成驻波。由于在两固定端必须是波节,因此驻波的波长必须满足下列条件

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

即能在弦线上形成驻波的波长值是不能连续变化的,由关系式 $u = \lambda \nu$ 可知,相应的可能频率为

$$\nu_n = n \frac{u}{2L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5-25)$$

其中与 $n=1$ 对应的频率称为基频,其他频率依次称为二次、三次…谐频。式(5-25)表明,驻波的频率也不能连续变化。各种允许频率所对应的驻波(即简谐振动方式),称为弦线振动的简正模式(normal mode),相应的频率称为简正频率。图 5-7 中画出了频率为 ν_1, ν_2, ν_3 的三种简正模式。简正模式的频率称为系统的固有频率。与弹簧振子的固有频率不同,一个驻波系统有许多个固有频率。如果外界驱动使系统振动,当驱动力接近系统某一固有频率时,系统将被激发,产生振幅很大的驻波,这种现象也称为共振。

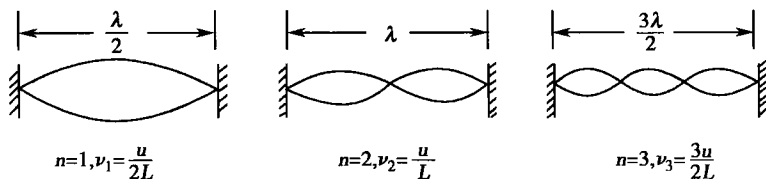


图 5-7 弦振动的简正模式



第五节 声 波

频率在 $20 \sim 20\,000\text{Hz}$ 的机械纵波可以引起人的听觉,称为可闻声波,简称声波(sonic wave)。频率低于 20Hz 的机械波称为次声波(infrasonic wave),频率高于 $20\,000\text{Hz}$ 的机械波称为超声波(ultrasonic wave)。次声波、声波和超声波仅频率不同,无本质上的区别。

一、声压和声强

1. 声压 当声波在介质中传播时,介质的密度作周期性变化,稠密时压强大,稀疏时压强小。在某一时刻,介质中某一点的压强与无声波通过时的压强之差,称为该点的瞬时声压(sonic pressure)。显然,声波是空间和时间的函数。

设声波为平面简谐波,则由式(5-4)可以证明,介质中某点声压 p 的变化规律为

$$p = \rho u \omega A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] \quad (5-26)$$

可见,声波既可表示为位移波,也可以表示为压强波,两者之间存在 $\pi/2$ 的相位差。令 $p_m = \rho u \omega A$,称为声压幅值,简称声幅。

2. 声阻抗 它是用来表征介质传播声波能力特性的一个重要物理量。介质质点振动速度的幅值 $v_m = \omega A$,有

$$\frac{p_m}{v_m} = \frac{\rho u \omega A}{\omega A} = \rho u = Z \quad (5-27)$$

Z 称为介质的声阻抗(acoustic impedance),单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ 。声阻抗是表征介质声学特性的一个重要物理量。表 5-1 中列出了几种介质的声速、密度和声阻抗。

表 5-1 几种介质的声速和声阻抗

介质	声速 $u(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	密度 $\rho(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	声阻抗 $\rho u(\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$
空气	$3.32 \times 10^2 (0^\circ\text{C})$	1.29	4.28×10^2
	$3.44 \times 10^2 (20^\circ\text{C})$	1.21	4.16×10^2
水	$14.8 \times 10^2 (20^\circ\text{C})$	988.2	1.48×10^6
脂肪	14.0×10^2	970	1.36×10^6
脑	15.3×10^2	1020	1.56×10^6



由此可知,当两种介质声阻抗相差较大时,反射强,透射弱;声阻抗相近时,透射强,反射弱。

[例 5-2] 如果超声波经由空气传入人体,问进入人体的声波强度是入射前强度的百分之几? 如果经由蓖麻油($Z=1.36 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)传入,则进入声波的强度又是入射前强度的百分之几?

解:(1) 经由空气进入时

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4 \times 4.16 \times 10^2 \times 1.63 \times 10^6}{(4.16 \times 10^2 + 1.63 \times 10^6)^2} = 0.001$$

进入人体的声波强度只为入射强度的 0.001,即 0.1%。

(2) 经由蓖麻油进入时

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4 \times 1.36 \times 10^6 \times 1.63 \times 10^6}{(1.36 \times 10^6 + 1.63 \times 10^6)^2} = 0.992$$

进入人体的强度占原来强度的 0.992,即 99.2%。

这个例子说明为什么在利用超声波进行人体扫描或治疗时,在探头表面与体表之间要涂抹油类物质或液体等耦合剂。

二、听觉域

当声波抵达人耳时,人耳将由声波引起的压强变化转变成神经刺激,再经大脑处理并反应为听到的某种声响。引起人耳听觉的声波,不仅有频率范围,而且有声强范围。对每一个给定的可闻声波频率,声强都有上下两个限值。下限值是能引起听觉的最低声强,低于下限值的声强,不能引起听觉,这个下限值称为最低可闻声强或听阈(threshold of hearing)。图 5-8 中,最下面的一条曲线表示正常人的听阈随声波频率而变化,这条曲线称为听阈曲线。从曲线可以看出,频率不同时,听阈可以相差很大,最敏感的频率为 $1000 \sim 5000 \text{ Hz}$,这与耳的结构有关。上限是人耳所能忍受的最高声强,高于上限值的声强,只能引起耳的疼痛,不能产生听觉,这个上限值称为痛阈(threshold of feeling)。图 5-8 中最上面的一条曲线表示正常人的痛阈随频率而变化,称为痛阈曲线。由听阈线、痛阈线、 20 Hz 和 $20\,000 \text{ Hz}$ 线所围成的区域,称为听觉域(auditory region)。

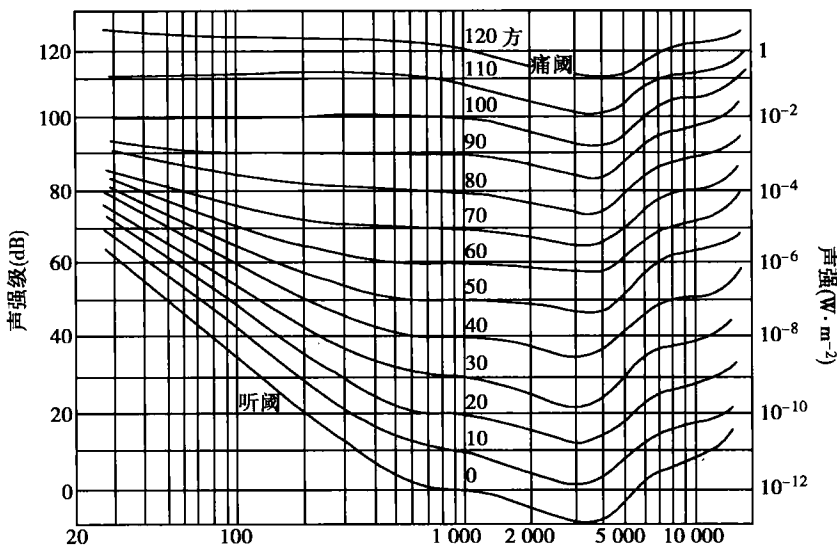


图 5-8 纯音的听觉域和等响曲线



三、声强级和响度级

以 1000Hz 的声波为例,从听阈 $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ 到痛阈 $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 上下限相差 10^{12} 倍。由于人的听觉声强范围很大,并且人耳所感觉到的声音响度近似与声强的对数成正比,在声学中通常采用对数标度来量度声强,称为声强级(intensity level of sound),单位是贝尔(bel, B),贝尔的 1/10 称为分贝(decibel, dB)。通常取 1000Hz 声音的听阈值 $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ 作为标准参考声强,任一声波的声强 I 与标准参考声强 I_0 的比值的对数,即为该声波的声强级,用 L 表示。

$$L = \lg \frac{I}{I_0} (\text{B}) = 10 \lg \frac{I}{I_0} (\text{dB}) \quad (5-31)$$

人耳对声音强弱的主观感觉称为响度(loudness)。无论是声强还是声强级,都是声能的客观描述,它并不反映人耳所听到的响度等级。声强或声强级相同,但频率不同的声音,其响度可能相差很大。为了区分各种不同声音响度的大小,选用 1000Hz 声音的响度作为标准,将其他频率声音的响度与此标准相比较,只要它们的响度相同,它们就有相同的响度级(loudness level)。响度级的单位是方(phon)。显然,对 1000Hz 的声音来说,它的强度级的分贝数在数值上等于它的响度级的方值。

将频率不同、响度级相同的各对应点连成一条线,构成等响曲线。图 5-8 中画出了不同响度级的等响曲线。听阈曲线的响度级为 0 方的等响曲线,痛阈曲线是响度级为 120 方的等响曲线。

第六节 多普勒效应

一、多普勒效应

当列车鸣笛从我们身旁疾驶而过时,汽笛的音调由高变低。由于波源或观测者相对于介质运动,造成观测频率与波源频率不同的现象,称为多普勒效应(Doppler effect)。

假设波源和观测者的运动方向与波传播方向共线,波源和观测者相对于介质的速度分别为 v_s 和 v_o ,波在该介质中的传播速度为 u ,波源和观测者观测到的频率分别为 ν 和 ν' 。

1. 波源静止观测者运动 在这种情况下, $v_s = 0$, $v_o \neq 0$ 。若观测者向着波源运动,相当于波以速度 $u' = u + v_o$ 通过观测者。因此单位时间内通过观测者的完整波数,即观测到的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + v_o}{u} \nu \quad (5-32)$$

同理,如果观测者离开波源运动时,

$$\nu' = \frac{u - v_o}{u} \nu \quad (5-33)$$

可见,在观测者运动情况下,频率的改变是由于观测者观测到的波数增加或减少造成的。

2. 观测者静止波源运动 在这种情况下, $v_o = 0$, $v_s \neq 0$ 。当波源以速度 v_s 向着观测者运动时,由于一个周期 T 内波源已逼近观测者 $v_s T$ 的距离(图 5-9),所以在观测者看来,波长缩短为

$$\lambda' = \lambda - v_s T = (u - v_s) T$$

波在介质中传播的速度不变,所以观测者实际测得的频率为

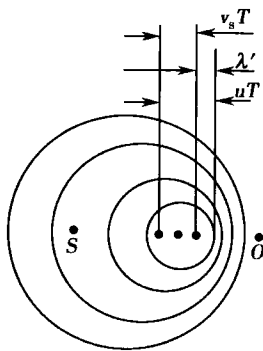


图 5-9 多普勒效应



$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v_s} \cdot \frac{1}{T} = \frac{u}{u - v_s} \nu \quad (5-34)$$

同理,如果波源远离观测者而去时,

$$\nu' = \frac{u}{u + v_s} \nu \quad (5-35)$$

可见,在波源运动情况下,观测频率的改变是由于波长的缩短或伸长所致。

3. 波源和观测者同时相对于介质在同一波线上运动 综合以上两种情况,可以证明观测者实际测得的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_o}{u - v_s} \nu \quad (5-36)$$

式(5-36)是机械波的纵向多普勒效应公式。式中,观测者向着波源运动时, v_o 取正值,离开时取负值;波源向着观测者运动时, v_s 取正值,离开时取负值。当 $-v_o = v_s$ 时,观测者和波源保持相对静止,所测频率仍为波源频率 ν 。

如果波源速度与观测者速度不共线时,应将 v_o 和 v_s 在连线上的分量代入以上各式进行计算。设波源的运动方向与连线成 α 角,观测者的运动方向与连线成 β 角,观测者所测得的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_o \cos \beta}{u - v_s \cos \alpha} \nu \quad (5-37)$$

上式为多普勒效应的普遍公式,正负号的使用情况同式(5-36)。式(5-36)和式(5-37)只适用于低速的情形,在高速情况下,要采用相对论中的多普勒效应公式。

多普勒效应在医疗诊断、工程技术、交通管理和科学研究等方面有着广泛的应用。例如,它在医学临床上被用于心脏、血管、血流和胎儿胎心的超声诊断。分子、原子和离子由于热运动产生的多普勒效应使其发射和吸收的谱线增宽,在天体物理和受控热核聚变试验装置中,谱线的多普勒增宽已成为一种分析恒星大气、等离子体物理状态的重要手段。基于反射波多普勒效应的原理,雷达系统已广泛地应用于车辆、导弹、人造卫星等运动目标的监测。

二、冲击波

当波源运动速度 v_s 超过波的运动速度 u 时,波源将位于波前的前方,式(5-34)无意义。

如图5-10所示。波源在 S_1 位置时发出的波在其后 t 时刻的波阵面为半径等于 ut 的球面,但此时刻波源已前进了 $v_s t$ 的距离到达 S 位置。在整个 t 时间内,波源发出的波的各波前的切面形成一个圆锥面,这个圆锥面称为马赫锥(Mach cone),其半顶角 α 满足各波前随时间不断扩展,锥面也不断扩展,这种以点波源为顶点的圆锥形的波称为冲击波(shock wave)或马赫波,式(5-38)中的 M 成为马赫数(Mach number)。锥面就是受扰动的介质与未受扰动的介质的分界面,在两侧有着压强、密度和温度的突变。飞机、炮弹等以超音速飞行时,都会在空气中激起冲击波。冲击波面掠过的区域,由于空气压强突然增大使物体遭到损坏(如使玻璃窗碎裂),这种现象称为声暴。冲击波的能量集中在锥面上,能提供非常强大的压力。医学上用冲击波击碎结石。

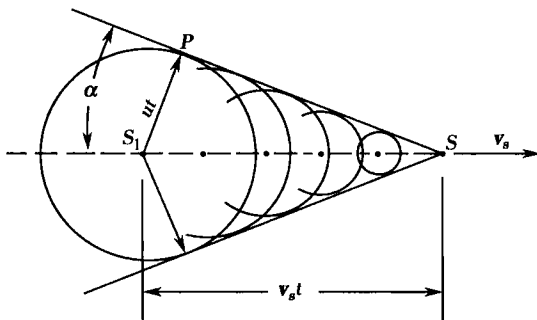


图5-10 冲击波的产生

锥面就是受扰动的介质与未受扰动的介质的分界面,在两侧有着压强、密度和温度的突变。飞机、炮弹等以超音速飞行时,都会在空气中激起冲击波。冲击波面掠过的区域,由于空气压强突然增大使物体遭到损坏(如使玻璃窗碎裂),这种现象称为声暴。冲击波的能量集中在锥面上,能提供非常强大的压力。医学上用冲击波击碎结石。



$$\sin \alpha = \frac{ut}{v_s t} = \frac{u}{v_s} = \frac{1}{M} \quad (5-38)$$

按照相对论,任何物体的速度是不能超过真空中的光速的,但可以超过介质中的光速。当在介质里穿行的带电粒子速度超过该介质中的光速时,会辐射锥形的电磁波,这种辐射称为切连科夫辐射(Cherenkov radiation)。高能物理实验中利用这种现象来测定粒子的速度。

第七节 超声波和次声波

一、超声波的特性

超声波具有声波的通性,由于超声波频率高、波长短,因而还具有一系列的特性。

超声波的方向性好。由于超声波波长比在同一种介质中的声波波长短得多,衍射现象不明显,所以超声波是近似直线传播的,容易得到定向而集中的超声波束。超声波和光线一样,可用适当的方法会聚和发散。

超声波的穿透本领大。由于波的强度正比于频率的平方,所以在相同振幅时,超声波比普通声波具有大得多的能量。近代超声技术已能产生几百乃至几千瓦的超声波功率,压强振幅可达数千大气压。超声波在介质中传播时,其强度按式(5-13)的规律衰减。介质的吸收系数 μ 越小,衰减越慢,即超声波对该介质的穿透本领大。在人体中,超声波容易穿透 μ 值比较小的水、脂肪和软组织,而不易穿透 μ 值较大的空气、骨骼和肺组织。由于介质的 μ 值不仅与介质的性质有关,而且随波的频率的增加而变大,故超声波频率提高时,穿透本领下降。

超声波遇到不同介质的分界面时可产生显著的反射,只有当反射体的线度比波长大数倍时,才能引起明显的反射。超声波波长短,所以较小的反射体,如钢件中的气泡、人体组织中的病变,都能产生明显的反射。在超声诊断中,正是这种回声形成了超声图像。

由于超声波具有以上特性,使之成为诊断、定位等技术的重要工具。

高频大功率超声束通过介质时,还可对介质产生一系列特殊作用。

1. 机械作用 高频超声波通过介质时,介质中粒子作受迫高频振动,使介质质点的位移、速度、加速度以及介质中的应力分布等分别达到一定数值(如加速度可达重力加速度的几十万至几百万倍),这种强烈的机械振动能破坏物质的力学结构,从而产生一系列超声效应。如高强度超声波在人体中传播时,剪切力会对细胞和组织结构产生直接的效应。

2. 空化作用 高频大功率超声通过液体时,液体中产生疏密变化,稠区受压,稀区受拉。在受拉时,因为液体承受拉力的能力很差,特别是在含有杂质和气泡处,液体将被拉断,形成空腔。紧接而来的是正声压,使空腔在迅速闭合的瞬间,产生局部高压、高温和放电现象,称为空化作用(cavitation)。空化作用可以由于温度升高或通过施加机械力影响生物系统。空化作用常用在清洗、雾化、乳化以及促进化学反应等方面。在超声波的许多应用中,空化作用极为重要。

3. 热作用 当超声波在介质中传播时,将会有一部分能量被介质吸收而转化为热量,引起介质温度升高,称为热作用。产生热量的大小决定于介质的吸收系数,以及超声波的强度和照射时间。在生物组织中,大部分损耗掉的声能由蛋白质分子经各种弛豫过程所吸收。超声的热作用早已用于临床理疗,它作为加温治疗癌症的一种热源受到重视。

超声波可用于细胞或亚细胞水平的研究。超声波照射血液后会出现红细胞缟线状排列的聚集体、异型及大小不等的红细胞增加、而淋巴细胞及嗜酸性粒细胞减少等现象。

超声波在分子水平的生物学效应包括对 DNA 的解聚作用等,超声可以分裂各种多糖和



单糖、核酸,使氨基酸脱胺和分裂氮氢键等。超声还能改变维生素、酶和激素的活力及功能。

此外,还有化学作用和生物作用等。超声波与物质的作用被广泛应用于超声技术,如清洗、杀菌、制药和治疗等方面。

二、超声波的产生与探测

产生超声波的方法很多,在医用的超声波仪器中,常用的超声波发生器主要有高频脉冲发生器和压电式换能器两部分组成(图 5-11)。

高频脉冲发生器用以产生超声频电振荡。常用的脉冲回波法,频率选择在 $1 \sim 15\text{MHz}$,在满足探测的条件下,尽可能采用较高频率。大多数超声诊断仪中采用脉冲形式,即振荡是间歇地进行的,每隔一定时间重复一次。每秒重复次数,称为重复频率(约 1000 次/秒),每次振荡持续时间,称为脉冲宽度(约几微秒)。

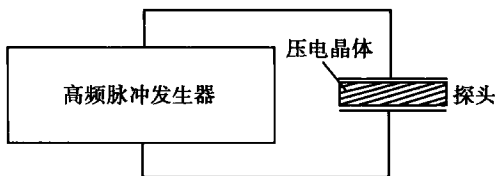


图 5-11 超声波发生器示意图

压电式换能器,也叫探头,它是利用某些晶体的压电效应做成的。当这种晶体的特定方向上相对的两表面受到压力或拉力,使它的厚度发生变化时,这两个面上就出现等量异性电荷。受压或受拉时,在表面上出现的电荷极性相反。在一定范围内,受力越大,所产生的电荷越多。当晶片受到变化的压力和拉力交替作用时,就在晶片两表面上产生同样规律的电压变化,这种现象称为正压电效应(piezoelectric effect)。反之,当这两个表面上加上电压时,晶片的厚度将视电场方向而变化,这种现象称为逆压电效应。将该晶片相对的两表面镀上薄银层,焊上导线作为电极,就构成了一个简单的探头,可以发射超声波,也可以接收超声波。

三、超声波在医学中的应用

超声波在医学中的应用,有超声诊断、超声治疗和生物组织超声特性研究三个方面。其中,超声诊断发展最快,现已有多种超声诊断仪供临床应用。超声诊断的物理基础主要是利用超声波在介质分界面上的反射。由于体内不同组织和脏器的声阻抗不同,超声波在界面上形成不同的反射波,称为回波(echo)。脏器发生形变或有异物时,由于形状、位置和声阻抗的变化,回波的位置和强弱也发生改变,临床上就可以根据超声图像进行诊断。下面简要介绍医学上常用的超声诊断仪器的原理。

1. A 型超声诊断仪 它是以回波幅度调制显示(amplitude modulation display)为基础的。超声换能器探头以固定位置和方向对人体探查,将接收到的回波信号经放大处理后加于示波管(或显像管)的垂直偏转板上,显示器的纵坐标显示回波的幅度波形,在水平偏转板上加上一时基电压(锯齿波电压),显示器的横坐标代表回波波源的深度,这样就可以把始波和各界面的回波信号以脉冲幅度形式按时间先后在荧光屏上显示出来,如图 5-12(a)。体内两介质的声阻抗相差越大,反射越强。回波脉冲幅度提供了反射界面种类的信息,各回波脉冲与始波的时间间隔提供了各反射面的深度信息。这样可根据回波出现的位置,回波幅度的高低、形状、大小和有无,来诊断受检查者的病变和与解剖有关的信息。A 型超声诊断仪提供的仅是体内器官的一维信息,而不能显示整个器官的形状。A 型超声的回波信号以脉冲幅度的形式按时间先后在荧光屏上显示,所以 A 型又称为幅度调制型。

A 型超声诊断仪可用来测量组织界面的距离、脏器的径线,探测肝、胆、脾、肾、子宫等脏器的大小和病变范围,也用于眼科及颅脑疾病的探查。A 型超声的许多诊断项目已逐渐被 B 型超声所取代。

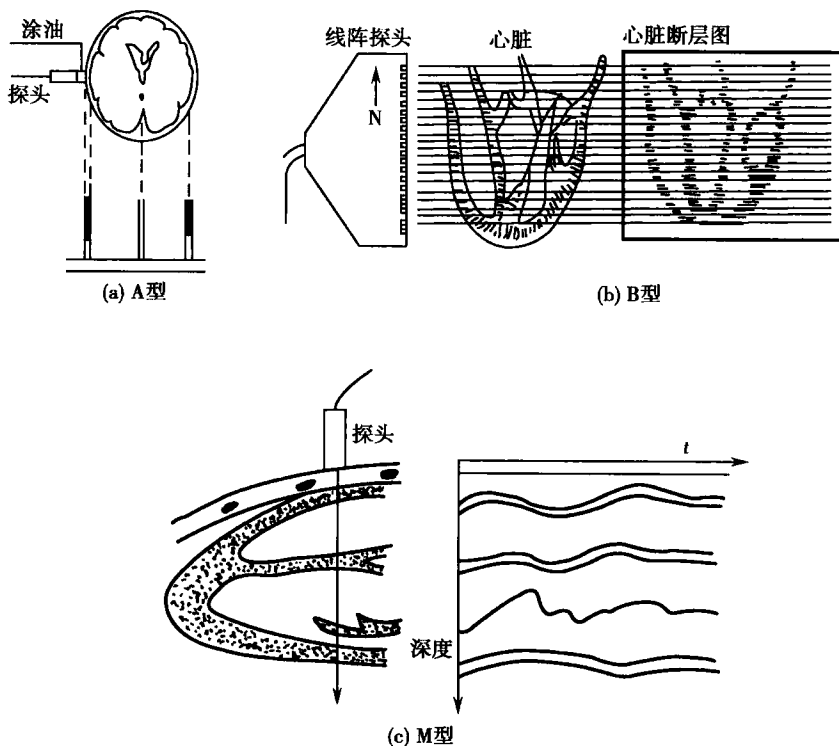


图 5-12 A 型、B 型和 M 型超声诊断仪原理图

2. B 型超声诊断仪 它是在 A 型基础上发展起来的一种辉度调制显示 (brightness modulated display, BMD) 的成像仪器。它能得到人体内部脏器和病变的二维断层图像, 并且能对运动脏器进行实时动态观察。与 A 型超声诊断仪不同之处有以下两点:

(1) 辉度调制: 脉冲回声信号经放大处理后加于示波管 (或显像管) 的控制栅极, 利用脉冲回声信号改变阴栅极之间的电位差, 从而改变辉度。回声信号越强, 荧光屏上的光点越亮。所以, 它属于辉度调制型。将深度扫描的时基电压加于垂直偏转板上, 回声信号变成明暗不同的光点自上而下按时间先后显示在荧光屏上。

(2) 显示断层声像: 通过机械装置与电子学方法使深度扫描线与探头同步移动时, 如图 5-12(b), 可以得到人体组织内的二维超声断层图像 (又称声像图)。

通常用电子开关切换多元线阵探头依次发射、接收回声, 或同时激励所有的阵元, 而适当地控制加到各阵元上的激励信号的相位 (控制延时), 来改变超声的发射方向, 形成扇形扫描。

B 型超声诊断仪将从人体反射回来的回波信号以光点形式组成截面图像。此种图像与人体的解剖结构极其相似, 故能直观地显示脏器的大小、形态、内部结构, 并可将其实质性、液性或含气性组织区分开来。

3. M 型超声诊断仪 它的显示原理类似于 B 型, 也属于辉度调制型, 即以不同的灰阶点来反映回波的强弱。与 B 型不同之处在于单探头以固定位置和方向对人体探测, 代表超声扫描深度的时基信号加到示波管的垂直偏转板上, 用来自不同深度的回波信号对垂直扫描线进行辉度调制。示波管的水平偏转板上加一慢扫描锯齿波电压, 使深度扫描线沿水平方向缓慢移动, 因此, 水平轴代表时间。若所探查处的内部组织界面运动, 深度随时间改变, 则得深度—时间曲线。M 型超声诊断仪一般用于观察和记录脏器的活动情况, 特别适用于



检查心脏功能,称为超声心动图(ultrasonic cardiogram, UCG),如图 5-12(c)所示。为了提取更多的诊断信息,可以将 M 型超声心动图与心脏的其他参数,如心电图、心音图和超声多普勒频谱图等同步显示。

4. 超声多普勒血流仪 图 5-13 是利用多普勒效应测量血流速度的原理图。图中 v 是血流速度, θ 是超声波传播方向与血流方向之间的夹角。探头由发射和接收超声波的两块晶片所组成。设作为静止声源的探头发射超声波的频率为 ν , 血管中随血流以速度 v 运动着的红细胞接收到的频率 ν' 为

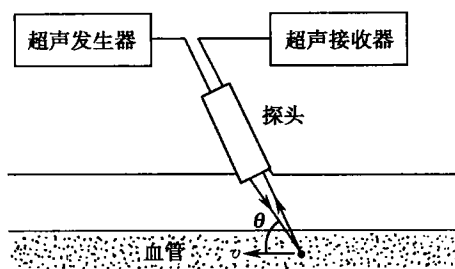


图 5-13 多普勒效应血流计原理

$$\nu' = \frac{u + v \cos \theta}{u} \nu \quad (5-39)$$

u 为超声波在人体内的传播速度。

由红细胞反射回来的超声波被静止的探头接收, 这些红细胞相当于以 v 运动着的声源, 探头接收到的频率 ν'' 为

$$\nu'' = \frac{u}{u - v \cos \theta} \nu' \quad (5-40)$$

将式(5-39)代入式(5-40), 得

$$\nu'' = \frac{u + v \cos \theta}{u - v \cos \theta} \nu \quad (5-41)$$

探头发出的超声波频率与接收的回波频率之差, 即多普勒频移 $\Delta \nu$ 为

$$\Delta \nu = \nu'' - \nu = \frac{2v \cos \theta}{u - v \cos \theta} \nu \quad (5-42)$$

因为 $u \gg v \cos \theta$, 式(5-42)可改写为

$$\Delta \nu = \frac{2v \cos \theta}{u} \nu \quad (5-43)$$

或

$$v = \frac{u}{2 \nu \cos \theta} \Delta \nu \quad (5-44)$$

根据式(5-44), 可以算出血流速度。

超声多普勒法分为连续多普勒(CW)和脉冲多普勒(PW)。前者的缺点是没有距离分辨能力, 在超声束方向上的所有多普勒信号总是重叠在一起; 后者具有距离分辨能力, 能够检测出某特定深度的多普勒信号, 可用于心腔内部和大血管血流信号的检测。现在的多普勒超声成像装置大多采用将脉冲多普勒与 B 超相结合的办法, 在 B 超上一边设立多普勒取样, 一边输出血流信息, 因此可得到正确的血液流速采样位置。

5. 彩色多普勒血流成像仪(简称“彩超”) 属于实时二维血流成像技术。仪器设计时用一高速相控阵扫描探头进行平面扫描, 以实现解剖结构与血流状态两种显像。探头接收到的信号分为两路: 一路经放大处理后按回波强弱形成二维黑白解剖图像; 另一路对扫描全程作多点取样, 进行多普勒频移检测, 信号经自相关技术处理, 并用彩色编码。将彩色显像的三个基色, 红(R)绿(G)蓝(B), 分别表示血流流向探头的正向血液流速(R)、离开探头的反向血液流速(B)和方向复杂多变的湍流(G)。其他颜色都是由这三种基本颜色混合而成的。血流速度越大者彩色越鲜亮, 速度缓慢者彩色较暗淡, 故由彩色的类型、鲜亮程度即可了解血流的状况。这种彩色血流信号显示在相应的二维黑白图像的液性暗区内, 既能观察解剖部位、腔室形态大小, 又能观察内部血流活动状态, 如血流速度、平均速度、加速度、血流量和回波强度等多种指标。彩色多普勒血流成像装置是诊断心脏病的先进工具之一。



四、次声波

次声波又称亚声波,其传播速度和可闻声波相同。由于次声波频率很低,波长很长,只有遇到巨大的障碍物的分界面时,才会发生明显的反射和折射。又由于次声波在介质中传播时吸收甚小,当次声波在大气中传播几千千米时,其吸收还不到万分之几分贝,所以它传播的距离很远。次声波还具有很强的穿透能力,可以穿透建筑物、掩蔽所、坦克、船只等障碍物。次声波如果和周围物体发生共振,能放出相当大的能量。

许多自然现象都能发出次声波,如雷电、龙卷风、台风、海啸、地震、磁暴、火山爆发、陨石落地等,就连流星以及极光等也可发出次声波。除自然现象外,许多人为活动也会伴随产生次声波,如核爆炸、火箭发射等。人的心脏可发出频率为 1.2Hz 左右的次声波;人们在呼吸的同时,肺部也会发出频率在 0.25~0.3Hz 的次声波。

近年来,次声波对生物体特别是对人体的作用效应越来越受到人们的重视。次声波虽不能引起人的听觉,但会引起人的生理上或心理上的感觉。次声波研究主要集中在它对机体的负面影响和有害效应上,这种效应与其参数(频率、声压、强度等)有关。

次声波对生物体的基本作用原理是生物共振。次声波的频率与人体器官的固有频率相近,如躯体 7~13Hz、头部 8~12Hz、胸腔 4~6Hz、心脏 5Hz、腹腔 6~9Hz、盆腔 6Hz、脊柱 10~12Hz。如果某一器官的固有频率接近来自外界的次声波频率,即产生生物共振反应,使人烦躁、耳鸣、头痛、失眠、恶心、视觉模糊、吞咽困难、肝胃功能失调紊乱;严重时,还会使人四肢麻木、胸部有压迫感。特别是与人的腹腔、胸腔和颅腔的固有振动频率一致时,就会与内脏、大脑等产生共振,甚至危及性命。

次声波在疾病诊断和治疗方面有很大的开发潜力。通过测定人体某些器官发出的微弱次声波的特性,可以提供有关人体内部的重要信息。例如次声诊断骨质疏松;次声频段的心音变化反映心脏某些病变等。人们研制出的“次声波诊疗仪”可以检查人体器官功能是否正常。低声压、小剂量的次声波对机体的作用的研究,为治疗某些疾病开辟了新的途径。如次声按摩治疗近视;通过检出致病频率,再向人体输入相关治疗信号,运用生物共振原理,使致病频率恢复正常等。

通过测定自然或人工产生的次声在大气中传播的特性,可探测某些大规模气象过程的性质和规律。如沙尘暴、龙卷风及大气中电磁波的扰动等。研究自然次声的特性和产生机制,可以预测自然灾害性事件。例如台风和海浪摩擦产生的次声波,由于它的传播速度远快于台风移动速度,因此,人们借助于监测风暴发出的次声波,即可在风暴到来之前发出警报。利用类似方法,也可预报火山爆发、雷暴等自然灾害。

思考题与习题五

5-1 机械波在通过不同介质时,它的波长、频率和速度中哪些会发生变化? 哪些不会改变?

5-2 振动和波动有何区别和联系?

5-3 波动表达式 $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$ 中, $\frac{x}{u}$ 表示什么? φ 表示什么? 若把上式改写成 $y = A \cos \left[\left(\omega t - \frac{\omega x}{u} \right) + \varphi \right]$, 则 $\frac{\omega x}{u}$ 表示什么?

5-4 已知波函数为 $y = A \cos(bt - cx)$, 试求波的振幅、波速、频率和波长。

(A; b/c; b/2 π ; 2 π /c)



5-5 有一列平面简谐波,坐标原点按 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的规律振动。已知 $A=0.10\text{m}$, $T=0.50\text{s}$, $\lambda=10\text{m}$ 。试求:

(1) 波函数表达式。

(2) 波线上相距 2.5m 的两点的相位差。

(3) 假如 $t=0$ 时处于坐标原点的质点的振动位移为 $y_0=+0.050\text{m}$,且向平衡位置运动,求初相位并写出波函数。

$$[(1)y=0.10\cos|2\pi(2.0t-x/10)+\varphi|\text{m};(2)\pi/2;$$

$$(3)y=0.10\cos|2\pi(2.0t-x/10)+\pi/3|\text{m}]$$

5-6 P 和 Q 是两个同方向、同频率、同相位、同振幅的波源所在处。设它们在介质中产生的波的波长为 λ , PQ 之间的距离为 1.5λ 。 R 是 PQ 连线上 Q 点外侧的任意一点。试求:

(1) PQ 两点发出的波到达 R 时的相差。

(2) R 点的振幅。

$$(3\pi;0)$$

5-7 沿绳子行进的横波波函数为 $y=0.10\cos(0.01\pi x-2\pi t)\text{m}$ 。试求:

(1) 波的振幅、频率、传播速度和波长。

(2) 绳上某质点的最大横向振动速度。

$$[(1)0.10\text{m};1.0\text{Hz};200\text{m}\cdot\text{s}^{-1};200\text{m};(2)0.63\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$$

5-8 设 y 为球面波各质点振动的位移, r 为离开波源的距离, A_0 为距波源单位距离处波的振幅。试利用波的强度的概念求出球面波的波函数表达式。

$$\left\{y=\frac{A_0}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)+\varphi\right]\right\}$$

5-9 弦线上驻波相邻波节的距离为 65cm ,弦的振动频率为 $2.3\times 10^2\text{Hz}$,求波的波长 λ 和传播速度 u 。

$$(1.3\text{m};3.0\times 10^2\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

5-10 人耳对 1000Hz 的声波产生听觉的最小声强约为 $1\times 10^{-12}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$,试求 20°C 时空气分子相应的振幅。

$$(1\times 10^{-11}\text{m})$$

5-11 两种声音的声强级相差 1dB ,求它们的强度之比。

$$(1.26)$$

5-12 用多普勒效应来测量心脏壁运动时,以 5MHz 的超声波直射心脏壁(即入射角为 0°),测出接收与发出的波频差为 500Hz 。已知声波在软组织中的速度为 $1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,求此时心壁的运动速度。

$$(7.5\times 10^{-2}\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

(吴明海)

第六章 相对论基础

学习要求:

1. 掌握狭义相对论的基本假设、洛伦兹变换及时间延缓、长度收缩、同时性的相对性等概念及相关公式。
2. 掌握狭义相对论的质速关系、质能关系,理解质点动能公式及能量-动量关系式。
3. 理解伽利略变换、光多普勒效应,了解因果率和信号速度。
4. 理解广义相对论的等效原理和广义相对性原理,了解引力场的时空特性、引力坍缩与黑洞、引力波。

著名的德国物理学家爱因斯坦(Einstein A)创立的狭义相对论(special relativity)和广义相对论(general relativity),以与物质运动紧密联系的崭新的时空观取代了经典力学的绝对时空观,揭示了物体作高速运动所遵循的规律、物质质量与能量的内在联系、惯性力加速场与引力场的等价性等。为宇宙天体、微观粒子、原子能等研究领域提供了新的理论武器。经典力学是相对论力学在物体速度远小于光速的情况下的近似。本章着重介绍狭义相对论的一些基本原理和主要结论,同时也对广义相对论作简要介绍。

第一节 伽利略变换

一、经典力学的绝对时空观和相对性原理

经典力学即牛顿力学,是以绝对时间和绝对空间为根基的。绝对的时空观认为:时间和空间是分离的,质量和能量是分离的,它们与物体本身的运动方式无关。按照这种绝对时空观,在不同参考系中时间均匀流逝,空间尺度恒定不变。在一个惯性系同时发生的事件,在所有惯性系中都是同时的,且在不同惯性系中作长度测量将得到同样结果,但不同惯性系中速度是相对的。

对于任何惯性参考系,牛顿定律都成立。这也就是说,对于不同的惯性系,力学的基本定律——牛顿定律的形式都是一样的。因此,在任何惯性系统中观察,同一力学现象将按同样的形式发生和演变。即力学规律在所有惯性系中都是相同的,各个惯性系都是等价的,不存在特殊的绝对的惯性系。这个结论称为力学相对性原理(relativity principle),亦称为伽利略相对性原理。

二、伽利略变换

设想有两个作匀速直线运动的惯性参考系,分别以直角坐标系 $S(O, x, y, z)$ 和 $S'(O', x', y', z')$ 表示,两者的坐标轴分别平行,且 x 轴和 x' 轴重合在一起, S' 相对于 S 沿 x 轴正方向以速度 u 运动。如图 6-1 所示。

为测量时间,设想在 S 和 S' 系中各处各有自己的时钟,所有的时钟结构完全相同,而且在同一参考系中所有的时钟都是校准好而且是同步的,它们分别指示时刻 t 和 t' 。假定两个参考系中的钟都以原点

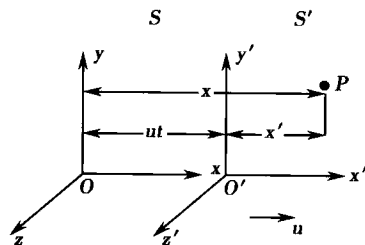


图 6-1 同一事件在相对作匀速运动的两个惯性参考系中的时空坐标分别为 $P(x, y, z, t)$ 和 $P'(x', y', z', t')$



O' 和 O 重合的时刻作为计算时间的零点, 即 $t=t'=0$ 时, 原点重合。现在从两参考系同时观察同一质点 P 的运动(事件 event)。设在任一时刻 t , P 点的坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z') 。由于时间量度的绝对性和空间量度的绝对性, 从图 6-1 中可以得到

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (6-1)$$

上述变换称为伽利略变换(Galilean transformation)。它给出了同一时空点在惯性系 S' 和 S 中的时空坐标之间的关系。

将式(6-1)的前三式对时间求导, 考虑到 $t=t'$, 可得速度和加速度的相应变换式

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad (6-2)$$

把加速度变换写成矢量式, 可得 $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ 。这表明在所有相互作用匀速直线运动的惯性系中观察到的同一质点的加速度是相同的。由此可见, 在不同的惯性系中, 牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 不仅有相同的形式, 而且, \mathbf{F} 、 m 和 \mathbf{a} 各量都保持不变。同时, 在伽利略变换下, 动量守恒定律以及其他动力学规律的形式也都保持不变。总之, 力学规律对于一切惯性系都是等价的。伽利略变换是力学相对性原理和绝对时空观的数学表达式和具体体现。

第二节 洛伦兹变换

一、迈克耳孙-莫雷实验

在电磁理论发展初期, 人们认为光是在所谓无所不在的、称为“以太”的介质中传播, 光速是相对于以太而言, 以太被作为绝对参考系的代表。这种以太是静止存在于“绝对空间”中, 并且天体穿过它运行, 这种运动的结果对于以太来说必然是显著的, 使用精密的光学仪器也一定能够验证“以太风”。就像我们在水中行船, 以太是水, 地球是船, 当地球运动的时候, 将穿过以太, 让我们感受“以太”就像在我们身边的风一样。为了确定这一绝对参考系的存在, 历史上有许多物理学家进行过许多实验, 借助某种方法测出地球相对于以太的运动, 从而确定以太的存在。其中最著名的是迈克耳孙-莫雷实验。实验的装置是迈克耳孙根据干涉原理自己设计制作的迈克耳孙干涉仪(图 6-2)。干涉仪放在地球上, 设太阳相对“以太”静止; 地球相对太阳的速度为 u , 实验时, 先将干涉仪一支光臂沿地球绕太阳运动的方向, 另外一支光臂与地球运动方向垂直。然后把整个仪器转 90° , 使其另一支光臂沿地球运动方向。计算表明, 如果以太确实存在, 则地球相对于以太的运动将对光速产生影响, 从而使仪器转过 90° 将引起的干涉条纹的移动。

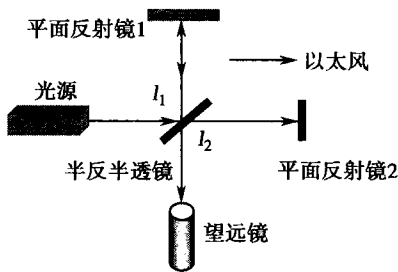


图 6-2 迈克耳孙-莫雷实验原理图

然而迈克耳孙-莫雷是零结果实验(null-experiment), 实验始终没有观测到条纹的移动, 无法分辨出光速在不同方向上传播时的差别。测不到想象的以太对光速的影响, 似乎地球相对于以太的运动并不存在, 或者说以太本身就不存在。这使包括迈克耳孙在内的许多物理学家都感到困惑, 为了在经典时空观的框架内解释迈克耳孙-莫雷实验, 修补以太学说, 曾



提出不同的假设,但是都未能成功。1905年,在洛伦兹、庞加来等人的工作基础上,爱因斯坦另辟蹊径,通过对时间空间本性及电磁理论的深刻思考,提出了两个重要假设,创立了狭义相对论,很容易的解释了迈克耳孙-莫雷实验的否定结果。长期以来,迈克耳孙-莫雷实验一直被认为是狭义相对论的主要实验支柱之一。

二、狭义相对论的基本假设

1905年9月,德国《物理年鉴》发表了爱因斯坦的“论运动物体的电动力学”一文,首次提出了狭义相对论的两个基本假设。

1. 相对性原理(relativity principle) 对物理定律,所有的惯性系都是平权的。

物理定律对一切惯性系是相同的。它否定了绝对静止参考系的存在。这里物理定律至少指力学定律和电磁学定律,“在所有惯性系中相同”是指在某一变换下等价。没有哪一个惯性系中的测量更为特殊。

2. 光速不变原理(principle of constancy of light velocity) 在所有的惯性系中,光在真空中的传播速率具有相同的值 c 。

这一原理表明,光速与光源和观察者的运动状态都无关。光速不变原理是相对论时空观的基础。

三、洛伦兹变换

狭义相对论否定了牛顿的绝对时空观。伽利略变换与狭义相对论的基本原理是不相容的。在狭义相对论的时空中,任一事件(质点、爆发)的时间和空间坐标值在不同惯性系间的关系由洛伦兹变换(Lorentz transformation)来变换。下面介绍洛伦兹变换。

仍以图 6-1 所示的两个惯性系 S 和 S' 为例,在这样的两个惯性系中,对一质点 P 的两组时空坐标描述为 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 。这两组时空坐标的洛伦兹变换为

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (6-3)$$

式中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ 。

洛伦兹变换的逆变换为

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases} \quad (6-4)$$

由此可见,在洛伦兹变换下,空间坐标和时间坐标是相互关联的,二者构成不能分割的思维时空。这是与伽利略变换根本不同的。在低速情况下, $u \ll c$,

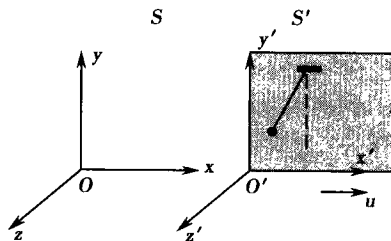


图 6-3 地面和列车上单摆周期的测量



$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \rightarrow 1$, 洛伦兹变换则过渡到伽利略变换, 这就是说, 经典的伽利略变换是洛伦兹变换在低速情况下的结果。

质点在惯性系 S' 和 S 中的速度 (v'_x, v'_y, v'_z) 和 (v_x, v_y, v_z) 之间的相对变换为

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{cases} \quad (6-5)$$

其逆变换为

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{cases} \quad (6-6)$$

由速度的相对论变换式(6-5)可以看出, 洛伦兹变换保证了光速 c 的不变性。在相对论范围内, 真空中的光速 c 是一切客观物体的速度极限。在美国加利福尼亚的斯坦福直线加速器中, 电子已被加速到 $0.999999997c$, 但始终没能超过光速 c 。在 $u \ll c$ 的低速情况下, $\gamma \rightarrow 1$, 速度的相对论变换式过渡到伽利略速度变换式。

[例 6-1] 在正、负电子对撞机中, 电子和正电子以速度 $0.90c$ 相向飞行, 它们的相对速度是多少?

解: 取对撞机为 S 系, 向右运动的电子为 S' 系, 于是 $u = 0.90c, v_x = -0.90c$, 相对速度是

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{-0.90c - 0.90c}{1 - 0.90^2} = -0.994c$$

第三节 狭义相对论的时空观

狭义相对论中, 所有观察者必须承认光速的不变, 但各自对光走过的距离以及光要经历的时间的测量是不一致的。狭义相对论的时空观, 即时间膨胀, 长度收缩, 同时性的相对性等, 可以通过洛伦兹变换直接得出。

一、时间的延缓

时间间隔可以定义为一个观察者所测量的, 在两个事件间所经过的时间。在图 6-1 所示的惯性参考系 S 和 S' 中, 考虑在 S' 系中的同一地点 x'_0 处发生两个事件, 其时间间隔为 $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ 。 τ_0 为 S 系中 x'_0 处一时钟的两次读数之差。由于 S' 系相对于 S 系, 以速度 u 沿 x 轴正方向运动, 根据洛伦兹变换的逆变换式(6-4), 可以得到 S 系中的观察者所记录的上述两个事件发生的时刻分别为 $t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_0)$ 和 $t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_0)$, 其时间间隔为



$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\tau_0 > \tau_0 \quad (6-7)$$

τ_0 是 S' 系中观测者所测得的时间间隔, 这个 S' 系相对于发生事件的那个点 x'_0 是静止的; τ 是 S 系中的观测者记录的时间间隔, 相对于 S 系来说, 发生事件的那个点是在运动着的, 即 S 系中的观测者看到的事件发生在空间两个不同的位置上。

由此可以得出结论, 从惯性系 S 中的观测者看来, 运动着的物体中发生的过程所费的时间变长了, 变为静止时间间隔的 γ 倍, 这就是所谓的时间膨胀, 也称为时间延缓 (time dilation) 或运动时钟变慢。通常把某一参考系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔, 称为固有时或原时 (proper time interval), 式 (6-7) 中的 τ_0 就是固有时。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

称为时间膨胀因子, 又称为速度因素或质量增加因子。 γ 值的大小体现了相对论效应的显著程度。

也就是说, 测量一个与爱因斯坦列车一起运动的单摆周期, 如图 6-3 所示, 我们用地面时钟得到的周期 T' 比用列车上时钟得到的周期 T_0 长了, 或者说地面上测量到的单摆周期膨胀了 γ 倍, 但该单摆的固有周期是一定的。

由此可见, 时间间隔的测量值是相对的, 它是与参考系的运动有关的变量。时间膨胀的来源是光速不变原理, 它是时空的一种属性, 并不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程。如生物学家和医生会说, 在一艘宇宙飞船上癌症扩散所需要的时间不会更长, 从现代物理学观点来看, 是确凿无疑的。

【例 6-2】 μ 子是 1936 年由安德森 (Anderson CD) 等人在宇宙射线中发现的。 μ 子是不稳定的粒子, 它能自发地衰变为一个电子和两个中微子。对 μ 子静止的坐标系而言, μ 子自发衰变的平均寿命为 $2.15 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。假设来自太空的宇宙射线, 在离地面 6000m 的高空所产生的 μ 子, 以相对于地球 $0.995c$ 的速率垂直向地面飞来, 试问:

(1) 在地面上看来, μ 子的平均寿命应为多少?

(2) 它能否在衰变前到达地面?

解: (1) 设地面参考系为 S , μ 子参考系为 S' , 据题意 S' 系相对于 S 系的运动速率 $u = -0.995c$, μ 子在 S' 系中的平均寿命即为固有时 $\tau_0 = 2.15 \times 10^{-6} \text{ s}$, 根据时间膨胀公式 (4-7), 对于地面来说, μ 子的平均寿命为

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.15 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{(-0.995c)^2}{c^2}}} = 2.15 \times 10^{-5} (\text{s})$$

(2) μ 子在时间 τ 内运动的距离为

$$s = u\tau = 0.995c \times 2.15 \times 10^{-5} \text{ s} = 6418 (\text{m})$$

而 μ 子产生时离地面只有 6000m, 所以它在衰变前可以达到地面。

二、长度的收缩

空间长度的测量也具有相对性。当待测物体相对于观测者静止时, 一个物体的长度是所测得的物体两个端点位置之间的距离。然而, 当待测物体相对于观测者运动时, 一个物体的长度就必须是同时记录下来的物体两个端点位置之间的距离。

在图 6-4 中, 假设有一直杆沿 x' 轴静止放置在 S' 系中, 杆在其中的固有长度 (proper space interval) 为 $L_0 = |x'_2 - x'_1|$ 。在 S 系中的观测者看来, 杆沿 x 轴以速度 u 运动, 为了测量杆的长度 L , 观测者必须在同一时刻 t 测量杆两端的坐标 x_1 和 x_2 , 从而得到杆的长度 $L = |x_2 - x_1|$, 由洛伦兹变换式 (6-3), 可知, $x'_1 = \gamma(x_1 - ut)$, $x'_2 = \gamma(x_2 - ut)$, 则



$$L_0 = |x'_2 - x'_1| = \gamma |x_2 - x_1| = \gamma L$$

所以

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - u^2/c^2} L_0 < L_0 \quad (6-8)$$

由此可见,在惯性系 S 中的观测者看来,运动着的物体,在运动方向上的长度缩短了,变为固有长度的 $\frac{1}{\gamma}$,这就是所谓的洛伦兹收缩(lorentz contraction)或长度收缩。 $\frac{1}{\gamma}$ 称为长度收缩因子。

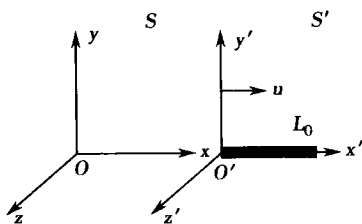


图 6-4 长度测量的收缩

洛伦兹收缩也是时空的一种属性,并不是由于运动引起物质之间的相互作用而产生的实在的收缩。洛伦兹收缩完全是相对的。例如,如果有两个人分别坐在两列相向而过的爱因斯坦列车上,每人手里都拿着一根相同的米尺,尺身沿着列车开行的方向,则两个人都将“看到”(指同时测量米尺两端的位置)对方手上的米尺缩短了相同的尺度;而当他们测量自己手上拿着的米尺时,米尺并没有缩短。

三、同时性的相对性

在图 6-1 所示的惯性系 S 系和 S' 系中,假设在 S 系中有两个事件在不同的地点 x_1 和 x_2 处,于同一时刻 t 同时发生,即两事件的时空坐标分别为 (x_1, t) 和 (x_2, t) 。据洛伦兹变换式(6-3),在 S' 系中,这两件事发生的时间分别为 $t'_1 = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x_1)$ 和 $t'_2 = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x_2)$ 。这就是说,在 S' 系中的观测者看来,这两个事件发生相隔了一定距离 $x_1 - x_2$,且具有时间间隔,为

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x_2) - \gamma(t - \frac{u}{c^2}x_1) = \gamma u \frac{x_1 - x_2}{c^2} \quad (6-9)$$

由此可见,相隔一段距离的同时性被破坏,只有两个事件同时发生在同一地点时,即当 $x_1 - x_2 = 0$ 时,才有 $t'_2 - t'_1 = 0$ 。同时性才有绝对意义。在一般情况下,对于一个观测者是同时发

生的两个事件,对于另一个观测者就不一定是同时发生了,这就是同时性的相对性(relativeity of simultaneity)。同时性的相对性否定了各个惯性系具有统一时间的可能性,否定了牛顿的绝对时空观。

四、因果率(causality)和信号速度

如果在惯性系 S 中,在 t_P 时刻有一事件 P 发生在 x_P 处,引起事件 Q 在 t_Q 时刻发生在 x_Q 处,即事件 $P(x_P, t_P)$ 引起事件 $Q(x_Q, t_Q)$,它们有因和果的关系。信息或相互作用从 x_P 传到 x_Q (假定 $x_P < x_Q$)的速度为

$$v_s = \frac{x_Q - x_P}{t_Q - t_P} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

在 S' 系中的观察者记录到的时间间隔 $t'_Q - t'_P$ 为

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) = \gamma\Delta t(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}) = \gamma\Delta t(1 - uv_s) \quad (6-10)$$



五、光多普勒效应

在图 6-5 所示的惯性系 S 系和 S' 系中,若在 S' 系的原点的某一闪烁光源先后发出两个光信号,即事件 $(0,0)$ 和 $(t',0)$ 。在 S 系中的观测者看来,它们是事件 $(0,0)$ 和 (t,x) ,根据洛伦兹变换的逆变换式(6-4)

$$t = \gamma \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right) = \gamma t'$$

在 S 系的原点收到第二个信号的时刻是

$$t_1 = t + \frac{x}{c} = t + \frac{ut}{c} = (1+\beta)t = (1+\beta)\gamma t', \beta = \frac{u}{c}$$

两个光信号之间的时间差为

$$\Delta t = (1+\beta)\gamma \Delta t'$$

时间间隔可以用周期表达为

$$T = (1+\beta)\gamma T'$$

发射频率 ν_e 和观察频率 ν_0 的关系为

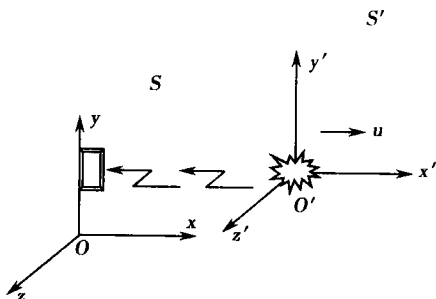


图 6-5 光多普勒效应

$$\nu_0 = \frac{1}{(1+\beta)\gamma} \nu_e = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_e \quad (6-11)$$

式(6-11)表明,光源离去时,观察到的频率会减小,即退行时存在红移。

若 S' 系以 u 沿 x 轴向着 S 系运动,用同样的方法可以推得

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_e \quad (6-12)$$

式(6-12)表明,光源趋近时,观察到的频率会增加,即趋近时存在紫移。

光是一种周期性的移动过程,所以对于任何光源以上公式都是正确的。

第四节 相对论动力学

在相对论中,质量和能量是等价的,动力学的一系列概念都面临着重新定义的问题。定义新物理概念的重要原则,首先是满足对应原理,即当 $v \ll c$ 时,新定义的物理量必须趋于经典物理学中的相应量;其次是,尽量保持基本守恒定律继续成立。

一、动量和质量

在相对论中,仍定义一个质点的动量 \mathbf{p} 是一个与它的速度 \mathbf{v} 同方向的矢量,即:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (6-13)$$

上式中动量与速度的比例系数 m 仍定义为该质点的质量。不过在数量上 p 不一定与 v 有正比关系,质量 m 是速度的函数, m 只依赖于速度的大小 v ,而不与它的方向有关,即

$$m = m(v) \quad (6-14)$$

根据质量、动量守恒定律,由洛伦兹变换,可以得出

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \quad (6-15)$$

这是相对论中非常重要的质速关系, m 称为相对论性质量(relativistic mass),简称质量,它与质点的运动速率 v 有关,同一质点对于不同的参考系有不同的速率时,在这些参考系中所测得的这一质点的质量也不同。 m_0 是质点在它静止的参考系中的质量,称为静质量(rest mass)。

当 $v \ll c$ 时,由式(6-15)得 $m \approx m_0$,这就是经典力学所讨论的情况;实际上在一般宏观物



体所能达到的速度范围内,正是属于这种情况。而在微观粒子的实验中,粒子的速率经常会达到接近光速的程度,这时 m 随 v 的变化就很明显了。当 $v/c \rightarrow 1$ 时,质量 m 迅速趋向于无穷大。这就是说物体的速度愈接近于光速,它的质量就愈大,因而就愈难加速,当物体的速率趋近于光速时,质量和动量一起趋于无穷大,所以光速 c 是一切物体速率的上限。如果 v 超过 c ,质速公式(6-15)将给出虚质量,这在物理上是没有意义的,也是不可能的。

根据式(6-13),动量的完整表达式为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (6-16)$$

可以证明,相对论的动量表达式(6-16)满足爱因斯坦狭义相对性原理。此外,还可以看出当质点运动速率 $v \ll c$ 时,相对论的动量表达式与经典力学中的相同。

二、力和动能

在经典力学中把力定义为动量的时间变化率,即

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6-17)$$

由于质量 m 是常量,上式等价于 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 。然而,在相对论中,动量 \mathbf{p} 和质量 m 都随质点的运动速率 v 而变化,因而也都随时间 t 而变化, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ 与 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 两式不再等价,即直接用加速度表示的牛顿第二定律不再成立,但是,经典力学对力的定义即式(6-17),可直接推广到相对论中,即

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \mathbf{v}) \quad (6-18)$$

上式是牛顿第二定律在相对论中的推广,是相对论动力学的基本方程。在 $v \ll c$ 时,该方程还原为经典力学的牛顿第二定律。

在相对论中,我们假定功能关系仍具有经典力学中的形式,质点的动能 E_k 等于外力使它由静止状态到运动状态所做的功

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^t \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^t \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^v d(m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_0^v \mathbf{v} \cdot d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v} \right) \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 \\ \text{即} \quad E_k &= mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned} \quad (6-19)$$

这就是相对论的质点动能公式。在相对论中,质点的动能等于质点因运动而引起的质点的质量的增量 $\Delta m = m - m_0$ 乘以光速的平方。

相对论的动能公式,与经典力学的动能公式在形式上有很大的不同。然而,在 $v \ll c$ 的极限情况下,由

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

可得

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

即经典力学的动能表达式是其相对论表达式的低速近似,对于高速情况, $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 展开式的高次项不能忽略。



三、质能关系

爱因斯坦把式(6-19)中的 $m_0 c^2$ 这一恒量,解释为质点因静质量 m_0 而具有的能量,称为静能(rest energy) E_0 ,即

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (6-20)$$

在式(6-19)中, mc^2 在数值上等于质点的动能 E_k 和静能 $m_0 c^2$ 之和,爱因斯坦把它称之为质点的总能量,用 E 表示,即

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2 \quad (6-21)$$

这就是著名的质能关系(mass-energy relation)。这一关系的重要意义就在于,它把粒子的质量和它的能量直接联系了起来。这就是说,一定的质量,相应于一定的能量,两者的数值只差一个恒定的因子 c^2 。

质能关系把能量守恒和质量守恒这两条相互独立的自然规律完全统一起来了,按照相对论的概念相互作用的几个粒子的能量守恒关系式可表示为

$$\sum E_i = \sum m_i c^2 = \text{常量}$$

由上式可以直接得出质量守恒关系式

$$\sum m_i = \text{常量}$$

应该强调,在相互作用过程中,系统的相对论性质量 $\sum m_i$ 是守恒的,但其静质量 $\sum m_{0i}$ 并不守恒,在科学史上,所谓的质量守恒实际上只是涉及到粒子的静质量,因此它只是相对论性质量守恒在粒子能量变化很小时的近似,如果一个系统的质量发生变化,那么能量也必定发生相应的变化,质能变化的关系为

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (6-22)$$

根据质能关系,科学家们找到了释放原子能的途径和方法,使人类跨入了利用原子能的新时代,这是爱因斯坦相对论的伟大成就之一。

四、能量和动量的关系

由相对论的能量和动量的定义式

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

可以直接得到

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad \text{或} \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (6-23)$$

这就是相对论的能量-动量关系式。

E 、 pc 与 $m_0 c^2$ 构成平方和关系,如图 6-6 中的动质能直角三角形关系。由上述定义式还可以得到

$$v = \frac{c^2 p}{E} \quad (6-24)$$

有些微观粒子,如中子、中微子,是没有静止质量的,因而也没有静质能,它们没有静止状态,一出现,速率总是 c 。它们有一定能量 E ,式(6-23)中 $m_0 = 0$,得到这类粒子的动量大小与能量的关系式,为

$$E = cp \quad (6-25)$$

当然我们也可以根据质能关系定义它们的动质量 $m = E/c^2$,但这类粒子的速率 c 是不变的,质量丧失了惯性方面的含义,几乎成了能量的同意语。

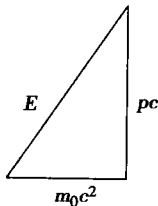


图 6-6 动质能三角关系



[例 6-3] 静止质量为 m_{01} 速度为 v 的粒子,与静止质量为 m_{02} 的静止粒子碰撞,碰后组成复合粒子,求复合粒子的速度 u 和静质量 M 。

解:在高速空间,无论是弹性碰撞,非弹性碰撞或完全弹性碰撞都要遵守动量守恒定律和能量守恒定律,以 $m_{01} + m_{02}$ 为系统

$$\begin{aligned} \text{动量守恒} \quad & \frac{m_{01}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v = \frac{M}{\sqrt{1-u^2/c^2}}u \\ \text{能量守恒} \quad & \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_{02}c^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}$$

由以上两式可求得

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_{01}v}{m_{01} + m_{02}\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ M &= \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + \frac{2m_{01}m_{02}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \end{aligned}$$

第五节 广义相对论简介

1915 年爱因斯坦在惯性质量和引力质量等效的基础上,提出了等效原理,创立了广义相对论。广义相对论是近代引力场理论,在理论上具有重大意义。本节将对广义相对论的基本原理和有关结论作简要介绍。

一、等效原理

1. 惯性质量和引力质量 出现在牛顿第二定律中的质量,是物体惯性大小的量度,叫惯性质量。出现在万有引力定律中的质量,是物体在引力场中所受引力大小的量度,叫引力质量。二者的概念是不相同的。

惯性质量用 m 表示,引力质量用 m' 表示。将某物体置于引力场中,物体所受的引力就是它改变运动状态的外力

$$\mathbf{F}_{\text{引}} = -G \frac{Mr}{r^2} m' = m' g = m \mathbf{a} \quad (6-26)$$

$g = -G \frac{Mr_0}{r^2}$, 是引力场强度,简称引力场强。 r_0 是产生引力场的质点 M 到场点的单位矢量。实验测定物体的加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (6-27)$$

与物体的质量无关。这样,由式(6-26)还可得到

$$m = m' \quad (6-28)$$

式(6-27)说明物体在引力场中某点的加速度与该处的引力场强相等。式(6-28)说明,同一物体的惯性质量和引力质量相等。反映它们同等性的一个实验事实,是伽利略的自由落体实验。爱因斯坦将惯性质量和引力质量相等的这一事实,推广为等效原理(equivalence principle)。

2. 等效原理 爱因斯坦设计了一个理想的电梯实验(爱因斯坦电梯),在电梯里装着各种实验仪器,还有一位实验物理学家在里面安心地进行着各种测量,不论外面发生什么事情,在这个电梯里什么也看不到。当电梯相对于地球静止时,实验家将看到,电梯里的一切落体都将重力加速度 g 落向地板,如图 6-7(a)所示。这表明电梯里的物体

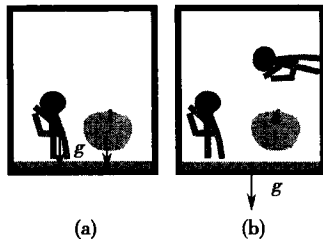


图 6-7 爱因斯坦理想电梯实验



受到了地球引力的作用;如果让电梯本身也做自由下落运动,由于惯性质量和引力质量相等,实验家将发现,电梯里的所有物体,无论是苹果还是羽毛,包括实验家自己都可以自由停留在空间而不“下落”,即处于完全失重的状态,如图 6-7(b)所示。这时电梯里的物体不再表现出任何受引力作用的迹象。接着,爱因斯坦对此作了进一步的引申,他认为,在上述电梯里的实验家,不仅通过任何力学现象看不到引力的迹象,而且通过其他任何物理实验也看不到引力的迹象。即是说,在这种电梯的参考系中,引力全部消除了。电梯中的实验家不能通过自己电梯中的物理现象,来判断他的电梯之外是不是有一个地球这样的引力作用源,他也测不出自己的电梯是否有加速度。这样的电梯,即一个在引力作用下自由下落的参考系叫局域惯性系(partial inertial system)。

爱因斯坦天才地提出引力和惯性力效果完全一样。基于惯性质量与引力质量相等,惯性系和非惯性系都能对自由落体实验作出合理的解释。以任何力学实验都不可区分引力和惯性力的效果,引力和惯性力存在等效性,称作弱等效原理(weak equivalence principle)。推广一步,假定任何物理实验(包括力学、电磁学和其他等)都不能区分引力和惯性力的效果,称为强等效原理(strong equivalence principle)。引力和惯性力的不可区分意味着惯性系和非惯性系不可用物理实验来区分。

一个在电梯中坠落的人,和一个在宇宙空间不受任何引力的人所感觉到的是完全一样。爱因斯坦把这个关于引力的假设称为等效原理。他写到:在一个局域惯性系中,重力效应消失了。在这样一个参考系中,所有物理定律和在一个在太空中远离任何引力物体的真正惯性系中的一样。反过来说,在一个在太空中加速的参考系中,将会出现表现的引力;在这样的参考系中,物理定律就和该参考系静止于一个引力物体附近一样。简单来说等效原理可以表述为:对一切物理过程,匀加速运动的参考系与引力场局域等效,惯性力和引力局域等效。

二、广义相对性原理

狭义相对论指出一切惯性系都是等价的,但惯性系与非惯性系却不等效。在广义相对论中,由于惯性质量与引力质量等价,惯性系与非惯性系之间的差别可看作是有无引力场的差别,一个作加速运动的非惯性系可以与有引力作用的惯性系等效。选择一个在引力场中自由下落的加速参考系,可将引力消除而成为局域惯性系。据此,爱因斯坦把相对性原理推广到一切惯性系和非惯性系。他提出,所有参考系都是平权的。即无论是惯性系还是非惯性系,物理定律的表达形式都相同。这一原理称为广义相对性原理(principle of general relativity)。

等效原理、广义相对性原理是爱因斯坦提出的广义相对论的基本原理。在此基础上,爱因斯坦采用了黎曼(Rimann)几何来描述具有引力场的时间和空间,写出了正确的引力场方程,进而精确地解释了水星近日点的反常旋进,预言了光线的引力偏折、引力红移和引力辐射等一系列新的效应,并对宇宙结构进行了开创性的研究。

三、引力场的时空特性

1. 光线弯曲 广义相对论实质是关于引力场的理论,一个重要结论即光线在引力场中弯曲。如图 6-8 所示,设在地球引力场中有一自由下落的升降机,从升降机左边的 A 点水平向右射出一束光线,由于自由下落的升降机与局域惯性系等价,升降机中的观测者看到的光线和在惯性系中的情形一样,以光速 c 沿直线传播到升降机右端的 B 点。从地面参考系看,在光线由 A 点传到 B 点的过程中,升降机在引力场中自由下落了一段距离,地面观测者看到光线传播的路径为一抛物线。由此可见,在引力场中光线将发生弯曲。

牛顿万有引力定律似乎也可以解释光在引力场中的弯曲现象:光子虽然静止质量为零,



但具有动质量,要受到引力的作用,产生指向引力场的加速度,本来是直线的光线路径就会变得弯曲,引力场越强的地方弯曲得越厉害。对于偏向角的计算,如光线经过太阳表面时,广义相对论的预言值比万有引力的计算值大2倍(图6-9)。许多天文观测证明,广义相对论的预言值与实验的测量值符合得很好。

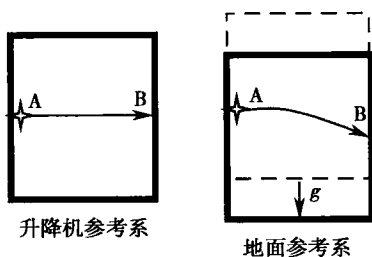


图 6-8 光线在引力场中的弯曲

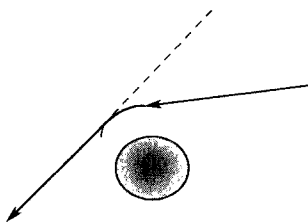


图 6-9 来自遥远恒星的光线经太阳附近发生了偏转

2. 空间弯曲 在牛顿力学中,认为时间和空间的测量与参考系无关,空间两点间的距离即线元 dl 为一不变量,即 $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{恒量}$ 。在狭义相对论中,时间和空间的测量与参考系有关,一维时间和三维空间构成一个四维的时空整体。在四维空间的 S 系和 S' 系中,可以用洛伦兹变换证明

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = \text{恒量}$$

上式称为闵科夫斯基(Minkowski H)公式。牛顿力学的三维空间和狭义相对论的四维空间(即惯性系中的空间)都是平直的欧几里德(Euclid)空间。光线在这样的空间里作直线传播,可理解为由惯性系的平直空间特性决定的。

等效原理指出:在局域惯性系中,光在真空中的传播速度仍然是 c 。引力场可以用无数个加速度不同的局域惯性系取代。因此,光在真空中的引力场中弯曲不会改变光的传播速度 c 。光在引力场中弯曲,同样是由引力时空的特性决定的:引力场中的时空是四维弯曲时空,即引力场使空间产生弯曲,或者说质量使空间产生弯曲。

在广义相对论中,空间和时间变成动力量,当一个物体运动时,或一个力起作用时,它影响了空间和时间的曲率。反之,时空的结构影响了物体的运动和力作用的方式。在相对论中,引力的惟一效果即引起了背景时空的弯曲。而在引力场中间的物体的运动就是物体在弯曲的背景时空上的运动。如太阳的质量使其周围空间发生弯曲,这种弯曲将影响光和行星的运动。光和行星在弯曲空间的运动要遵守“最短路径”原理(好像自由粒子在惯性系中作直线运动的路径最短一样),从而形成现在的运动方式。爱因斯坦认为:太阳对光和行星没有任何力的作用,它只是使空间发生弯曲,而光和行星只是沿这一弯曲空间中的“最短路径”运动而已。

3. 引力时间膨胀效应 自由空间(惯性空间)是平直空间。光在平直空间作直线传播,从 A 到 B 用的时间为 $\Delta t_0 = \overline{AB}/c$ 。引力场空间是弯曲空间。光在弯曲空间中作曲线传播(图6-10),从 A 到 B 用的时间 $\Delta t = \widehat{AB}/c$ 。由于 $\widehat{AB} > \overline{AB}$, 所以 $\Delta t > \Delta t_0$ 。这就是引力引起的时间膨胀效应(又称时间弯曲)。引力时间膨胀是引力空间弯曲的必然结果。

物体质量引起了时空几何结构的扭曲,越靠近物体的地方空间弯曲得越厉害,时间膨胀效应越显著。以太阳为例,靠近太阳的空间比远离太阳的空间弯曲得更厉害,则靠近太阳的钟比远离太阳的钟将走得更慢一些。

引力时间膨胀效应可以用引力红移现象来证明。由于引力效应,在太阳表面上原子发出的光的频率比远离太

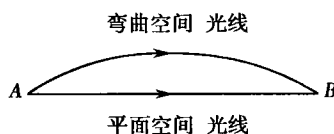


图 6-10 引力时间膨胀



阳同种原子发出的光的频率要低。这种由于引力作用使光谱频率向红光方向移动的现象,称为引力红移(gravitational redshift)。实验已经测定,太阳表面钾原子的发光频率比地面钾原子的发光频率减小了 $2/10^6$,与理论预言值符合得很好。

四、引力坍缩与黑洞

维持恒星处于平衡状态有两种力:一种是引力,引力使恒星收缩;另一种是星体内部热核反应产生的压力,它抵抗引力引起的收缩。当二者平衡时,形成稳定的恒星。太阳就是处于这一阶段的热星。

当恒星内部的核能用尽之后,它将逐渐演变成一颗冷星。恒星从普通的热星变为冷星过程中,压力不足以抗衡引力的收缩而导致星体的坍缩,这一现象称为引力坍缩(gravitational collapse)。坍缩的星体成为一颗致密星。致密星大体分为白矮星、中子星和黑洞三类。

黑洞(black hole)是体积为“无限小”而密度为“无限大”的奇态星体,其周围存在着极强的引力场,空间极其弯曲,时间无限膨胀而形成一个无底洞。任何物质(包括光子)一旦进入黑洞就永远不可能以原物态形式从黑洞中逃离出来。因此黑洞是存在的一个事件的集合或时空区域,光或任何物体都不可能从该区域逃逸而到达远处的观察者,看不到它只能凭引力去感知它。

现代天文学家认为有些星体可能就是黑洞,其中最出名的有天鹅座 X-1,其次还有天蝎座 V861 的 X 射线伴星,圆规座 X-1 和 GX339-4 等,有关黑洞的现象和理论还正在观察研究中。

五、引力波

和电荷作加速运动会产生电磁波一样,在引力场中作加速运动的物体将会发射出引力辐射或引力波(gravitational wave),它以光速将时空的形变传播出去。据此,爱因斯坦提出广义相对论时,预言了引力波的存在,并指出引力波是一种圆柱波。在地球范围内,由于引力波与物质的相互作用很微弱,探测十分困难。但在近几年对脉冲双星的引力研究中,不但证明了广义相对论的正确性,还间接证明了引力波的存在。

思考题与习题六

6-1 洛伦兹变换与伽利略变换的本质差别是什么?二者有何关系?

6-2 一列行进中的火车前、后两处遭雷击,车上的人看来是同时发生的,地面上的人看来是否同时?何处雷击在先?

6-3 站台两侧各有一列火车以相同的速率南北对开,站台上的人看两火车上的钟走得一样快吗?两火车上的人彼此看对方的钟呢?

6-4 (1) 对某观察者来说,发生在某惯性系中同一地点、同一时刻的两个事件,对于相对该惯性系作匀速直线运动的其他惯性系中的观察者来说,它们是否同时发生?

(2) 在某惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件,它们在其他惯性系中是否同时发生?

关于上述两个问题的正确答案是:

(A) (1)同时,(2)不同时

(B) (1)不同时,(2)同时

(C) (1)同时,(2)同时

(D) (1)不同时,(2)不同时

(A)

6-5 一宇航员要到离地球为 5 光年的星球去旅行,如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年,则他所乘的火箭相对于地球的速度应是:(c 表示真空中光速)

(A) $v=(1/2)c$

(B) $v=(3/5)c$

(C) $v=(4/5)c$

(D) $v=(9/10)c$

(C)



6-6 根据相对论力学,动能为 0.25MeV 的电子,其运动速度约等于

- (A) $0.1c$ (B) $0.5c$
(C) $0.75c$ (D) $0.85c$ (C)

(c 表示真空中的光速,电子的静能 $m_0c^2=0.51\text{MeV}$)

6-7 粒子在加速器中被加速,当其质量为静止质量的 3 倍时,其动能为静止能量的

- (A) 2 倍 (B) 3 倍 (C) 4 倍 (D) 5 倍 (A)

6-8 狭义相对论的两条基本原理中,相对性原理说的是

是_____ ;光速不变原理说的是_____。

答:1) 一切彼此相对作匀速直线运动的惯性系对于物理学定律都是等价的;

2) 一切惯性系中,真空中的光速都是相等的。

6-9 一观察者测得一沿米尺长度方向匀速运动着的米尺的长度为 0.5m 。则此米尺以速度 $v=$ _____ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 接近观察者。 ($2.60 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

6-10 一种基本粒子,在相对于粒子静止的坐标系中测得其寿命为 $2 \times 10^{-6}\text{s}$,如果粒子相对于地球的速度为 $v=0.988c$ (c 为真空中光速),则在地球坐标系中测出的粒子的寿命=_____。 ($1.29 \times 10^{-5}\text{s}$)

6-11 当粒子的动能等于它的静止能量时,它的运动速度为_____。 ($\frac{1}{2}\sqrt{3}c$)

6-12 一短跑选手,在地球上以 10s 的时间跑完了 100m 。在飞行速度为 $0.98c$,飞行方向与跑动方向相反的飞船中的观测者看来,这选手跑了多长时间和多长距离?
($50.25\text{s}; 1.48 \times 10^{10}\text{m}$)

6-13 设有宇宙飞船 A 和 B,固有长度均为 $l_0=100\text{m}$,沿同一方向匀速飞行,在飞船 B 上观测到飞船 A 的船头、船尾经过飞船 B 船头的的时间间隔为 $t=(5/3) \times 10^{-7}\text{s}$,求飞船 B 相对于飞船 A 的速度的大小。 [$2.68(10^8 \text{ms}^{-1})$]

6-14 一宇宙飞船以 $0.99c$ 的速度相对地球运动,在飞船上有一高强度的脉冲光讯号,脉冲延续的时间为 $2 \times 10^{-6}\text{s}$ 。在某一时刻,一个地球上的观察者发现,飞船正好在他头顶上方 1000km 的高处。问:

(1) 在地球上的观察者看来,光脉冲延续的时间是多长?

(2) 在脉冲延续的这段时间里,飞船相对于地面飞行了多少路程?

[(1) $1.42 \times 10^{-5}\text{s}$; (2) 4.22km]

6-15 两艘宇宙飞船 A 和 B 沿一直线作相向运动,一个地球上的观察者测得飞船 A 的速度大小为 $0.75c$,而 B 的速度大小为 $0.85c$,求 B 相对于 A 的速度。 ($-0.9771c$)

6-16 一观测者测出运动着的米尺的长度为 0.5m ,问此米尺以多大的速度接近观测者?

($0.87c$ 或 $2.61 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

6-17 太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为 $5 \times 10^{26}\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$,由于这个原因,太阳每秒钟减少多少质量? 把这个质量同太阳目前的质量 $2 \times 10^{30}\text{kg}$ 作比较,其比值为多少?

($5.6 \times 10^9 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$; 2.8×10^{-21})

6-18 静质量为 0.511MeV 的电子,具有 5 倍于它的静能的总能量,试求它的动量和速率。
($2.50\text{MeV} \cdot c^{-1}$; $0.980c$)

6-19 粒子的静止质量为 m_0 ,当其动能等于其静能时,其质量和动量各为多少?

($2m_0$; $\sqrt{3}m_0c$)

(王 磊)

第七章 分子动理论

学习要求:

1. 掌握理想气体分子的状态方程、压强公式、能量公式;弯曲液面的附加压强。
2. 理解理想气体分子的微观模型、分子动理论的统计方法、液体的表面现象。
3. 了解物质微观结构的基本观点、气体分子速率分布规律和能量分布规律、输运过程及表面活性物质的作用。

物体是由大量的分子组成,分子又由原子组成。分子有大小、质量、速度、能量等。这些表征单个分子特征的物理量称为微观量(microscopic quantity)。一般在实验室中测得的是表征大量分子集体特性的物理量,称为宏观量(macroscopic quantity)。例如气体的温度、压强、体积、热容等都是宏观量。单个分子的运动具有很大的偶然性,因此分子的微观量很难测量,但就大量分子的集体表现来看,却存在一定的统计规律。分子动理论是从物质的微观结构和分子运动论的观点出发,应用分子运动的力学规律和统计方法,求出微观量的统计平均值,确定微观量和宏观量的内在联系,以了解宏观规律的本质。

生命过程中有很多与热现象有关的过程,分子动理论及其研究方法,对生命科学具有重要的意义。本章介绍分子动理论的一些基本知识,为以后继续学习和深入研究打下基础。

第一节 物质的微观结构

宏观物体的分子或原子都处在永不停息的、无规则的运动之中,物体的温度愈高,运动就愈剧烈。大量分子的这种无规则运动称为热运动(thermal motion)。

分子之间存在力的作用。分子能够结合成物体的凝聚态(液体和固体),说明分子之间有引力。但固体和液体即使在巨大的压力作用下,其体积的改变也十分微小,这又说明了分子之间存在强大的斥力。分子间的引力和斥力统称分子力(molecular force)。根据实验和近代理论分析,物体分子间作用力 F 与分子中心间距离 r 的关系可用下式表示

$$F = \frac{C_1}{r^m} - \frac{C_2}{r^n} \quad (7-1)$$

式中 C_1 、 C_2 、 m 、 n 都是正数,根据实验数据确定。式(7-1)第一项是正的,代表斥力;第二项是负的,代表引力。由于 m 和 n 都比较大,所以分子力随着分子间距离的增加而急剧减小,故称为短程力。短程力只作用于很短距离,超过有效作用距离后,作用力实际上可以完全忽略。由于 $m > n$,所以斥力的有效作用距离比引力小。分子力 F 与分子中心间的距离 r 的关系如图 7-1(a)所示。当 $r=r_0$ 时,斥力与引力恰好平衡, $F=0$,这个位置称为平衡位置。 r_0 的数量级约为 10^{-10} m。当 $r < r_0$ 时, $F-r$ 曲线很陡,相当于分子紧挨在一起,彼此间的斥力很大。当 $r > r_0$ 时(r 的数量级约为 $10^{-10} \sim 10^{-8}$ m),分子间有一定的引力,随着

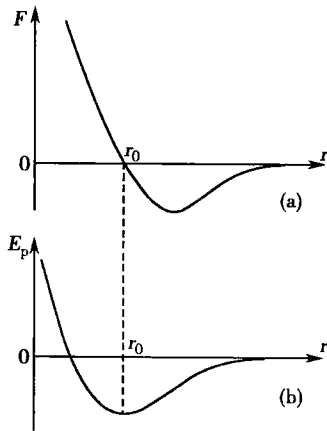


图 7-1 (a)分子间作用力 F 与分子间距离 r 的关系
(b)分子间作用势能 E_p 与分子间距离 r 的关系



分子间距离的增大,引力渐趋近于零。气体分子间的距离在一般情况下是相当大的,因此,气体分子间的引力极为微小,可以忽略不计。

分子间的相互作用也可以用分子间的势能曲线来描述。分子间的作用势能 E_p 与分子间的距离 r 的关系如图 7-1(b) 所示。由图可知,当 $r=r_0$ 时,势能最低,分子处于稳定状态。这一位置正好是图 7-1(a) 中 $F=0$ 的位置。当分子的位置偏离了 r_0 时,势能增加,分子处于不稳定状态,这时分子就力图回到势能最低的状态。

综上所述,一切物体都是由大量的分子组成;所有分子都处在不停的、无规则的运动之中;分子间存在力的相互作用。这就是物体微观结构的基本概念。分子力的作用使分子聚集在一起,在空间形成某种有规则的分布(有序排列),而分子的无规则热运动将破坏这种排列,使分子分散开来。物质的聚集态通常有液态、固态、气态、液晶态、等离子态等。不同的温度下,物体之所以会表现为不同的聚集态,是由分子力的作用来决定的。

第二节 理想气体分子动理论

本节将从分子热运动的基本观点出发,采用统计的方法,推导出理想气体应遵循的宏观规律,介绍了理想气体及其宏观参量,揭示理想气体宏观特性的微观本质。

一、理想气体状态方程

一定质量的气体在一确定的容器中,只要它与外界没有能量交换,内部也没有任何形式的能量交换(如化学变化或原子核反应),那么不论气体的原始状态如何,经过相当长的时间后,气体内部各处的密度、压强和温度都达到均匀一致的状态。在不受外界影响的条件下,一个系统的宏观性质不随时间改变的状态称为平衡态(equilibrium state)。平衡态只是一种宏观上的寂静状态,在微观上,分子的热运动是永不停息的,系统的平衡态是一种动态平衡。原来处于非平衡态的气体,最终都会由于分子的热运动和分子间的相互碰撞达到平衡态。

系统的平衡态可以用一组表示系统特性的宏观参量来描述,这些宏观参量称为态参量(state parameter)。对于平衡态下的一定质量的气体,一般用压强 p , 体积 V 和温度 T 来表示其宏观状态,它们就是气体的态参量。

在气体中,分子间的平均距离通常比分子的直径大得多,气体分子间的作用力极其微弱(除相互碰撞的瞬间外),可以忽略不计。我们将分子力和分子体积可以完全忽略的气体,称为理想气体(ideal gas)。实验表明,平衡态下,理想气体的态参量之间存在一定的关系式,即理想气体状态方程(equation of state of ideal gas)。

$$pV = \frac{M}{\mu} RT \quad (7-2)$$

式中 $R=8.314\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 称为摩尔气体常量, μ 是分子量, M 为容器中气体的质量,单位为 kg , 容器体积 V 的单位为 m^3 , 压强 p 的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ 或 Pa 。

理想气体实际上是不存在的,它只是真实气体的近似。实验表明,在压强不太大和温度不太低的实验范围内,各种真实气体都近似遵守理想气体状态方程所反映的规律。

二、理想气体微观模型

为了研究气体的运动规律,在实验的基础上,我们提出理想气体的微观模型:

(1) 分子本身的大小与分子之间的平均距离比较起来,可以忽略不计。

(2) 分子间的相互作用力是短程力,除了气体分子相互碰撞和气体分子与容器壁碰撞的瞬间外,气体分子之间及气体分子与容器壁之间的作用力可忽略不计。



(3) 气体分子之间的碰撞和气体分子与容器壁的碰撞都是完全弹性的。

以上微观模型在具体使用时,还必须做出统计性假设,即认为:同种气体分子的大小和质量完全相同;气体分子的平均动能比它在重力场中的势能大得多,所以分子所受的重力可以忽略不计;平衡态时,在容器内气体分子的运动是完全紊乱的,分子按位置的分布是均匀的,分子速度按方向的分布也是均匀的。统计性假设只适用于大量分子的集体运动。

以上假设都有一定的实验基础,由它们推得的结果是符合理想气体性质的,且在一定范围内可以解释真实气体的基本性质。

三、理想气体的压强公式

现在从上述模型出发,阐明理想气体压强的实质,并导出理想气体的压强公式。

容器中,气体在宏观上施于器壁的压强是大量气体分子对器壁不断碰撞的结果。就任一分子来说,对器壁的碰撞是断续的,它碰在器壁的什么地方,给予器壁冲量的大小都是偶然的,但是,由于大量分子的无规则运动,每一时刻都有许许多多的分子与器壁碰撞。所以在宏观上就表现出一个恒定而持续的压强。根据理想气体分子模型,气体分子可视为一个个极小的弹性质点,服从经典的力学规律。下面用统计方法,对大量分子的微观量求平均值,在数量上建立压强和分子运动之间的联系。

图 7-2 是边长为 L 的正立方容器(一个顶点位于直角坐标的原点),容器内有 N 个质量各为 m 的同种气体分子, N 很大,忽略重力的作用,且不受其他外场的作用,系统处于热平衡状态。各分子速度不等,分别为 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$ 。首先考虑分子 1 在一次碰撞中对器壁的作用,设分子 1 的速度在 x, y, z 方向的分量分别为 v_{1x}, v_{1y} 和 v_{1z} ,此分子与 A_1 面碰撞时,它的 x 方向的分速度由 v_{1x} 由改变为 $-v_{1x}$,而与 A_2 面碰撞时,再由 $-v_{1x}$ 改变为 v_{1x} 。在 y 和 z 方向的分速度 v_{1y} 和 v_{1z} 则不受影响。所以这个分子每与 A_1 面碰撞一次,动量的改变为 $-2mv_{1x}$,动量改变的方向垂直于 A_1 面。根据动量原理,分子动量的改变等于器壁对分子作用力的冲量。由牛顿第三定律,分子施于器壁的冲量是 $2mv_{1x}$ 。这就是一个分子碰撞一次时,对 A_1 面所产生的力学效果。分子与 A_1 面连续两次碰撞之间,在 x 方向所经过的距离为 $2L$,所需的时间为 $2L/v_{1x}$ 。单位时间内分子 1 与 A_1 面碰撞的次数为 $v_{1x}/2L$ 。所以,分子 1 在单位时间内施于面 A_1 的总冲量为

$$\frac{v_{1x}}{2L} \times 2mv_{1x} = \frac{mv_{1x}^2}{L}$$

单位时间内 N 个分子与 A_1 面碰撞而施予 A_1 面的总平均冲力 \bar{F} 为

$$\bar{F} = \frac{m}{L} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2) \quad (7-3)$$

故 N 个分子施加给器壁 A_1 面的压强为

$$p = \frac{\bar{F}}{L^2} = \frac{m}{L^3} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2) \quad (7-4)$$

又因单位体积的分子数 $n = N/L^3$,故式(7-4)可写为

$$p = mn \left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N} \right) \quad (7-5)$$

式中 $(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2)/N$ 是容器中所有分子的 v_x^2 的平均值,用 $\overline{v_x^2}$ 表示。对任一分子来说, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ 。在平衡状态下,气体的密度各处均匀一致,气体分子沿各个方向运动

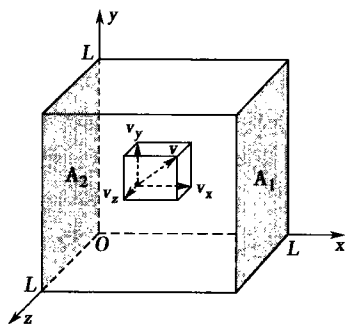


图 7-2 气体的压强



的几率应是均等的,所以三个速度分量平方的平均值彼此相等,且各个平均值正好等于 $\overline{v^2}$ 的 $1/3$,即 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$,于是式(7-5)可写成

$$p = \frac{1}{3} mn \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \cdot \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \cdot \bar{\epsilon} \quad (7-6)$$

式中 $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ 表示气体分子的平均平动动能。上式说明气体的压强与单位体积内的分子数 n 和分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$ 成正比, n 和 $\bar{\epsilon}$ 越大,压强也越大。式(7-6)称为理想气体的压强公式,它把宏观量压强 p 与分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$ 联系了起来。实际上压强是大量分子在足够长的时间内对足够大的面积碰撞所产生的平均效果,是一个统计平均值,离开了“大量分子”和“统计平均”,压强就失去了意义。 p 可以由实验测定,而 $\bar{\epsilon}$ 不能直接测定,但从这个公式出发能够满意地解释或推证许多实验定律。

四、理想气体的能量公式

从压强公式与理想气体状态方程,消去 p 得

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{n} \cdot \frac{M}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} \quad (7-7)$$

因为 $n = N/V$,而 $N = (M/\mu) N_A$, N_A 是阿伏伽德罗常量(Avogadro constant), $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$,代入式(7-7)得分子的平均平动动能(average translational kinetic energy) $\bar{\epsilon}$ 为

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \quad (7-8)$$

式中 $k = R/N_A = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$,称为玻耳兹曼常量。式(7-8)说明气体分子的平均平动动能只与温度有关,并与绝对温度成正比,而与气体的性质无关。即在相同的温度下,一切气体分子的平均平动动能都相等。从微观上阐明了温度的实质,温度标志着物体内部分子无规则运动的剧烈程度,温度越高表示物体内部分子热运动越剧烈。式(7-8)称为理想气体的能量公式,它揭示了宏观量 T 和微观量的平均值 $\bar{\epsilon}$ 之间的联系。由于温度是与大量分子的平均平动动能相联系的,所以温度是大量分子热运动的集体表现,也是有统计意义的,对于单个分子来说,温度是没有意义的。

决定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标数目,称为物体的自由度(degree of freedom)。气体分子的自由度随其结构而异。单原子气体分子可视为质点,它在空间的位置可用三个独立的坐标 x, y, z 来确定,故有三个自由度。对于多原子分子,若忽略分子内原子之间的振动,则可视为刚性分子。刚性双原子分子可视为一直线,描述其质心的位置需要三个独立坐标,另外还需要两个坐标来确定直线的方位,共有五个自由度。刚性三原子或三原子以上的气体分子,需要三个平动自由度三个转动自由度,共六个自由度。

因为 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$,代入式(7-8)得每个自由度的平均平动动能为

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{6} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} kT \quad (7-9)$$

可见分子在每一个运动自由度上的平均平动动能都是 $kT/2$ 。这一结论虽然是对分子平动说的,但在平衡状态下,由于气体分子无规则运动的结果,使得任何一种可能的运动都不会比另一种可能的运动更占优势,机会是完全均等的。因此,平均说来,不论气体分子的何种运动,相应于每一个可能自由度的平均动能都应相等,这一结论称为能量按自由度均分原理(equipartition theorem)。如果气体分子有 i 个自由度,则平均每个分子的总动能为 $ikT/2$ 。1摩尔自由度为 i 的气体的总动能为



$$E_{\text{mol}} = \frac{i}{2} RT \quad (7-10)$$

五、理想气体定律的推导

从理想气体的压强公式和能量公式出发,可以推导出理想气体的宏观规律。作为例子,我们推导阿伏伽德罗定律和道尔顿定律。

1. 阿伏伽德罗定律 将式(7-8)代入式(7-6)可得

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT \quad (7-11)$$

由上式可知,在相同的温度和压强下,各气体在相同的体积内所含的分子数相等,这就是阿伏伽德罗定律的另一种表达。

在标准状态下,即 $p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T = 273 \text{ K}$ 时,任何气体在 1 m^3 中所含的分子数都等于 $n_0 = 2.687 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$,这个数称为洛施密特常量。

2. 道尔顿定律 设在同一容器中有几种彼此不起化学作用的气体,各气体分子的质量和单位体积中的分子数分别为 m_1, m_2, \dots 和 n_1, n_2, \dots 。则在单位体积中,混合气体的分子数为 $n = n_1 + n_2 + \dots$,因在相同温度条件下,各种气体以及混合气体分子的平均平动动能都相等,即

$$\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 = \dots = \bar{\epsilon}$$

设 p_1, p_2, \dots 分别代表各种气体单独存在于容器内时的压强,即所谓分压强, p 代表混合气体的压强

$$p = \frac{2}{3} (n_1 + n_2 + \dots) \cdot \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} n_1 \cdot \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{2}{3} n_2 \cdot \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 + \dots = p_1 + p_2 + \dots \quad (7-12)$$

上式表明:混合气体压强等于组成该混合气体各成分的分压强的和,称为道尔顿分压定律(Dalton's law of partial pressure)或称道尔顿定律。

【例 7-1】 有一真空管,在 0°C 时其真空度为 $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$,求真空管内单位体积中的分子数和总平均平动动能。

解:根据式(7-11)得, $n = p/kT$

已知 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $T = 273 \text{ K}$, $p = 1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ 代入上式得

$$n = \frac{1.33 \times 10^{-3}}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} = 3.53 \times 10^{17} (\text{m}^{-3})$$

即真空管内气体在每立方米中有 3.53×10^{17} 个分子。

因每个分子的平均平动动能为 $\frac{3}{2} kT$,所以单位体积内气体分子的总平动动能为

$$E = n \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{p}{kT} \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} p = \frac{3}{2} \times 1.33 \times 10^{-3} = 1.995 \times 10^{-3} (\text{J} \cdot \text{m}^{-3})$$

道尔顿分压定律对理解某一组分气体的流动方向很重要,对混合气体的某一组分来说,它总是由高分压的地方向低分压的地方流动,流动的方向只决定于它自己的分压。混合气体的总压强和其他组分是分压强只影响该组分的流动速度,不会影响该组分的流动方向。

肺进行呼吸时,包括吸入氧气和呼出二氧化碳这两种相反的过程。氧从肺泡进入血液,再进入组织,而二氧化碳从组织进入血液,再进入肺泡。它们都是从自己的分压高的地方向分压低处流动。氧的流动由氧分压决定,与二氧化碳无关,二氧化碳的流动方向由二氧化碳的分压决定,与氧分压无关。

人在高空中,感到呼吸困难,四肢无力,这种乏氧症状是由氧分压低而引起的,与大气压的高低没有直接关系。登山运动员和航空飞行员易患缺氧性疾病,这也是因大气中的氧分



压低造成的。因此,只要提高氧分压,如采用高压氧筒,就可以防止缺氧症的发生。

第三节 气体分子速率分布律和能量分布律

理想气体处于热动平衡时,由于气体分子的相互碰撞,每个分子的速率都不断的在发生变化。在某一时刻,各个分子速率或能量的大小不同,运动的方向也不一致。对某一特定的分子来说,它的速率或能量的大小完全是偶然的。而就大量分子组成的分子整体来说,分子的速率或能量的分布却遵循一定的统计规律。1859年麦克斯韦(Maxwell)首先用统计方法从理论上解决了气体分子运动的速率分布问题,并且不久为实验所证实。

一、麦克斯韦速率分布定律

设容器中的气体处于平衡状态,气体的绝对温度为 T ,分子数为 N ,分子的质量为 m 。麦克斯韦速率分布定律告诉我们,速率介于 ν 和 $\nu + d\nu$ 区间内的分子数 dN 可以用下式表示

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{m\nu^2}{2kT} \right)} \cdot \nu^2 d\nu \quad (7-13)$$

式(7-13)的物理意义是:速率在 ν 与 $\nu + d\nu$ 之间的分子数 dN 与总分子数 N 成正比;与速率间隔 $d\nu$ 成正比;并和

$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{m\nu^2}{2kT} \right)} \cdot \nu^2$$

成正比。上式对于一定的气体在一定温度下是 ν 的函数,可用 $f(\nu)$ 表示,即

$$f(\nu) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{m\nu^2}{2kT} \right)} \cdot \nu^2 \quad (7-14)$$

由式(7-13)得

$$f(\nu) = \frac{dN}{N d\nu} \quad (7-15)$$

而 $dN/(N \cdot d\nu)$ 是单位速率间隔内的分子数对于总分子数的百分比,所以 $f(\nu)$ 的数值愈大就表示在这一单位速率间隔内,分子具有这样速率的百分比愈高。函数 $f(\nu)$ 定量地反映出一定气体的分子在一定温度下按速率分布的具体情况,称为速率分布函数(Maxwell speed distribution function)。

如果要确定分布在速率 ν_1 到 ν_2 间隔内的分子数在分子总数中的比率,可以在从 ν_1 到 ν_2 的速率范围内对分布函数 $f(\nu)$ 积分,即

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) d\nu$$

因为所有 N 个分子的速率必然从 0 到 ∞ 之间,也就是速率间隔从 0 到 ∞ 的范围内分子数占分子总数的比率为 1,即

$$\int_0^{\infty} f(\nu) d\nu = 1$$

这是分布函数 $f(\nu)$ 必须满足的条件,称为归一化条件。

图 7-3 画出了 $f(\nu)$ 与 ν 的关系曲线,该曲线称为速率分布曲线。由图中可见,曲线从原点开始逐渐上升,到达某一

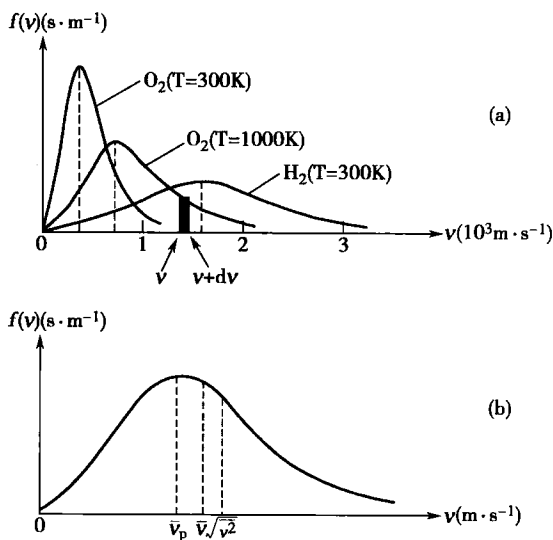


图 7-3 麦克斯韦气体分子速率分布定律



最高点,然后下降,渐近于零。根据速率分布曲线,我们可以得到以下几点认识:

(1) 曲线两端趋近于零。这表明在一定温度下,各种速率的分子都有。但速率较大和较小的分子数占总分子数的比率较小,具有中等速率的分子数占总分子数的比率较大。

(2) 与曲线 $f(v)$ 的最大值对应的速率 v_p 叫做最概然速率(the most probable speed),其物理意义是:若把整个速率范围分成许多相等的小区间,则 v_p 所在区间的分子数占总分子数的百分比最大。 v_p 的数值可由 $\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v_p} = 0$ 求出:

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (7-16)$$

(3) 当温度升高时, v_p 的值增大, $f(v_p)$ 减少,整个气体中速率快的分子数目增加,速率慢的分子数目减少。这就是通常说的温度越高,分子运动越激烈的真正含义。由于气体分子总数没有变,即曲线下所包围的总面积不变,所以随温度升高,曲线变得较为平坦。

(4) 在相同温度下,分布曲线的形状随气体分子质量的不同而异,因为分子的平均平动动能只决定于温度。温度一定,分子的平均平动动能也一定,质量较小的分子热运动速率必然较大,所以曲线将向右延伸。 v_p 随质量的减小而增大。

(5) 图中阴影区的面积为 $f(v) \cdot dv = \frac{dN}{N}$,其物理含义是表示速率在 v 附近,且位于区间 dv 内的分子数目 dN 占分子总数目 N 的比率。

已知速率分布函数,可以求得分子的平均速率 \bar{v} 。所有气体分子速率的算术平均值,称为平均速率(mean speed)可以表示为

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N}$$

考虑到速率是连续变化的,将求和变为积分,得

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\int_0^\infty v dN}{N} = \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \end{aligned} \quad (7-17)$$

还可以利用速率分布函数求 v^2 的平均值 $\bar{v^2}$

$$\bar{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m}$$

它的平方根称为方均根速率(root-mean-square speed) v_{rms} :

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (7-18)$$

以上三种速率中,方均根速率最大,平均速率次之,最概然速率最小,它们的大小顺序不因温度及气体的种类而变化,见图 7-3(b)。三种速率有不同的应用,例如,讨论速率分布时要用最概然速率,计算分子的平均平动动能时要用方均根速率,讨论分子的碰撞次数时要用平均速率。

[例 7-2] 求 0°C 时氢气和氧气的方均根速率

解:已知 $\mu_{\text{H}_2} = 0.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mu_{\text{O}_2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$,代入式(7-18),分别得氢的方均根速率为

$$\sqrt{\frac{3RT}{\mu_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.314 \times 273}{0.2 \times 10^{-2}}} = 1845 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$



氧的方均根速率为

$$\sqrt{\frac{3RT}{\mu_{O_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.314 \times 273}{3.2 \times 10^{-2}}} = 461 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

二、平均自由程和平均碰撞频率

在室温下,气体分子运动速率的数量级约为 $10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。但实际上每个分子在单位时间内的位移却远没有这样大。气体分子在运动中经常互相碰撞,在碰撞后它们的速率和运动方向都要发生变化。分子实际上是沿着曲折的路线运动的。一个分子在两次连续碰撞之间所走的自由路程有长有短,但是在一定条件下,这些路程的平均值是一定的。这一数值称为分子运动的平均自由程(mean free path),以 $\bar{\lambda}$ 表示。单位时间内一个分子的平均碰撞次数,称为平均碰撞频率(mean collision frequency),以 \bar{z} 表示

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} \quad (7-19)$$

气体单位体积内的分子数目愈多,或分子的直径愈大,引起的碰撞愈频繁,使平均自由程缩短。理论分析表明,分子运动的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 与分子直径 d 及单位体积内分子数 n 之间有如下关系

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (7-20)$$

因为 $p = nkT$, 上式又可以改写成

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \quad (7-21)$$

这说明:当温度一定时,平均自由程与压强成反比。表 7-1 列出在标准状态下几种气体分子的有效直径和平均自由程。表 7-2 列出在 0°C 时,不同压强下空气分子的平均自由程的数量级。

表 7-1 几种气体在标准状态下的有效直径和平均自由程

气体	$d(\text{m})$	$\bar{\lambda}(\text{m})$
H_2	2.7×10^{-10}	11.60×10^{-8}
N_2	3.7×10^{-10}	6.12×10^{-8}
O_2	3.6×10^{-10}	6.50×10^{-8}
CO_2	4.6×10^{-10}	3.98×10^{-8}
空气	3.5×10^{-10}	6.88×10^{-8}

表 7-2 0°C 不同压强下空气分子的平均自由程

$P(\text{Pa})$		$\bar{\lambda}(\text{m})$
1.013×10^5	(1atm)	7.0×10^{-8}
133.3	(1mmHg)	5.4×10^{-5}
1.333	(10^{-2} mmHg)	5.4×10^{-3}
1.333×10^{-2}	(10^{-4} mmHg)	5.0×10^{-2}
1.333×10^{-4}	(10^{-6} mmHg)	50

在标准状态下,如果取 \bar{v} 的数量级为 $10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,由表 7-1 可知, $\bar{\lambda}$ 的数量级为 10^{-7}m ,则平均碰撞频率 \bar{z} 的数量级约为 10^9s^{-1} ,即在 1 秒内一个分子将和其他分子平均碰撞约几十亿次。由此我们可以得出:气体分子的平均自由程要比分子的有效直径约大 1000 多倍,气体分子的运动是相当自由的,且永不停息的运动着。每当分子行进千万分之一米左右的极



短路程,就要与其他分子相碰撞而改变运动的速率和方向,可见气体分子总是在不停地作无规则的热运动。

[例 7-3] 氮气分子的有效直径 $d=3.7\times 10^{-10}\text{ m}$,在标准状态下,求氮气分子的平均碰撞频率。

$$\text{解: } \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 6.12 \times 10^{-8} (\text{m}), \bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 455.5 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{455.5}{6.12 \times 10^{-8}} = 7.4 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$$

氮气分子在标准状态下,每秒钟碰撞的次数达 10^9 数量级。

三、玻耳兹曼能量分布定律

气体分子在不受外力作用下达到平衡状态时,尽管分子的速率很不一致,但是每单位体积内的平均分子数目是相等的。如果气体处于重力场中,或者带电的分子处于电场中,则分子除了动能以外还具有势能,分子的分布就不会再是均匀的了。这时单位体积中的分子数目与分子的势能有关,服从玻耳兹曼能量分布定律:

$$n = n_0 e^{-E_p/kT} \quad (7-22)$$

式中 n 表示单位体积中的分子数, n_0 表示在势能为零处的单位体积中的分子数, E_p 是分子的

势能。因为 E_p 和分子所处的位置有关,在不同的位置,气体分子的密度不相同。

玻耳兹曼能量分布定律是一个普遍的规律,它对任何物质的微粒(气体、液体和固体的分子与原子,以及布朗粒子等)在任何保守场(重力场、电场等)中的运动情况都成立。

在重力场中,气体分子受到两种互相对立的作用,无规则的热运动将使气体分子均匀分布到它们所能达到的空间,而重力则会使气体分子聚集到地面上。这两种作用达到平衡时,气体分子在空间作非均匀分布,分子数随高度增加而减小。

作为一个例子,让我们利用玻耳兹曼分布定律了解大气分子在重力场中的分布情况。大气分子在重力作用下具有势能 $E_p = mgh$ 代入式(7-22),得

$$n = n_0 e^{-mgh/kT} \quad (7-23)$$



匀的,这实际上是处于动态平衡。但是当物体远离平衡态时,内部各处的温度、压强、密度和浓度就各不相同了。这时将发生物质粒子、能量或动量在物体内部各部分间的迁移现象。例如,气体或液体各部分的密度不均匀时,就会出现分子从高密度处向低密度处迁移,形成质量迁移的现象,称为扩散;当物体各部分的温度不均匀时,会发生高温处能量较大的分子与低温处能量较小的分子交换,出现能量迁移的现象,称为热传导;而当流体内部各层流速不相同,会发生黏滞现象。这些都是典型的从非平衡态趋向平衡态的变化过程。在从非平衡态趋向于平衡态的过程中,物体内部出现的质量、能量或动量的转运过程,称为输运过程(transport process)。

从表面上看,扩散、热传导和黏滞现象似乎互不相关,但实际上这三种现象具有共同的宏观特征和微观机构,它们产生的原因都是由于分子的热运动和分子间的频繁碰撞。从分子运动的观点可以推导出输运过程的基本规律,并确定扩散系数、导热系数、黏滞系数等与物体结构参量之间的关系。黏性在第二章中已作了介绍。本节着重介绍有关能量和质量转运过程的物理基础。

一、热传导

当物体内部的温度不均匀时,就会有能量从温度较高处传递到温度较低处,这种现象称为热传导(heat conduction)。设温度 T 沿 z 轴正向逐渐升高,如图 7-4 所示。在时间 dt 内通过与 z 轴垂直的截面 dS 从 B 部传递到 A 部的能量 dQ 与温度梯度 dT/dz 、面积 dS 和时间 dt 成正比

$$dQ = -K \left(\frac{dT}{dz} \right) \cdot dS \cdot dt \quad (7-26)$$

式中导数 dT/dz 是温度梯度,它表示温度在单位距离中的变化量。负号表示能量传递的方向与温度梯度的方向相反,即能量沿温度逐渐降低的方向传递, K 称为导热系数,它由物体的性质决定,其单位为 $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

热传导过程起源于分子的热运动。温度较高处的分子动能较大,温度较低处的分子动能较小。温度较高处的分子有可能进入温度较低处,使该处分子的平均动能增加,温度较低处的分子也有可能进入温度较高处,使该处分子的平均动能减小。在分子相互碰撞时,虽然两个分子运动速度的改变与碰撞时的具体情况有关,但平均起来总是来自高温处的分子损失能量,而来自低温处的分子获得能量。因此,热传导过程是微观粒子输运能量的过程,是使物体的温度均匀化而趋于热平衡的过程。

根据气体分子运动论,可以推出气体的导热系数为

$$K = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot C_v \quad (7-27)$$

式中 C_v 是气体的等体摩尔热容。气体分子的运动速率虽然很大,但平均自由程很短,而且气体的密度小,输运能量的粒子少,所以气体的导热系数是很小的。非金属的液体和固体的导热系数也都不大,因为它们主要是通过分子碰撞而输运能量。但是金属的导热系数却很大,其能量输运过程主要是借助自由电子来实现,因为自由电子的平均自由程很大。气体和液体中的能量输运,宏观对流比传导所起的作用更大。稀疏多孔的棉毛衣服之所以保温,就是由于它抑制了空气的对流。

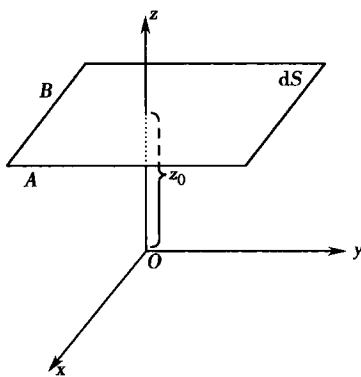


图 7-4 物体内部输运过程定律的推导图



二、扩散

当物体内部的成分不均匀时,该成分将从密度高处向密度低处转移,这就是扩散(diffusion)现象。在混合气体内部,当某种气体的密度不均匀时,这种气体分子将从密度大的地方向密度小的地方转运。在溶液内部,若溶质浓度不均匀,溶液中的溶质将从浓度高处向浓度低处转运,同样会发生扩散现象。扩散是质量的转运过程,也是气体内部密度大的物质均匀化的过程,或溶液内溶质均匀化的过程。

扩散过程比较复杂,单就一种气体来说,在温度均匀的情况下,密度的不均匀将导致压强的不均匀,从而将产生宏观气流,这样在气体内发生的过程就不是扩散过程了。对于两种分子组成的混合气体,也只有在保持温度和压强处处均匀的情况下,才可能发生单纯的扩散过程。

设某种物质的密度沿 z 轴正方向增加,密度梯度为 $d\rho/dz$,如图 7-4 所示,该物质将从 B 部扩散到 A 部,在时间 dt 内通过垂直于 z 轴的截面 dS 的该物质的质量 dm 和密度梯度 $d\rho/dz$ 、面积 dS 、时间 dt 成正比,即

$$dm = -D \frac{d\rho}{dz} \cdot dS \cdot dt \quad (7-28)$$

式中 D 称为扩散系数,单位为 $m^2 \cdot s^{-1}$,负号表示质量沿密度梯度减小的方向输运。式(7-28)称为菲克第一定律(Fick first law)。

扩散过程也是分子热运动的结果。由于分子热运动和分子间的不断碰撞,从高密度处进入低密度处的分子数要比从低密度处进入高密度处的分子数多一些,密度差愈大,这种差别也愈大。扩散现象是物体内部消除密度差使其趋于均匀分布的一种倾向。如果只有各种成分的密度差别而没有压强与温度的差别,则气体中的扩散过程进行得很快,当容器不很大时,达到平衡态的时间通常以秒计;液体则以日计;而固体中在室温下经过很多年也不一定能达到平衡态。

气体扩散系数由理论可以推得

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \quad (7-29)$$

上式说明,分子运动的平均速率 \bar{v} 愈大,则密度不同区域中的分子交换愈快;平均自由程 $\bar{\lambda}$ 愈大,则这些分子在每次自由飞行中愈能深入到密度差别较大的区域。升高温度可以增大分子运动的平均速率,加快扩散过程。

理论还可以证明,分子在液体中的扩散系数与液体的温度 T 、分子半径 r 以及液体的黏性系数 η 有关

$$D = \frac{kT}{6\pi r\eta} \quad (7-30)$$

上式称为爱因斯坦-斯托克司关系式(Einstein-stokes' relation)。由式可知,温度越高、分子半径越小、液体的黏性系数越小,扩散就进行得越快。

三、透膜运输

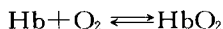
扩散是分子在无限介质中由于密度不均匀而引起的输运过程。在生物体中,分子的输运过程更多的是通过生物膜进行的。生物膜,例如细胞膜或毛细血管壁,一般具有能让某些物质分子通过而不让另一些分子通过的特性,具有这种特性的膜称之为半透膜(semipermeable membrane)。分子和离子透过生物膜的输运是最基本的生理过程,例如胃黏膜细胞分泌盐酸透过细胞膜进入胃腔帮助消化食物;营养物质或药物透过肠黏膜而被吸收,再由血液



转运并透过毛细血管进入组织;肺泡中的空气透过肺泡膜和毛细血管壁与血液交换氧气和二氧化碳;二氧化碳和废料则透过细胞膜排出体外等。这些分泌、吸收、排泄过程等都是物质透过生物膜的输运过程。

肺中氧和二氧化碳的输运和交换,是气体通过生物膜扩散的一个很好的例子。在肺中两种气体的交换都是在肺泡和毛细血管中进行的。在肺泡周围有许多毛细血管,肺泡膜和毛细血管壁的厚度不到 $1\mu\text{m}$,且能让脂溶性的氧、二氧化碳和氮气等气体分子自由通过,故肺泡与血液间的气体交换是由扩散过程来完成的。

通过呼吸运动,肺泡中氧气的浓度高于毛细血管中氧气的浓度,因此氧气从肺泡经过肺泡膜和毛细血管壁进入血液中,然后与血红蛋白(Hb)结合形成氧合血红蛋白(HbO_2)存在于红细胞内。氧气和血红蛋白的结合和解离是可逆的,可以用下式表示



当红细胞流经氧分压较高的肺部时,血红蛋白就迅速与从肺泡扩散到血液中的氧气结合形成氧合血红蛋白,而在氧分压较低的组织中,血液中的氧合血红蛋白又迅速解离释放出氧气,扩散到组织中,以供各组织的氧气需求。组织吸收氧气进行氧化后所产生的二氧化碳,又扩散到血液中,一部分以 KHCO_3 的形式存在于红细胞中,另一部分则以 NaHCO_3 的形式存在于血浆中,经血液循环后输运到肺部。由于肺泡中二氧化碳的分压低于静脉血中二氧化碳的分压,故血液中的 KHCO_3 和 NaHCO_3 迅速解离释放出二氧化碳,再扩散到肺泡中,经呼吸排出体外。

带电粒子(如溶液中的各种离子)的扩散与中性粒子的扩散规律基本上是相同的,差别在于带电粒子扩散的结果将在不同浓度的区域累积电荷,产生电场。带电粒子在这个电场中所受到的电力是使它有一个与扩散方向相反的漂移运动,最后达到平衡状态,即通过任何一个截面,每秒正向扩散的某种带电粒子数与每秒反向漂移的该种带电粒子数相等,浓度差不再改变。溶液中通常有多种离子,每种离子都应当达到平衡状态,但是反抗扩散的是一个公共电场,因此,在平衡时各种离子浓度的比例是受到严格限制的。

人体细胞内 K^+ 浓度比细胞外高,而 Na^+ 浓度则比细胞外低。由于 K^+ 扩散的结果,细胞膜的内侧带负电荷,外侧带正电荷。这个电势差基本上可以阻止 K^+ 的继续扩散,维持细胞内外一定的浓度差,但却使 Na^+ 从细胞外向细胞内漂移,与 Na^+ 的扩散方向相同,使细胞内 Na^+ 愈来愈多,不能维持细胞内外 Na^+ 一定的浓度差。因此,机体必须有一种途径把 Na^+ 从细胞内运送到细胞外去,正如水泵把水从低处逆着重力的方向运送到高处一样,我们把机体从细胞内运送 Na^+ 到细胞外的机制称为钠泵,其具体过程将在生理学中学习。机体有很多过程,包括输运过程,都可以逆着无机界物理、化学过程的方向进行,这种过程称为主动过程。主动过程并不违反自然规律,但它必须消耗能量才能完成。

第五节 液体的表面现象

从气体到液体,一个很大的变化是分子间的距离缩短,分子力的作用显著加强。液体分子间由于相互吸引,表现出气体分子间所没有的内聚力(cohesive force)。由于这些引力,使液体具有边界明确的表面。在液体与气体分界的表面,液体与固体的接触面以及两种不易混合的液体之间的界面上,都可以观察到一些特殊的液体表面现象,表现出液体表面与液体内部的不同性质。其中一些特性,对生物体来说,有着极为重要的意义。

本节主要讨论与生命过程密切相关的一些液体表面现象,并分析这些现象发生的原因和规律。



一、表面张力和表面能

自然界中很多现象说明,液体表面犹如张紧的弹性薄膜,具有收缩的趋势。例如,荷叶上的小水珠,洒落在水平玻璃板上的小水银滴等都近似成球形。由几何学可知,在体积相同的各种形状中,以球形的表面积最小。一定质量的液体由某一非球形的形状过渡到球形,是与其表面积缩小联系着的。由此可见,液体有收缩表面使其表面积趋向最小的性质。这就是说,在液体表面层内具有一种收缩的力,我们把这种促使液体表面收缩的力,称为表面张力(surface tension)。

我们设想用任意分界线 MN 把液体表面分割成两部分,如图 7-5 所示。则分界线两侧的液面互以大小相等、方向相反的拉力作用对方,这种相互拉力就是表面张力。实验表明,表面张力的方向与分界线垂直,并与液体表面相切。如果液面是平面,表面张力就在平面内,如果液面是曲面,表面张力就在这个曲面的切面上。其大小与被研究的液面分界线的长度 L 成正比。用 F 表示作用在分界线 L 上的表面张力,则

$$F = \alpha L \quad (7-31)$$

式中,比例系数 α 叫做液体的表面张力系数,它是作用在单位长度分界线上的表面张力,在国际单位制中,其单位是 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

表面张力系数的大小与液体种类有关。各种不同液体的表面张力系数相差很大,并且与温度有着密切的关系。同一种液体, α 值随温度升高而减小。当纯净液体内含杂质时, α 值也会发生变化。表 7-3 列出了几种液体的表面张力系数。

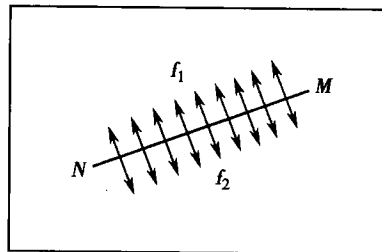


图 7-5 表面张力

表 7-3 不同液体与空气接触时的表面张力系数 α

液体	温度($^{\circ}\text{C}$)	$\alpha(\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \text{ 或 } \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	液体	温度($^{\circ}\text{C}$)	$\alpha(\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \text{ 或 } \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$
丙酮	20	0.0237	肥皂液	20	0.025
甲醇	20	0.0226	溴化钠	熔点	0.103
苯	20	0.0228	水	0	0.0756
氯仿	20	0.0271	水	20	0.0728
甘油	20	0.0634	水	30	0.0712
水银	15	0.487	水	100	0.0589

表面张力产生的原因,可以用分子力加以解释。已知分子间的平衡距离 r_0 的数量级约为 10^{-10}m ,当两分子间的距离大于 r_0 而在 $10^{-10} \sim 10^{-9}\text{m}$ 时,分子间作用力表现为引力,而当分子间的距离大于 10^{-9}m 时,引力很快趋于零。可以认为,以 10^{-9}m 为半径作一球面,则只有在这个球面内的分子才对位于球心的分子有作用力。因此,分子引力作用的范围是半径为 10^{-9}m 的球形,称为分子作用球,球的半径称为分子作用半径。

在图 7-6 中的液体表面取厚度等于分子作用半径的一层,称为液体的表面层,在表面层内的分子 m 与液体内部分子 m' 受力的情况不一样。以分子 m 和 m' 为球心作分子作用球,可以看出,液体内部的分子 m' 所受周围分子的引力在各个方向大小相等,合力为零。而在表面层的分子 m ,下部分子对它的引力大于上部分子对它的引力,其合力等于图中 efg 部分分子对 m 引力的矢量和,合力垂直于表面层指向液体内部,而且分子 m 愈接近液面合力愈大。由此可见,处于液体表面层的分子都受到一个指向液体内部的力的作用。在这些力的作用下,液体表面就处于一种特殊的张紧状态,在宏观上表现为一个被拉紧的弹性薄膜而具



有表面张力。

由上述可知,所有位于表面层的液体分子,都要受到垂直液面并指向液体内部的分子引力的作用,这些引力分别被一些十分靠近的分子的斥力所平衡,使其能够停留在液体的表面层。如果要把液体内部的分子移到表面层,就必须反抗表面层下面的分子对它的引力做功,从而增加了这一分子的势能。可见表面层内的分子比液体内部的分子具有更多的势能。

由于系统的势能有减到最小的趋势,因此,只要可能,表面层的分子就要往液体内部迁移,使表面积缩到最小。反之如果要增加液体的表面积,就得做功把更多的分子提到液面上来,从而增加液体表面的势能。表面层中所有分子高出液体内部分子的那部分势能的总和,称为液体的表面能,又称为表面自由能。

下面从外力做功的角度考察表面张力系数与液体表面能的关系。图 7-7 为 U 形金属框 ABCD,上面有一层液体薄膜,金属框的一边 BC 长为 L,可以自由滑动。由于表面张力的作用,薄膜要收缩。BC 边要向 AD 边移动。要使 BC 边匀速向右移动,必须施加一个与表面张力大小相等,方向相反的力 F。假设金属丝 BC 边在力 F 的作用下向右移动一段距离为 Δx ,达到图中 B'C' 的位置,由于液膜有上、下两个表面,则增加的液膜表面积 $\Delta S = 2L \cdot \Delta x$,外力 $F = 2\alpha L$,这时外力所做的功为 $\Delta A = F \cdot \Delta x$,增加液体单位表面积所做的功为

$$\frac{\Delta A}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta x}{2L \cdot \Delta x} = \frac{2\alpha L}{2L} = \alpha (\text{J} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (7-32)$$

由式(7-32)可知,表面张力系数在数值上等于增加单位表面积时外力所做的功。从能量角度看,表面张力系数的大小等于增加单位表面积时所增加的表面自由能。

应该指出,液体表面张力与弹性膜的张力在本质上是不同的。弹性膜的张力随面积的增加而增加,而液面的张力却不受面积变化的影响。这是因为弹性膜分子间的距离随膜的面积的增加而变大,而对液膜来说,尽管它的面积增大,液面分子间的距离却由于液内分子的补充而维持不变。

二、弯曲液面的附加压强

液体表面层相当于一个拉紧的弹性膜,若液体表面为曲面,则表面张力有拉平液面的趋势,从而对液体产生附加压强。附加压强的方向由表面张力的方向确定,大小可用液面内外的压强差来表示。

我们来研究球形液面内外压强差的大小,如图 7-8(a)所示,在液面处隔离出一个球帽状的小液块,分析其受力情况,可以看出,小液块受到三部分力的作用:一部分力是通过小液块的边界线作用在液块上的表面张力,处处与该边界线垂直,并与球面相切。第二部分力是液体内外的压强差产生的作用于液块底面(即图中阴影部分)向上的压力;第三部分力是小液块的重力,它比前两部分力要小得多,可以忽略不计。

设球形液面半径为 R,单位长度液体表面的张力为 T(大小即为液体的表面张力系数

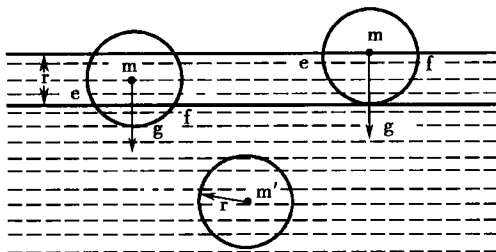


图 7-6 液体表面层分子所受的力

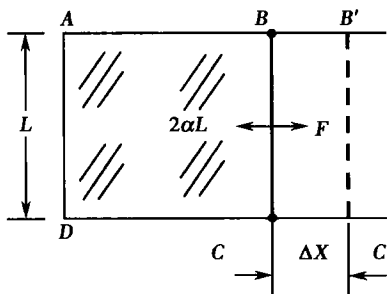


图 7-7 表面张力系数与表面能

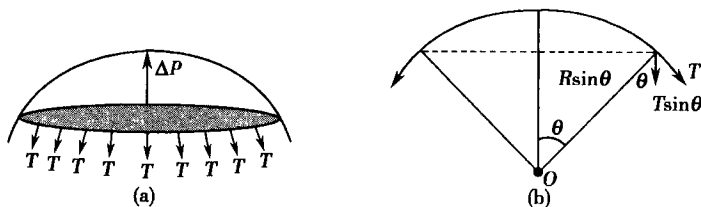


图 7-8 球形液面的张力和压强

α), 各量关系见图 7-8(b)。T 的垂直向下分量为 $T \cdot \sin\theta$, 则小液块边界线所具有的总张力向下分量为:

$$2\pi R \sin\theta \times T \sin\theta = \alpha \times 2\pi R \sin^2\theta$$

若液体内外的压强差用 Δp 表示, 则小液块所受的向上压力为

$$\Delta p \times \pi R^2 \sin^2\theta$$

这两部分力方向相反, 在平衡时它们的大小应该相等。所以

$$\alpha \times 2\pi R \sin^2\theta = \Delta p \times \pi R^2 \sin^2\theta$$

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R} \quad (7-33)$$

上式称为球形液面的拉普拉斯公式。公式对于凸、凹的球形液面都是适用的, 如果液面是凸的, Δp 取正值, 说明液面内的压强比液面外的压强大; 如果液面是凹的, Δp 取负值, 说明液面内的压强小于液面外的压强。

图 7-9 是一个球形液膜(如肥皂泡)。液膜具有内外两个表面层, R_1 和 R_2 分别是液膜内、外表面的半径。设球形液膜内 C 点的压强为 p_C , 液膜中 B 点的压强为 p_B , 膜外 A 点的压强为 p_A 。因液膜的外表面是一个凸面, 由式(7-33)知

$$p_B - p_A = \frac{2\alpha}{R_2}$$

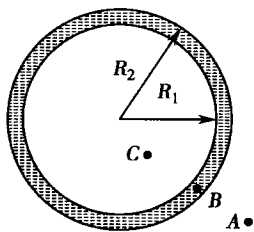


图 7-9 球膜的附加压强

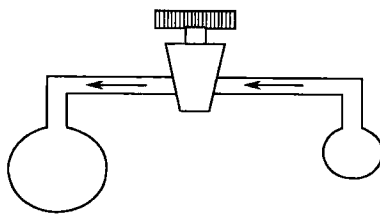


图 7-10 球面附加压强实验

而液膜的内表面是一个凹面, 附加压强是负值, 所以

$$p_B - p_C = -\frac{2\alpha}{R_1}$$

因为液膜很薄, 可以认为 $R_1 = R_2 = R$, 从上述两式中消去 p_B , 则得

$$p_C - p_A = \frac{4\alpha}{R} \quad (7-34)$$

即肥皂膜处于平衡时, 膜内压强比膜外压强大 $\frac{4\alpha}{R}$ 。这就是球形液膜产生的附加压强。

图 7-10 是在一个管子的两端吹两个大小不等的肥皂泡。打开中间活塞, 使两泡相通, 我们会看到小泡不断变小, 而大泡却不断变大。这是因为小泡中的空气压强比大泡中的空气压强大的缘故。直到大泡的曲率半径和小泡剩余部分的曲率半径相同才会达到平衡。球



面附加压强对了解肺泡的物理性质和呼吸是很重要的。

三、毛细现象和气体栓塞

1. 毛细现象 在玻璃板上放一小滴水银,它总是近似球形而不附着在玻璃上,这时我们说水银不润湿玻璃。在无油脂的玻璃板上放一滴水,水总沿着玻璃面向外扩展,附着在玻璃上,这时我们说水润湿玻璃。液体和固体接触时,有时液体能润湿固体,有时则不能。这种差别是由液体分子之间的吸引力(称为内聚力)小于或大于液体分子与固体分子之间的吸引力(称为附着力)所决定的。如果内聚力小于附着力,则液体与固体的界面有尽量扩大的趋势,固体上的液滴将展开成薄膜,固体被润湿;如果内聚力大于附着力,则液体与固体的界面有尽量缩小的趋势,固体上的液滴不会展开,不发生润湿现象。在液体与固体的接触处,作液体表面的切线与固体表面的切线,这两切线通过液体内部所成的角 θ ,称为接触角(contact angle),其值介于 0° 和 180° 之间,由附着力和内聚力的大小而定。附着力越大, θ 越小,液体越能润湿固体。 $\theta=0^\circ$ 时,液体完全润湿固体。图 7-11(a)表示附着力大于内聚力,固体被润湿, θ 小于 90° ;图 7-11(b)表示内聚力大于附着力,固体不被润湿, θ 大于 90° ; $\theta=180^\circ$ 时为完全不润湿。

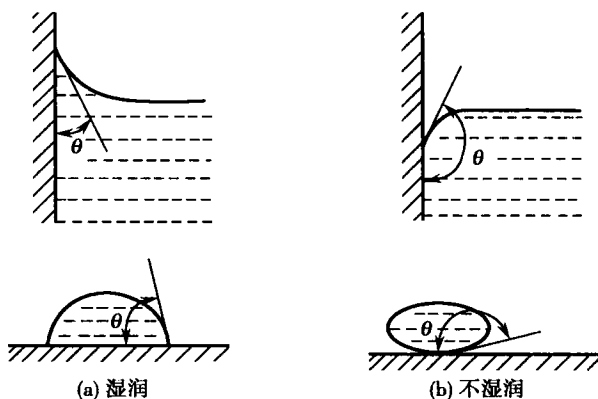


图 7-11、接触角

内径很小的管子称为毛细管。将毛细管的一端插入液体中,液体润湿管壁时,管内液面上升,不润湿时则下降,这种现象称为毛细现象(capillarity)。

下面分析液面上升的情况。因毛细管内径很小,将其插入液体时,管内的液面可看成是球面的一部分,如图 7-12 所示。由于液面是凹面,因此液面下的压强低于液面外的大气压强。设接触角为 θ ,毛细管的内半径为 r ,液面的曲率半径为 R 。由图可见, $r=R\cos\theta$ 。根据式(7-33)液面内外的压强差为

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R} = \frac{2\alpha \cdot \cos\theta}{r}$$

此压强差使管内液面上升。根据流体静力学,达到平衡时,管内液面下的 B 点应该和同水平面的 C 点压强相同,即

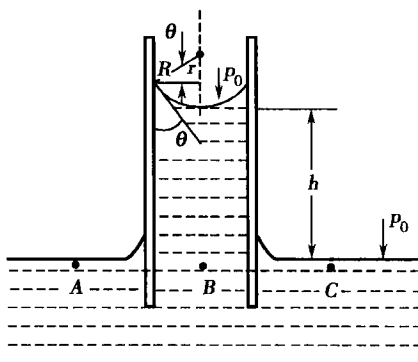


图 7-12 毛细现象



$$p_0 - \frac{2\alpha \cos\theta}{r} + \rho gh = p_0$$

式中 p_0 为大气压强, h 为平衡时管内外液面的高度差, ρ 是液体的密度。由上式得

$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g} \cos\theta \quad (7-35)$$

上式说明,毛细管中液面上升的高度与表面张力系数成正比,而与毛细管的内径成反比。管径越细,液面上升越高。

对于不润湿管壁的液体,在毛细管内的液面是凸的,液面内的压强高于液面外的压强,管内的液面将下降至管外的液面之下,其高度差也可用式(7-35)计算,此时接触角 $\theta > \pi/2$,故所得的 h 为负,表示管中液面下降。

毛细现象在日常生活中经常遇到。对于植物的吸收和水分运输,动物血液在毛细血管中的流通和气体栓塞现象,毛细现象都起着重要的作用。

2. 气体栓塞 液体在细管中流动时,如果管中有气泡,液体的流动将受到阻碍,气泡多时可发生阻塞,这种现象称为气体栓塞(air embolism)。图 7-13(a)表示均匀毛细管中的一段润湿性液柱,中间有一个气泡,在左右两端的压强相等时,气泡两端的液面形成同样的凹弯月面,且其曲率半径相等,因表面张力而出现的附加压强大小相等方向相反,所以液柱不流动。如果在毛细管左端增加压强 Δp ,这时气泡左边的曲率半径变大,右边的曲率半径变小,因而使左端弯曲液面所产生的附加压强 $p_{\text{左}}$ 比右端弯曲液面所产生的附加压强 $p_{\text{右}}$ 小。如果它们的差值正好等于 Δp ,即 $\Delta p = p_{\text{右}} - p_{\text{左}}$,则系统仍处于平衡状态,液柱不会向右移动,如图 7-13(b)所示。只有当两端的压强差 Δp 超过某一临界值 δ 时,气泡才能移动。这个临界值 δ 与液体和管壁的性质以及管的半径有关。当管中有 n 个气泡时,则只有当 $\Delta p \geq n\delta$ 时液体才能带着气泡移动,如图 7-13(c)。

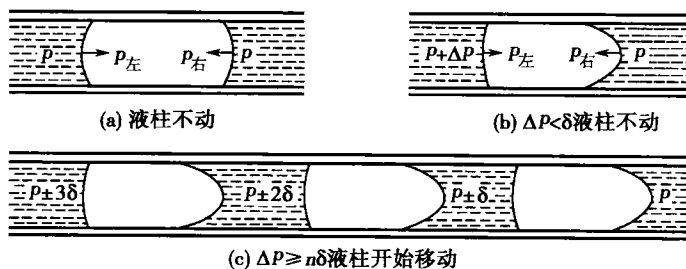


图 7-13 气体栓塞

给病人输液时,要经常注意防止输液管中出现气体栓塞现象。作静脉注射时,应特别注意不能在注射器中留有气泡,以免在微血管中发生栓塞。此外,潜水员从深水中上来,或病人和工作人员从高压氧舱中出来,都应有适当的缓冲时间,否则,高压时溶于血液中的过量气体,在正常压强下会迅速释放出来形成气泡,容易形成气体栓塞。

四、表面活性物质与表面吸附

溶液的表面张力系数通常都与溶剂的表面张力系数有所不同,有的溶质使溶液的表面张力系数减小,有的溶质则使其增大,前者称为该溶剂的表面活性物质(surfactant),后者称为表面非活性物质。水的表面活性物质常见的有胆盐、蛋黄素、有机酸、酚醛、肥皂等。水的表面非活性物质有食盐、糖类、淀粉等。

表面活性物质溶入溶剂后,由于溶剂分子之间的吸引力大于溶剂分子与溶质分子之间的吸引力,所以位于表面层中的溶剂分子受到使它趋向溶液内部的力大于表面层中溶质分



子对它的吸引力,结果使溶剂分子尽可能地进入溶液的內部,表面层中的溶质的浓度增大,只是由于扩散现象,浓度的增大才有一定的限度。这样就减少了溶液的表面能,增加了系统的稳定性。由于表面活性物质在溶液中聚集于表面层,所以少量的表面活性物质就可以很大程度上影响液体的表面性质,显著降低表面张力。在某些情况下,表面层可以完全由溶质组成,我们把表面活性物质在溶液的表面层聚集并伸展成薄膜的现象称为表面吸附(surface adsorption)。水面上的油膜就是常见的表面吸附现象。如果溶剂中加入表面非活性物质,为了减少表面能,表面非活性物质将尽可能离开表面层进入液体内部,结果就使表面非活性物质在液体内部的浓度大于表面层。

表面活性物质在呼吸过程中起着重要作用。肺位于胸腔内,支气管在肺内分成很多小支气管,小支气管越分越细,末端膨胀成囊状气室,每室又分成许多小气囊,称为肺泡。人的肺泡总数约为3亿个,各个肺泡的大小不一,而且有些肺泡是相连的。在充满空气的肺中,既有肺组织的弹性力,又有肺泡表面液层组成的气-液界面上的表面张力。对于肺充气来说,大部分压力是用来克服表面张力的。若各肺泡的表面张力系数相同,小肺泡内的压强将大于大肺泡内的压强,小肺泡内的气体将流向大肺泡,使小肺泡趋于萎缩,而大肺泡膨胀,但是这种情况在肺内并没有出现,原因就是表面活性物质在起作用,肺泡的表面液层中分布着一定量的、由饱和卵磷脂和脂蛋白组成的表面活性物质,呼气时,肺泡表面积减小,单位面积上的表面活性物质增多,表面张力系数减小,吸气时,肺泡表面积增大,单位面积上表面活性物质随之减少,表面张力系数增大,即 α 与表面积成正变关系。从表达式 $\Delta p = \frac{2\alpha}{R}$ 看,液体表面的附加压强与曲面半径 R 成反比关系。因此,综合考虑 α 和 R 对附加压强的影响,肺泡表面的附加压强是随半径 R 的增加而增加、 R 的减少而减少。这样,小肺泡半径小,附加压强小;大肺泡半径大,附加压强大。当外部环境一致时,小肺泡与大肺泡连通时,小肺泡内压强并不比大肺泡大,气体不会从小肺泡流向大肺泡,即不会出现小肺泡萎缩的现象。人体的呼吸系统,正是把表面张力与表面活性物质有机结合起来,才实现了正常呼吸过程。如果肺泡壁的表面活性物质缺乏,肺的功能将发生障碍,很多肺泡因内压大小不等而无法稳定,易于发生肺不张。实验表明,正常呼气后,肺泡内通常还有余气,这使接下来的吸气变得容易一些。而对于刚刚分娩的新生儿,附加压强使肺泡完全闭合,虽然临产前肺泡壁分泌表面活性物质以降低黏液的表面张力,但新生儿仍须以大声啼哭的强烈动作进行第一次呼吸以克服肺泡的表面张力而获新生。

思考题与习题七

7-1 对一定质量的气体来说,当温度不变时,气体的压强随体积减小而增大;当体积不变时,压强随温度升高而增大。从宏观来看,这两种变化同样使压强增大,从微观看,它们是否有区别?

7-2 两种不同种类的气体的平均平动动能相同,但气体的密度不同,问它们的温度是否相同?压强是否相同?

7-3 最概然速率的物理意义是什么?方均根速率、最概然速率和平均速率,它们各有何用处?

7-4 在下述几种情况里,毛细管中的水面高度会有什么变化?

- (1) 使水温升高。
- (2) 加入肥皂水。
- (3) 减小毛细管的直径。



(4) 降低毛细管伸出水面的高度。

7-5 容器内有一定量的气体,若保持容积不变而使温度升高,则分子的平均碰撞频率和平均自由程将如何变化?

7-6 试区分并说明下列各量的物理意义。

(1) $\frac{1}{2}kT$; (2) $\frac{3}{2}kT$; (3) $\frac{i}{2}kT$; (4) $\frac{i}{2}RT$ 。

7-7 速率分布函数的物理意义是什么? 试说明下列各式的物理意义:

(1) $f(v)dv$; (2) $Nf(v)dv$; (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$; (4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

7-8 容积为 2500cm^3 的烧瓶内有 1.0×10^{15} 个氧分子,有 4.0×10^{15} 个氮分子和 $3.3 \times 10^{-7}\text{g}$ 的氩气。设混合气体的温度为 150°C ,求混合气体的压强。

($23.3 \times 10^{-3}\text{Pa}$)

7-9 一真空管的真空度约为 $1.38 \times 10^{-3}\text{Pa}$ (即 $1.0 \times 10^{-5}\text{mmHg}$),试求在 27°C 时单位体积中的分子数及分子的平均自由程(设分子的有效直径 $d=3 \times 10^{-10}\text{m}$)。

($3.33 \times 10^{17}\text{m}^{-3}$; 7.5m)

7-10 吹一个直径为 10cm 的肥皂泡,设肥皂液的表面张力系数 $\alpha=40 \times 10^{-3}\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。试求吹此肥皂泡所做的功,以及泡内外的压强差。

($8\pi \times 10^{-4}\text{J}$; 3.2Pa)

7-11 一 U 形玻璃管的两竖直管的直径分别为 1mm 和 3mm 。试求两管内水面的高度差。(水的表面张力系数 $\alpha=73 \times 10^{-3}\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)。

(2cm)

7-12 在内半径 $r=0.30\text{mm}$ 的毛细管中注入水,在管的下端形成一半径为 $R=3.0\text{mm}$ 的水滴,求管中水柱的高度。

(5.5cm)

(刘新纯)

第八章 热力学基础

学习要求:

1. 掌握热力学第一定律,并熟练应用于理想气体各等值过程及循环过程。
2. 掌握热力学第二定律,理解宏观过程的不可逆性和热力学概率之间的关系。
3. 了解熵的概念、熵增加原理与能量退降,理解生命过程中的自组织现象。

热力学(thermodynamics)是从能量的观点研究与热运动有关的各种自然现象的宏观规律的理论。热力学第一定律是关于热力学过程中的能量转换和守恒定律,第二定律则指明了热力学过程进行的方向和条件,它们都来源于对大量实验事实的总结。热力学的研究方法是宏观的方法,不涉及物质的微观结构和过程,仅从少数宏观参量的变化来推断和解释实验结果,因此它对复杂系统(如生命系统)的分析特别适用。

第一节 热力学的一些基本概念

一、热力学系统

在热力学中,把要研究的对象叫做热力学系统(thermodynamic system),简称系统。系统以外能够影响系统的所有物体叫做系统的外界或环境(surroundings)。与环境之间既没有能量交换又没有物质交换的系统叫做孤立系统(isolated system),严格说来,自然界中并不存在这样的系统,因为任何一个系统都会或多或少地受到外界的影响,所以孤立系统是一个理想的系统;与外界有能量交换但没有物质交换的系统叫做封闭系统(closed system);与外界既有能量交换又有物质交换的系统叫做开放系统(open system),生物体即属于开放系统,它不断地和环境交换着物质和能量。

二、准静态过程

对于一个确定的热力学系统,当其处于平衡态时,可以用一组态参量来表示。任何由态参量所完全确定的函数称为系统的态函数。理想气体的态参量 p 、 V 、 T 之间服从方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$, 它就是一个态函数。态函数的一个重要性质是当系统从一个态转变到另一个态时,其值的变化只决定于这一转变的始态和终态,而与所经历的路径无关。对于一定量的处于平衡态的理想气体来说,态参量 p 、 V 、 T 中只有两个是独立的,给定其中的任意两个参量,第三个参量也就确定了,所以,给定任意两个参量的数值,就对应一个平衡态。如果以 p 为纵坐标, V 为横坐标,如图 8-1,则在 p - V 图上任何一点 $A(p_1, V_1)$ 就对应一个平衡态。非平衡态因为无均匀确定的参量,所以不能用图形表示。一个孤立系统,不论其初态如何,经过一定的时间以后,必将达到热力学平衡态,即系统的温度、压强等都达到均匀一致。

系统在某一时刻的态决定于初始条件和系统所处的环境条件。当系统和外界发生相互作用时,系统的状态就会

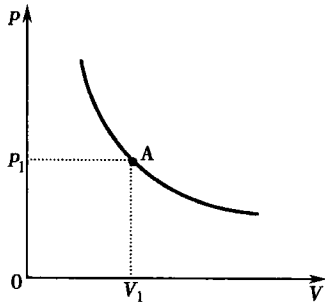


图 8-1 理想气体的 p - V 曲线



发生变化。热力学系统的态随时间的变化称为热力学过程(thermodynamic process),简称过程。如果过程所经历的所有中间状态,都无限接近于平衡态,这个过程就称为准静态过程(quasi-static process)。图 8-1 中的曲线就代表一准静态过程。准静态过程是一种理想过程,实际上是不可能做到的。但如果使过程进行得非常缓慢,进行的速率趋近于零时,这个过程就趋于准静态过程。所以理想的准静态过程可以认为是实际过程的近似代表。本章讨论的过程,除非特别注明,一般都是指准静态过程。

第二节 热力学第一定律

一、功 热量 内能

做功和传热都可以使热力学系统的状态发生变化。例如,一杯水,可以通过加热的方法,使其从某一温度升高到另一温度;也可以用搅拌做功的方法,使这杯水升高到同一温度。前者,是通过传热来完成的,后者是通过外界做功来完成的。两者方式虽然不同,但是导致的状态变化相同,这说明机械运动和热运动之间可以互相转化。传热过程中所传递的能量多少叫热量(heat)。和功一样,热量也是能量转化的一种形式,一定量的功相当于一定量的热量。

无数事实证明,对于热力学系统,不论所经历的热力学过程有何不同,只要系统的初、终状态确定不变,则外界对系统所做的功和向系统所传递的热量的总和是恒定不变的。在力学中,重力做功与路径无关,由此我们引进了重力势能的概念。与此类似,对于热力学系统也存在着一个仅由状态决定的态函数,叫做系统的内能(internal energy)。从分子运动论的观点来说,系统的内能就是系统中所有的分子热运动的能量和分子与分子间相互作用的势能的总和,它包括分子无规则热运动的动能、分子间的相互作用势能、化学能、原子能、核能等,但不包括系统整体运动的动能和系统与外场相互作用的势能。当然在系统所经历的热力学过程中,并非所有这些能量都变化,比如原子核内的能量在一些过程中并不改变。

“做功”和“传热”虽有其等效的一面,但在本质上是不相同的。“做功”(指机械功)是通过物体作宏观位移来完成的,它的作用之一是将物体的有规则运动转化为系统内部的无规则运动,即机械能转化为内能。“传热”是通过分子之间的相互作用来完成的,它的作用是系统外物体分子无规则运动与系统内分子无规则运动之间的转换,从而改变系统的内能。功、热量和内能是三个不同的物理量,它们之间有严格的区分,但又有着密切的联系。

二、热力学第一定律

一般情况下,系统状态变化时,做功和传热同时存在。假设一个系统由于与外界交换能量,使它由状态 I (初态)变为状态 II (终态),内能由 U_1 变为 U_2 ,在这个过程中系统吸收热量 Q ,同时对外做功 A ,那么根据能量转化和守恒定律,功、热量和内能之间应满足:

$$Q = U_2 - U_1 + A \quad (8-1)$$

上式就是热力学第一定律(first law of thermodynamics)的数学表示(式中各量的单位都用焦耳)。它说明:在任何过程中,系统从外界吸收的热量(Q),一部分用于使系统的内能增加($\Delta U = U_2 - U_1$),一部分用于系统对外做功(A)。为使式(8-1)适合于一切过程,式中各量符号规定为:系统的内能增加时 ΔU 为正,反之为负;系统对外界做功时 A 为正,外界对系统做功时 A 为负;系统从外界吸取热量时 Q 为正,系统向外界放热时 Q 为负。热力学第一定律应用于孤立系统时,系统和环境既没有热量交换($Q=0$),又不对外做功($A=0$),由式(8-1)得 $\Delta U=0$ 。这就是说,孤立系统内部各物体的能量可以互相传递,各种形式的能量也可以互



相转化,但它们的总和不变。

对于状态的微小变化过程,即初、终两态相差无限小,这时热力学第一定律可写作

$$dQ = dU + dA \quad (8-2)$$

热力学第一定律是能量守恒与转化定律在热现象领域内所具有的特殊形式,19世纪中叶,在长期生产实践和大量科学实验的基础上,它才以科学定律的形式被确立起来。如果将系统的内能扩展为一切能量,则热力学第一定律就是能量守恒和转化定律。能量守恒定律是一切自然现象所必须遵从的基本定律。历史上,曾经有人幻想制造一种不需要任何动力或燃料而可以不断地对外做功的机器,这种机器称为第一类永动机。热力学第一定律指出,做功必须由能量转化而来,不能无中生有地创造能量,第一类永动机违背热力学第一定律,是不可能做成的。因此,热力学第一定律也可叙述为:第一类永动机是不可能造成的。

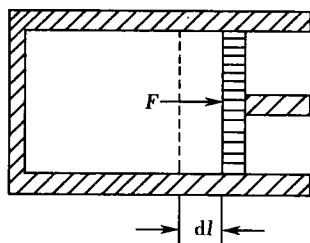


图 8-2 气体推动活塞做功

下面我们讨论热力学过程中功的表示。设图 8-2 的圆柱形筒内盛有气体。筒内活塞的面积为 S ,且可以无摩擦地左右移动。若筒内气体的压强为 p ,它作用在活塞上的力 $F = p \cdot S$ 。当活塞移动一微小距离 dl 时,则气体膨胀推动活塞所做的功 dA 为

$$dA = F \cdot dl = p \cdot S \cdot dl$$

由于气体的体积增加了 $S \cdot dl$,即 $dV = S \cdot dl$,所以上式可写为

$$dA = p \cdot dV \quad (8-3)$$

式(8-3)表示系统在无限小的准静态过程中所做的功。在气体膨胀时, $dV > 0$, $dA > 0$,表示系统对外做功;气体被压缩时, $dV < 0$, $dA < 0$,表示外界对系统做功。

在一个有限的准静态过程中,系统的体积由 V_1 变到 V_2 时,系统对外所做的总功为

$$A = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (8-4)$$

图 8-3 曲线下阴影部分的面积就是 $p dV = dA$ 。必须指出,只给定初态和终态,并不能确定功的数值。由图可知,如果系统沿着图中虚线所示的过程进行,那么气体所做的功就等于虚线下面的面积,它比实线下面的面积大些,这表明做功不仅决定于系统的初、终态,而且与系统所经历的过程有关,所以功不是态函数。由式(8-1)可以得出热量也不是态函数。

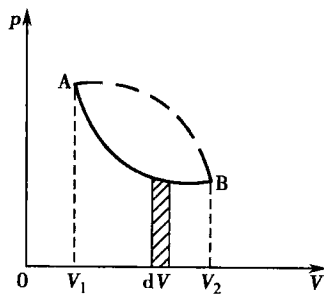


图 8-3 准静态过程的功

第三节 典型等值过程中的能量交换

一、等体过程

等体过程(isochoric process)的特点是系统的体积始终保持不变,即 $dV = 0$, $A = 0$ 。因此,热力学第一定律可写成

$$Q = \Delta U \quad (8-5)$$

即系统从外界吸收的热量全部用来增加系统的内能。如果系统在等体过程中放热,则放出的热量等于系统内能的减少。



1 摩尔的气体在等体过程中温度升高 1K 时所吸收的热量称为等体摩尔热容,记作 C_v 。质量为 M ,摩尔质量为 μ 的气体,在等体过程中,温度升高 dT ,吸收的热量为

$$dQ = dU = \frac{M}{\mu} C_v dT = n C_v dT \quad (8-6)$$

二、等压过程

等压过程(isobaric process)的特点是系统的压强始终保持不变,即 $dp=0$ 。在等压过程中,系统对外所做的功为

$$\int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

热力学第一定律可写成

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + p(V_2 - V_1) = U_2 - U_1 + pV_2 - pV_1 \\ &= (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1) \end{aligned} \quad (8-7)$$

$$\text{或} \quad Q = H_2 - H_1 = \Delta H \quad (8-8)$$

式中 $H = U + pV$ 是一个态函数,称为焓(enthalpy)。

式(8-7)和式(8-8)表明,在等压过程中,系统吸收的热量一部分用于增加内能,另一部分用来对外做功;或者说,系统吸收的热量全部用来增加气体的焓。由此可知,气体焓总是大于它的内能。

1 摩尔的气体在等压过程中温度升高 1K 时所吸收的热量称为等压摩尔热容,记作 C_p 。质量为 M ,摩尔质量为 μ 的气体,在等压过程中温度升高 dT ,吸收的热量为

$$dQ = \frac{M}{\mu} C_p dT = n C_p dT \quad (8-9)$$

由式(8-8)可得

$$dQ = dH = n C_p dT \quad (8-10)$$

对于理想气体,由于 $pV = nRT$,则

$$\begin{aligned} H &= U + pV = n C_v T + nRT = n(C_v + R)T \\ \Delta H &= n(C_v + R)\Delta T \end{aligned} \quad (8-11)$$

由式(8-10)得

$$\Delta H = n C_p \Delta T$$

故

$$C_p = C_v + R \quad (8-12)$$

上式称为迈耶公式,它表明,理想气体的等压摩尔热容等于等体摩尔热容与普适气体常量 R 之和。这是由于在等压条件下,当温度升高 1K 时,1 摩尔的气体除增加内能外,还将多消耗约 8.31J 的热量转变为因膨胀而对外所做的功。

气体的等体摩尔热容 C_v 、等压摩尔热容 C_p 与气体分子的自由度 i 有关。令 C_p 与 C_v 的比值为 γ ,表 8-1 给出了几种气体的热容及 γ 值。

表 8-1 几种气体的热容及 γ 值

气体	自由度	$C_v(\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	$C_p(\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	$\gamma = C_p/C_v$
单原子分子	3	$\frac{3}{2}R \approx 12.5$	$\frac{5}{2}R \approx 20.8$	$\frac{5}{3} = 1.67$
刚性双原子分子	5	$\frac{5}{2}R \approx 20.8$	$\frac{7}{2}R \approx 29.1$	$\frac{7}{5} = 1.4$
刚性多原子分子	6	$3R \approx 24.9$	$4R \approx 33.3$	$\frac{4}{3} = 1.33$



三、等温过程

等温过程(isothermal process)的特点是系统的温度始终保持不变,即 $dT=0, dU=0$, 因此,热力学第一定律可写成

$$Q=A \quad (8-13)$$

这就是说,理想气体在等温膨胀时,从外界吸收的热量全部转化为对外所做的功;在等温压缩时,外界对系统所做的功,全部转化为向外传递的热量。

设理想气体自态 I (p_1, V_1) 变到态 II (p_2, V_2), 则系统对外所做的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{M}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (8-14)$$

式中 T 为等温过程中系统的温度。当 $V_2 > V_1$, 即等温膨胀时, $A > 0$, 系统对外做正功; 反之, 当 $V_2 < V_1$, 即等温压缩时, $A < 0$, 外界对系统做正功。功的数值就等于 p - V 图中曲线下的面积(图 8-4)。

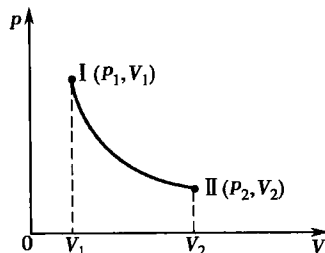


图 8-4 等温膨胀的功

因为 $p_1 V_1 = p_2 V_2$, 式(8-14)可以写为

$$A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (8-15)$$

四、绝热过程

绝热过程(adiabatic process)的特点是系统与外界没有热量交换,即 $Q=0$ 。因此,热力学第一定律可以写为

$$\Delta U = -A \quad (8-16)$$

如果气体膨胀对外做功, $A > 0$, 则 $\Delta U < 0$, 气体内能减少, 温度下降。所以在绝热过程中, 气体对外做功是靠减少系统的内能来完成的。如果外界对系统做正功, $\Delta U > 0$, 气体内能增加, 温度上升。

由于气体内能的改变与过程无关, 只与温度的改变有关, 且

$$\Delta U = \frac{M}{\mu} C_v \Delta T = n C_v \Delta T$$

代入式(8-16)得

$$-A = n C_v \Delta T$$

或

$$-p dV = n C_v dT \quad (8-17)$$

设气体由态 I (p_1, V_1, T_1) 绝热地变化到态 II (p_2, V_2, T_2), 则由式(8-17)可得气体对外所做的功为

$$A = -n C_v (T_2 - T_1) = n C_v T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (8-18)$$

下面我们讨论在准静态绝热过程中态参量之间的关系。

对理想气体状态方程 $pV = nRT$ 两边取微分得

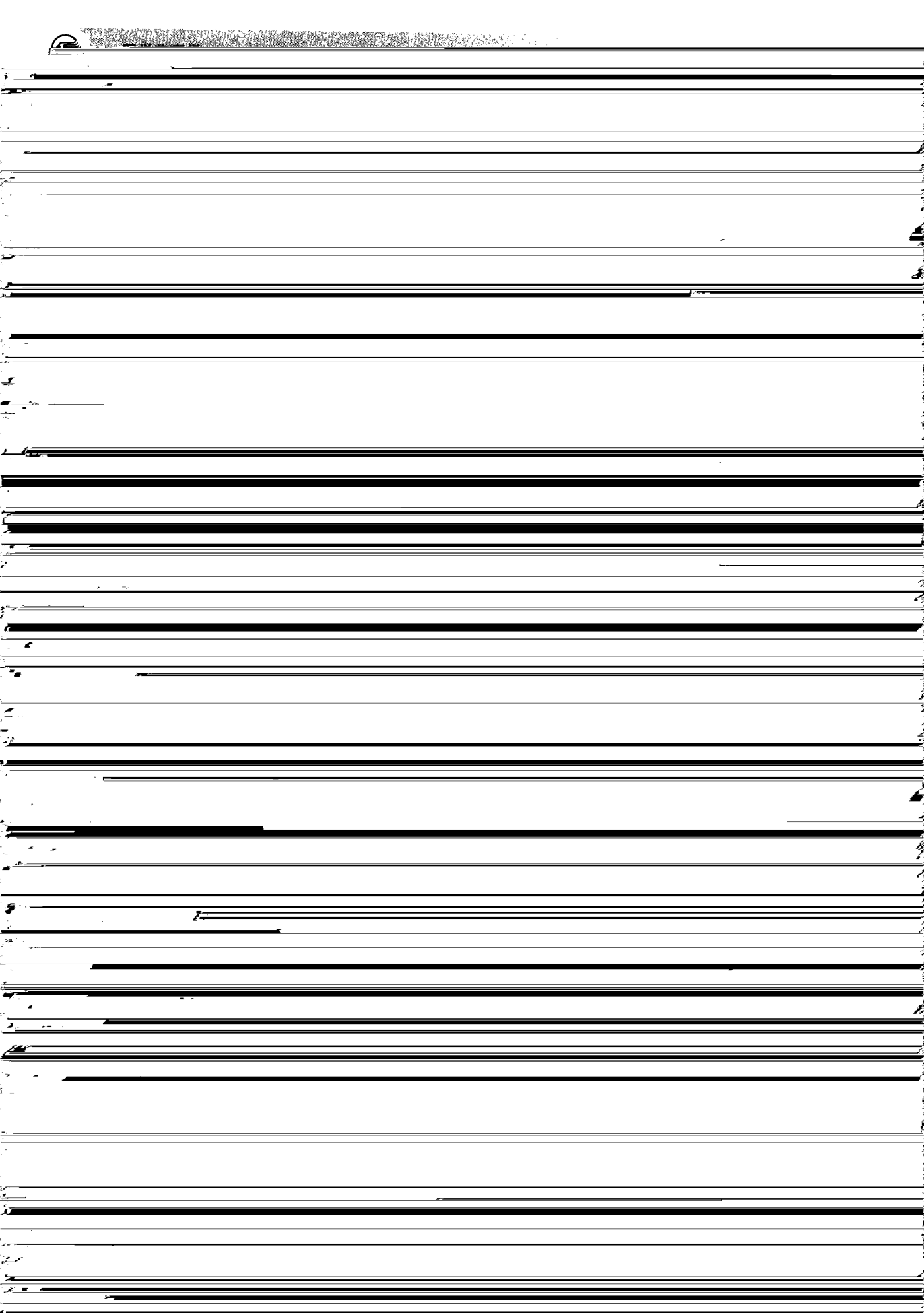
$$p dV + V dp = nR dT \quad (8-19)$$

由式(8-17)和式(8-19)消去 dT 得

$$(C_v + R) p dV = -C_v V dp$$

因 $C_v + R = C_p$, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, 上式可变为

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$





完全氧化 1mol(180 克)的葡萄糖需要 134.4L 的氧,产生 $2.87 \times 10^6 \text{J}$ 的热量,即每升氧产生的热量为 $2.14 \times 10^4 \text{J}$,每克葡萄糖产生的热量为 $1.59 \times 10^4 \text{J}$ 。表 8-2 是一些食物的典型能量数据。

表 8-2 一些食物的能量值

食物	平均能量($\text{J} \cdot \text{g}^{-1}$)	每消耗 1 升 O_2 释放的能量($\text{J} \cdot \text{L}^{-1}$)
糖	1.72×10^4	2.11×10^4
蛋白质	1.72×10^4	1.87×10^4
乙醇	2.97×10^4	2.03×10^4
脂肪	3.89×10^4	1.98×10^4
平均		2.00×10^4

根据热力学第一定律,代谢率 $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ 要受输出功率 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 的影响。人类从事不同的活动时的代谢率(耗氧率)见表 8-3。

表 8-3 各种活动的代谢率及耗氧率(以体重 65kg 计算)

活动水平	代谢率($\text{J} \cdot \text{h}^{-1}$)	耗氧率($\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$)
睡眠	$\sim 2.93 \times 10^5$	0.23
轻微活动(听讲、慢步)	$\sim 8.37 \times 10^5$	0.65
中等活动(骑自行车 16km/h)	$\sim 1.67 \times 10^6$	1.30
重活动(踢足球)	$\sim 2.09 \times 10^6$	1.63
打篮球	$\sim 2.51 \times 10^6$	1.95
自行车赛(43km/h)	$\sim 5.86 \times 10^6$	4.55

由表 8-3 可见,人即使不做任何劳动,代谢率仍达到 $2.93 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{h}^{-1}$,这个代谢率称为基础代谢率(basal metabolic rate, BMR)。测量病人的基础代谢率对某些疾病的诊断有重要意义。例如甲状腺功能异常时,基础代谢率可以发生 20%~70% 的变化。

第四节 循环过程 卡诺循环

一、循环过程和热机效率

热机(heat engine)是利用热来做功的机器,例如蒸汽机、内燃机、汽轮机等都是热机。热机中被用来吸收热量并对外做功的物质叫做工作物质。各种热机都是重复地进行着某些过程而不断地吸热做功的。为了研究热机的工作过程,引入循环过程的概念。如图 8-6 中,工作物质从 A 态出发,经历 ACB 过程达到 B 态,又从 B 态经历 BCA 过程回到 A 态,这样的过程称为循环过程(cycle process)。在 p - V 图上,循环过程表现为一封闭曲线。图 8-6 中,循环沿顺时针方向进行,是一正循环,热机中所进行的过程就是类似这样的过程,其中曲线 ACB 表示吸热过程,曲线下的面积为工作物质在膨胀过程中对外界所做的正功;曲线 BDA 表示放热过程,曲线下的面积为工作物质在压缩过程中对外所做的负功。闭合曲线所包围的面积就是工作物质在一次循环中所做的净功。

一切热机的共同特点是连续地进行循环过程,并不断地对外做功。工作物质从中吸收热量的物体称为高温热

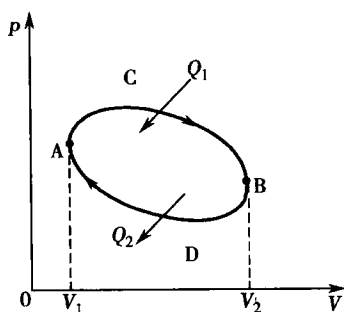


图 8-6 热机的循环过程



源,如蒸汽机中的锅炉;工作物质对之放出热量的物体称为低温热源,如冷凝器。热机在每一循环中:①从外界吸取热量 Q_1 ;②对外做净功 A ;③向外界放出热 Q_2 量(只表示数值,下同)。经过一个循环以后,工作物质回到了原来的态,内能没有改变,根据热力学第一定律

$$A = Q_1 - Q_2 \quad (8-23)$$

可见热机在每一循环中,由高温热源吸入的热量 Q_1 只有一部分转变为功 A ,另一部分 Q_2 要传递给低温热源,这说明热转变为功是不完全的。我们把热机对外所做的净功 A 与它所吸收的热量 Q_1 的比值称为热机的效率,即

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (8-24)$$

实际上 Q_2 不能为零,所以热机的效率永远小于 1。

如果循环沿反时针方向进行,如图 8-7 所示,则为逆循环(inverse cycle)。此时,外界对工作物质做净功 A ,同时从低温热源吸入热量 Q_2 ,向高温热源放出热量 Q_1 。根据热力学第一定律有

$$Q_2 + A = Q_1 \quad (8-25)$$

所以经过多次循环后,低温热源的温度愈来愈低,这就是制冷机的原理。制冷机的效能用制冷系数 ϵ 表示,它定义为

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (8-26)$$

【例 8-1】图 8-8 表示某理想气体循环过程的 T - V 图,CA 为绝热过程,A 点的态参量 (T, V_1) 和 B 点的态参量 (T, V_2) 为已知。求 C 点的温度和这个循环的效率。

解:因为 C 点在等体线上又在绝热线上,故有

$$TV_1^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1}$$

故

$$T_c = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T$$

在一个循环过程中吸收的热量为

$$Q_1 = Q_{AB} = \frac{M}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

气体给外界的热量为:

$$\begin{aligned} Q_2 &= -Q_{BC} = \frac{M}{\mu} C_v (T - T_c) = \frac{M}{\mu} C_v \left[T - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T \right] \\ &= \frac{M}{\mu} C_v T \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned}$$

效率为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{M}{\mu} C_v T \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right]}{\frac{M}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}} \\ &= 1 - \frac{C_v \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right]}{(C_p - C_v) \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1}} \end{aligned}$$

二、卡诺循环及其效率

19 世纪初开始广泛使用的蒸汽机效率很低,只有 3%~5%。为了提高热机的效率,

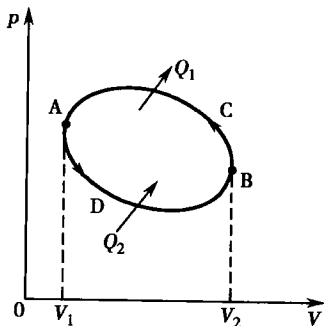


图 8-7 逆循环过程

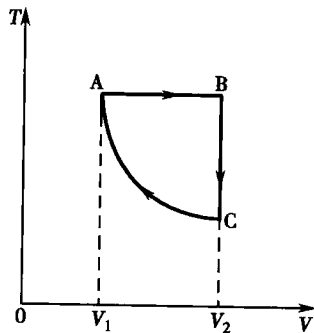


图 8-8 气体循环过程



1824 年法国青年工程师卡诺提出了一种理想热机:热机的工作物质为理想气体,它只与一个高温热源和一个低温热源交换热量,热源和冷源的温度在热机工作过程中不发生变化,并经历准静态的循环过程。这种热机称为卡诺热机,它的循环过程称为卡诺循环(Carnot cycle),见图 8-9。因为是准静态过程,所以在工作物质与高温热源 T_1 接触的过程中,基本上没有温度差,工作物质与高温热源接触而吸热的过程 AB 是一个温度为 T_1 的等温膨胀过程。同样,工作物质和低温热源 T_2 接触而放热的过程 CD 是一个等温压缩过程。因为工作物质只与两个热源交换能量,所以当工作物质脱离两热源时所进行的过程 BC 和 DA,必然是绝热的准静态过程。总之,卡诺循环是由两个等温过程和两个绝热过程组成的。

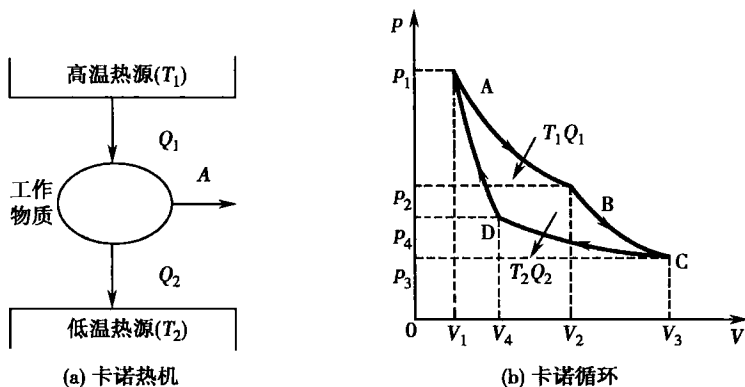


图 8-9 卡诺热机与卡诺循环

下面计算卡诺热机的效率。热机在每一循环过程中只从热源吸热一次,向冷源放热一次。在整个循环过程中,气体的内能不变。但气体与外界通过传递热量而对外做功。设热源温度为 T_1 ,冷源温度为 T_2 。工作物质在一个循环过程中的状态如图 8-9(b)所示, A、B、C、D 四点的体积分别为 V_1 、 V_2 、 V_3 和 V_4 。工作物质为 n mol,按照式(8-14),两个等温过程吸入和放出的热量分别为

$$\begin{aligned} Q_1 &= nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ Q_2 &= nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \\ \frac{Q_2}{Q_1} &= \frac{T_2 \ln(V_3/V_4)}{T_1 \ln(V_2/V_1)} \end{aligned} \quad (8-27)$$

按照式(8-21),得

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

故

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (8-28)$$

将式(8-28)代入(8-27)得

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (8-29)$$

故卡诺热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (8-30)$$

卡诺循环指出,高温热源的温度愈高,低温热源的温度愈低,热机的效率愈大。那么热机的效率能不能达到 100%呢? 如果不能,最大的可能效率又是多少呢? 有关这些问题的研究促成了热力学第二定律的建立。



第五节 热力学第二定律

一、热力学第二定律

第一类永动机被热力学第一定律否定后,历史上不少人曾试图制造另一种热机,它不断地完成循环动作,在每一个循环中吸入的热量全部用来做功,即效率为 100% 的热机,这种机器称为第二类永动机。制造第二类永动机并不违反热力学第一定律,但所有的努力都失败了。大量的事实说明,热机都不可能只有一个热源,热机要不断地把吸取的热量变为有用的功,就不可避免地要将一部分热量传给低温热源。人们由此总结出第二类永动机不可能制成的自然规律,称为热力学第二定律(second law of thermodynamics),它叙述为:自然界没有这样一种循环过程,它进行的结果是从单一热源吸取热量,将其全部转化为功,并且在外界不遗留任何其他变化。这一叙述是由开尔文首先提出来的,通常称为热力学第二定律的开尔文说法。应当说明,物体是能够把它吸入的热量全部转化为功的,只是这时或者没有完成循环过程,或者是留下其他变化。例如理想气体在等温膨胀时吸入的热量全部转化为功,但它在膨胀后体积增大了,没有回复到原始状态。

克劳修斯在观察自然现象时发现,热量的传递也有一种特殊的规律,即热量不可能自发地从低温物体传到高温物体。这一规律通常被称为热力学第二定律的克劳修斯说法。

初看起来热力学第二定律的这两种说法并无关系。开氏说的是热量转变为功的问题;而克氏说的是热量传递的问题。但其实它们是等效的。下面我们用反证法加以证明。

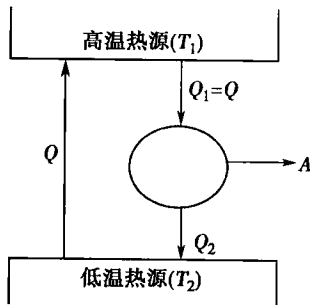


图 8-10 热力学第二定律两种说法的等效性

假设克氏的说法不成立,即热量 Q 能从低温热源 T_2 ,自动地传给高温热源 T_1 ,而且不产生其他影响,如图 8-10 所示。在两热源间安装一热机,它从高温热源吸取热量 $Q_1 = Q$,一部分用来对外做功 A ,另一部分热量 Q_2 传给低温热源 T_2 形成一个循环。在这一循环过程中,总的效果是从单一低温热源吸取热量 $Q - Q_2$,全部用来对外做功 A ,而高温热源不发生变化,这显然也就违反了开氏的说法。

热力学第二定律是在总结了大量事实的基础上提出来的,它是独立于热力学第一定律的新规律。热力学第一定律指明能量守恒与转换的数量关系,热力学第二定律则说明并非所有能量守恒的过程都能进行,热现象的自然过程都具有一定的方向性。

二、可逆过程和不可逆过程

为了解决热力学过程的方向性问题,我们引入可逆过程的概念。若系统经过一定过程,从某一状态到达另一状态,又可以经过和原来完全一样的那些中间状态重新回到原来的状态,而不引起外界任何变化,则这种过程称为可逆过程(reversible process),否则就是一个不可逆过程(irreversible process)。热力学第二定律的两种说法就是分别挑选了一种典型的不可逆过程(热功转换和热传导的不可逆性)。实际上,一切自发过程都是不可逆的。例如通过摩擦,功转化为热量,根据热力学第二定律,热量不能再通过循环过程全部转化为功,因此,功通过摩擦转化为热量的过程是不可逆过程;各部分浓度不同的溶液自动扩散,最后达到均匀,而浓度已均匀的溶液,不会自动地变成不均匀等等。这些自然界的自发过程有一定



的方向,都是不可逆过程,要想使过程逆向进行,回到原来的状态,必须借助于外来因素,引起外界的变化。

那么,是否有可逆过程存在?假如单摆不受空气阻力和其他摩擦力的作用,则它的摆动可视是为可逆的。又如无摩擦或其他耗散效应的准静态过程,其中的每一步都达到了平衡,如果我们控制条件,使它按照与原过程相反的顺序进行,经过原来的所有中间状态,并消除所有的外界影响,则可使无摩擦的准静态过程成为可逆过程,但实际上这样的条件是很难实现的,严格地说可逆过程只是一种理想的过程,我们只能实现和可逆过程非常接近的过程。因此,利用可逆过程的概念得到的结论,是一种极限的情形。虽然准静态过程和可逆过程在实际生活中是不存在的,但是这些概念有助于我们从理论上分析问题,从而得出解决实际问题的普遍原理。

三、热力学第二定律的统计意义

热现象是与大量分子无规则的热运动相联系的,为了进一步认识热力学第二定律的本质,我们来分析气体的自由膨胀。如图 8-11 所示,用隔板将容器分成容积相等的 A、B 两室,使 A 室充满气体,B 室保持真空。我们来观察气体分子运动的分布情况。如果仅考虑四个分子 a、b、c、d,把隔板抽掉后,它们将在整个容器内运动,分子在容器中的分布见表 8-4,共有 16 种微观态,每个微观态出现的概率是一样的。从分子浓度分布的宏观表现来看,16 种微观态分属 5 种宏观态,其中,四个分子全退回 A 室的宏观态概率最小,分子在 A、B 两室均匀分布的宏观态(即分子处于无序程度最大的状态)概率最大。表中 P 是任一宏观态对应的微观状态数,称为热力学概率(thermodynamic probability)。可以证明:如果容器中共有 N 个分子,若以分子处在 A 室或 B 室来分类,则共有 2^N 种可能的分布,而全部 N 个分子都退回到 A 室的宏观态的概率为 $\frac{1}{2^N}$ 。我们知道,宏观系统都包含了大量分子,例如,对 1 摩尔气体, $N=6.02 \times 10^{23}$,所以,当气体自由膨胀后,所有这些分子集中地全部都退回到 A 室的概率只有 $\frac{1}{2^{6.02 \times 10^{23}}}$ 。这个概率是如此的小,以至于实际上是不会出现的。

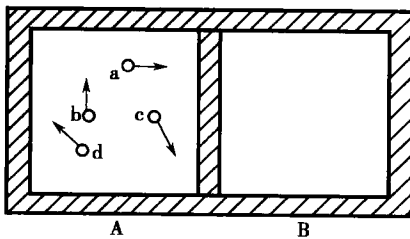


图 8-11 气体自由膨胀不可逆性的统计意义

所以气体自由膨胀的不可逆性,实质上是反映了这个系统内部发生的过程总是由热力学概率小的宏观状态向热力学概率大的宏观状态进行,而相反的过程在外界不发生任何影响的条件下是不可能实现的。因此,一孤立的热力学系统,其内部发生的过程,总是从高度有序的状态向比较无序的状态进行,由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行,这就是热力学第二定律的统计意义。

表 8-4 分子在容器内的分布

微观态	分子位置		宏观态	概率	热力学概率 P
	A 室	B 室			
1	abcd	—	A_4B_0	1/16	1
2	bcd	a	A_3B_1	4/16	4
3	acd	b			
4	abd	c			
5	abc	d			



续表

微观态	分子位置		宏观态	概率	热力学概率 P
	A 室	B 室			
6	ab	cd	A_2B_2	6/16	6
7	ac	bd			
8	ad	bc			
9	cb	ad			
10	bd	ac			
11	cd	ab			
12	a	bcd	A_1B_3	4/16	4
13	b	acd			
14	c	abd			
15	d	abc			
16	—	abcd	A_0B_4	1/16	1

四、卡诺定理

工作在可逆循环的热机称之为可逆热机,工作在不可逆循环的热机称之为不可逆热机。卡诺循环中每个过程都是准静态过程,卡诺循环是理想的可逆循环,卡诺热机是可逆热机。1824 年卡诺在研究热机效率的极限问题时提出了卡诺定理(Carnot theorem):

(1) 在相同的高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间工作的一切可逆热机,其效率都等于卡诺热机的效率,而与工作物质无关。

(2) 在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切不可逆热机,其效率都不可能大于可逆热机的效率。

由卡诺定理可知,在高低温热源 T_1 和 T_2 之间工作的一切可逆热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (8-31)$$

一切不可逆热机的效率为

$$\eta' < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (8-32)$$

开尔文根据卡诺定理建立了热力学温标,克劳修斯根据卡诺定理引入了熵的概念,建立了热力学第二定律的数学形式

第六节 熵

一、克劳修斯等式

对于卡诺热机,其效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

将上式乘以 Q_1 ,除以 T_2 得:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (8-33)$$

上式中 Q_1 表示吸收的热量, Q_2 表示放出的热量,且均取绝对值。如果采用热力学第一定律中对 Q 的符号规定,则上式改写为



$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (8-34)$$

式中 Q/T 称为热温比, 是卡诺循环中两个等温过程中系统所吸收或放出的热量与温度之比。考虑卡诺循环中的两个绝热过程, $Q=0$, 从而相应应有 $\frac{Q}{T}=0$, 因此可以把(8-34)理解为:

在卡诺热机中的工作物质从某个初态出发, 经历了一个循环又回到原来的状态后, 量 $\frac{Q}{T}$ 在整个卡诺循环的四个过程中之和为零。

把这个结论推广到一切可逆循环过程, 如图 8-12, 对任意可逆循环 ABCDA, 可看成是由许多小卡诺循环所组成, 这些小卡诺循环都是可逆的, 且都是正循环。从图中可以看出任意两个相邻的小卡诺循环的绝热线大部分都是共同的, 但进行的方向正好相反, 从而效果相互抵消。因此, 所有小卡诺循环的总效果就相当于图中锯齿形路径所表示的循环过程。根据式(8-34), 对于任意一个可逆小卡诺循环均有

$$\frac{Q_{11}}{T_{11}} + \frac{Q_{12}}{T_{12}} = 0$$

对所有小卡诺循环求和, 得

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta Q_{11}}{T_{11}} + \frac{\Delta Q_{12}}{T_{12}} \right)$$

如果每个小卡诺循环为无限小, 循环的数目 $n \rightarrow \infty$, 则锯齿形路径就无限趋近于原来的可逆循环过程, 这时有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0 \quad (8-35)$$

上式称为克劳修斯等式。它说明, 在任一可逆循环过程中, 热温比的总和等于零。

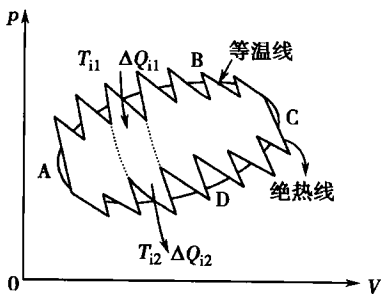


图 8-12 证明克劳修斯等式用图

二、熵的概念

图 8-13 是 p - V 图上的任一闭合曲线, A 和 B 是曲线上任选的两点, 代表两个平衡态, 闭合曲线被 A、B 分为两段, 一段从 A 经路径 I 到达 B, 另一段从 B 经路径 II 回到 A, 构成一个可逆循环过程。根据克劳修斯等式有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = 0$$

因是可逆过程, 上式可写为

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} - \int_A^B \frac{dQ}{T} = 0$$

或

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (8-36)$$

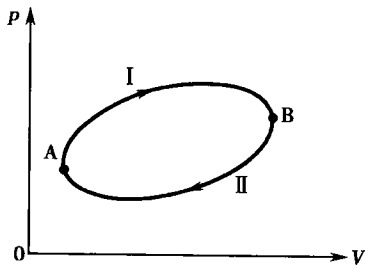


图 8-13 可逆循环过程

这说明积分 $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ 只取决于系统的初态和终态, 与所经历的路径无关。因而我们可以引入一个态函数, 当系统从 A 状态经过任一可逆过程变到 B 状态时, 该函数的增量用积分 $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ 来量度, 这个态函数称为熵(entropy), 用符号 S 表示, 单位为 J/K。这一定义最早由克劳修斯提出, 也被称为克劳修斯熵。热力学系统经历一个可逆过程自 A 状态变到 B 状态时, 熵



的增量为

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (8-37)$$

而对于无限小的可逆过程则有

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (8-38)$$

用积分 $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ 求系统的熵变时,要注意积分对应的必须是一个可逆过程。如果系统由初态实际上是经历一个不可逆过程到达终态,那么要设计一个连接同样初、终两态的可逆过程来求积分 $\int_A^B \frac{dQ}{T}$,计算出熵变。一个系统如果是由一些分系统组成,则总熵变等于各分系统熵变的和。

1877年玻耳兹曼用统计理论建立了熵与热力学概率 P 之间的关系

$$S = k \ln P \quad (8-39)$$

式中 k 是玻耳兹曼常量。这一定义被称之为玻耳兹曼熵。熵的单位与玻耳兹曼常量相同,都是 $J \cdot K^{-1}$ 。玻耳兹曼熵公式是物理学中最重要的公式之一。它说明,系统处于某一热平衡态的熵决定于它的热力学概率(所包含的微观态数), P 越大,即系统内微观粒子的无序程度越大、熵就越大。熵是微观粒子无序性的量度。平衡态对应的热力学概率极大,它的熵也取极大值。如一定量的同种物质,气态熵 $>$ 液态熵 $>$ 固态熵,其混乱度的关系也是如此。

三、熵增加原理与能量退降

对于不可逆循环,由卡诺定理可知,其效率为

$$\eta' = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

即

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

等号仅对可逆循环成立。采用热力学第一定律中对 Q 的符号规定,则上式改写为

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \quad (8-40)$$

上式表明,不可逆循环的热温比的和不大于零。

对于一般的循环过程,式(8-40)可进一步推广为

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (8-41)$$

上式称为克劳修斯等式不等式。对于可逆循环,上式取等号;对于不可逆循环,上式取不等号。

现在考虑一个任意的不可逆过程,如图 8-14 中的过程 I,假设有一个任意可逆过程正好能使物体由终态 B 回到初态 A,如图 8-14 中的过程 II,则 I、II 构成不可逆循环,根据(8-41)式有:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \underbrace{\int_A^B \frac{dQ}{T}}_I + \underbrace{\int_B^A \frac{dQ}{T}}_{II} \leq 0$$

即

$$\underbrace{\int_A^B \frac{dQ}{T}}_I + S_A - S_B \leq 0$$

因此有

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (8-42)$$

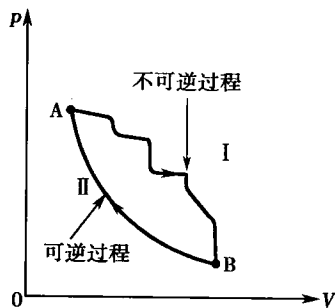


图 8-14 不可逆循环过程



对于微过程则有

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (8-43)$$

由上述可知,热力学系统的熵变在可逆过程中等于系统所吸收的热量与热源温度的比值;在不可逆过程中则大于这个比值。

把热力学第一定律和第二定律结合起来,即把式(8-2)和(8-43)结合起来,可得

$$TdS \geq dU + dW \quad (8-44)$$

上式是热力学的基本方程。

在式(8-43)中,如果热力学过程是绝热的,则 $dQ=0$,得

$$dS \geq 0 \quad (8-45)$$

即绝热过程中,系统的熵永不减少。对于可逆绝热过程,系统的熵不变;对于不可逆绝热过程,系统的熵总是增加的,这个结论称为熵增加原理(principle of entropy increase)。熵增加原理说明了热力学过程进行的方向:不可逆绝热过程总是向着熵增加的方向进行,可逆绝热过程则是沿着等熵路径进行。一个孤立系统中进行的任何过程都是绝热过程,其熵永不减少。

熵增加和不可逆过程的后果是能量的品质下降。我们来讨论有限温差热传导过程。设两物体 A、B 的温度分别为 T_A 和 T_B ,且 $T_A > T_B$ 。当它们刚接触后,发生一不可逆传热过程,使热量 $|dQ|$ 由 A 传向 B。这份能量 $|dQ|$ 原来在 A 内,借助温度为 T_0 的热源($T_A > T_B > T_0$),利用卡诺热机从 A 中吸出 $|dQ|$ 可以做功的最大值为

$$A_1 = |dQ| \eta_c = |dQ| \left(1 - \frac{T_0}{T_A}\right)$$

传热过程后, $|dQ|$ 到了 B 内,这时再利用它能做的功的最大值变成了

$$A_2 = |dQ| \left(1 - \frac{T_0}{T_B}\right)$$

前后相比,可转化为功的能量减少了,其数量为

$$E_d = A_1 - A_2 = |dQ| T_0 \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right)$$

经过不可逆的传热过程, A、B 构成的系统的熵的增量为

$$dS = |dQ| \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right)$$

比较上面两式得

$$E_d = T_0 dS \quad (8-46)$$

由此可见,在能量的利用上,不可逆过程的后果总是使一定的能量 E_d 从能做功的形式变为不能做功的形式,能量的品质下降了,而且 E_d 的大小和不可逆过程引起的熵的增加成正比,这种现象称之为能量退降(degradation of energy)。一切不可逆过程虽然不能“消灭”能量,但总要或多或少地使一部分能量变成不能做功的形式。

孤立系统中熵的增加伴随着系统无序程度的增加,但自然界也存在许多从无序到有序的现象。各种生物都是由细胞按精确规律组成的高度有序结构。在生物生长过程中,不断地有细胞死亡,也不断地把相对混乱无序的原子、分子组成新的有序的蛋白质和细胞。生物进化过程中,生物都是经过漫长的年代由简单到复杂、由低级到高级、由较为有序向更加有序的方向发展。生命过程中的这种从无序到有序的现象,称为自组织现象(self-organization phenomenon)。生命过程实际上就是生物体持续进行的自组织过程。

生物体的这种自组织过程并不违反热力学第二定律。热力学系统中的自发过程都是从有序向无序方向转化的,但这是针对孤立系统来说的,而人体是一个与外界既有能量交换又有物质交换的开放系统,而且远离平衡状态。自组织过程是生命系统内不平衡的表现,而且



不会达到平衡。一旦达到平衡而有序状态消失时生命也就终止了。这种在远离平衡情况下系统出现的稳定有序的结构被称为耗散结构(dissipative structure)。从熵增加原理看,要保持生命过程的正常进行,或使系统向更加有序的方向发展,生命系统必须开放,以使系统的熵保持不变或减少。事实上,非孤立系统熵的变化可形式地分为两部分,一部分是由于系统内部的不可逆过程引起的,叫熵产生(entropy production),另一部分是由于系统和外界交换物质和能量引起的,叫熵流(entropy flow)。一个系统的熵产生永不可能是负的。孤立系统内进行的过程只有熵产生,没有熵流的变化,所以熵总是增加的。而开放系统是有熵流变化的,且熵流可以是负的,视外界的作用不同,整个开放系统的熵可能减少,系统存在着由无序到有序转化的可能。维持人体有序结构所需要的能量来自外界供给的食物,食物在人体内被消化吸收后,变为简单的排泄物,这一过程给生命系统带来负熵,使生命系统的熵保持不变或减少,从而维持生命的有序结构。如果把人体和它们的环境放在一起考虑,则总熵仍是增加的,因此生命过程也是遵从热力学第二定律的。

四、信息熵与遗传

自 1865 年克劳修斯提出熵的概念到现在,熵的概念有了很大的发展,先后出现了统计熵(波尔兹曼)、负熵(薛定谔)、熵流(普里高津)、广义熵等重要概念。信息论的创始人申农(Eshannon C)将波尔兹曼熵的概念加以发展,建立了信息熵的概念。

狭义地说,信息就是消息。对事件的了解越多,信息也越多。得到信息的过程就是消除事件不确定性的过程。比如,系统处在一定的宏观状态下有多种可能的微观状态,可供选择的可能性越多,系统的状态的不确定性也就越大。为此引入一个概念:不确定度(uncertainty degree)。信息往往需要以语言文字或符号系统(如音符、数学公式、编码)为载体,在没有得到任何载有信息的载体之前,我们对系统处在何种状态并不确知,如果设法计量了这个不确知的程度有多大,我们就有可能计量信息。因此信息量与不确定度有关。

信息论指出,如果一个事件有 W 个等可能性的结局,那么结局未出现前的不确定度 H 与 W 的自然对数成正比,即

$$H = K \ln W \quad (8-47)$$

申农把这种不确定度称之为信息熵(message entropy)。信息熵反映了信息量的缺损程度,消除了多少不确定度意味着得到了相应程度的信息量。

如果一个事件有 W 个等可能的结局,那么每个结局出现的概率 $P = 1/W$, 则

$$H = K \ln W = -K \ln P \quad (8-48)$$

由上式可知,信息熵是不确定度的量度。信息熵又称申农熵。某一事件的可能结局数越多或其相应概率越少,则信息熵 H 越大。

一般说来,事件的 W 个结局出现的概率并不相等。假如某时间可能的结局和其相应的概率如下:

可能结局: $W_1, W_2, \dots, W_i \dots W_N$, 且 $\sum W_i = W$

相应概率: $P_1, P_2, \dots, P_i = W_i/W \dots P_N$, 且 $\sum P_i = 1$

则该事件信息熵的加权平均值为:

$$H = -K \sum P_i \ln P_i \quad (8-49)$$

上式为信息熵的普遍定义式

既然信息熵意味着信息量的缺损,那么信息熵的减少意味着事件不确定性的减少,也即意味着信息量的增加。如果受到信息前后某一事件的不确定程度(即信息熵)分别为

$$H_1 = -K \sum P_{1i} \ln P_{1i}$$

$$H_2 = -K \sum P_{2i} \ln P_{2i}$$



则可定义信息量为:

$$I = -(H_2 - H_1) = -\Delta H$$

所以,信息量的大小等于信息熵的减少,从这个意义上讲,获得信息就是获得负熵。如果收到信息前后,其可能的结局是等概率的,则信息量为

$$I = -\Delta H = K \ln(W_1/W_2) \quad (8-50)$$

由此可见,信息量的单位由比例系数 K 来确定。如果比例系数 K 取用波耳兹曼常数 k ,则信息熵的单位就采用热力学熵的单位 $J \cdot K^{-1}$ 。在计算科学中常采用二进制,以 $(0,1)$ 构成序列表示某种结果的指令,其信息量的单位采用 bit,换算关系为:

$$1 \text{ bit} = k \ln 2 (J \cdot K^{-1}) = 0.975 \times 10^{-23} (J \cdot K^{-1})$$

[例 8-2] 投掷一色子,计算下列信息所给出的信息量。

- (1) 结果为奇数。
- (2) 结果不为 3。
- (3) 结果为奇数,但不是 3。
- (4) 结果为 3。

解:令 W_1, W_2 分别表示收到信息前后的可能结果数。并令系数 K 为波耳兹曼常数 k ,则信息量为:

$$I = k \ln(W_1/W_2) (J/K)$$

- (1) 由题设知投掷前 $W_1 = 6$,投掷后 $W_2 = 3$,则信息量为

$$I = k \ln(W_1/W_2) = k \ln 6/3 = k \ln 2 (J/K)$$

- (2) $W_1 = 6, W_2 = 5$,则信息量为

$$I = k \ln(W_1/W_2) = k \ln 6/5 (J/K)$$

- (3) 由题设知 $W_1 = 6, W_2 = 2$,则信息量为

$$I = k \ln(W_1/W_2) = k \ln 6/2 = k \ln 3 (J/K)$$

- (4) 由题设知 $W_1 = 6, W_2 = 1$,则信息量为

$$I = k \ln(W_1/W_2) = k \ln 6/1 = k \ln 6 (J/K)$$

很显然,第四种情况的信息量最大,命题的不确定度最小。

自从 1865 年克劳修斯首先提出熵的概念以来,此后又出现了波耳兹曼熵、申农熵(信息熵)等,熵的概念被泛化了。特别是信息熵提出以后,熵的概念全面进入信息科学、社会科学以及生命科学等领域。

在生物遗传现象中,也可以借用信息量的概念进行分析和研究。将遗传密码信息的传递假设为一通信系统, S 为发信者, R 为收信者。 S 以相等的概率发送 A、T、G、C 四种核苷酸信号,每种核苷酸出现的概率为 $1/4$,则信息量为 2bit。由于 S 发送的不是单个的核苷酸信号而是以三个核苷酸组成的三联体密码子形式的信息。三联体密码子的总数为 64 种,那么,每种三联体密码子出现的概率 $P(x)$ 为 $1/64$, S 发送的信息量 $I(x)$ 为 6bit。 R 接收到三联体密码子的信号后转译成 21 种不同的氨基酸消息。设消息的概率为 $P(y)$,经分析,概率为 $1/64$ 的氨基酸有 2 种,概率为 $2/64$ 的氨基酸有 9 种,概率为 $3/64$ 的氨基酸有 2 种,概率为 $4/64$ 的氨基酸有 5 种,概率为 $6/64$ 的氨基酸有 3 种,这样 R 接收到的平均信息量 $I(y)$ 为 4.22bit。

S 发送的信号 x (三联体密码子)与 R 接收到的信号 y (氨基酸)的联合概率的联合信息量 $I(x, y) = H(x) = 6 \text{ bit}$ 。可见 $I(x) = I(x, y)$,表明 S 每发送一个三联体密码子信号, x 都能决定 R 所收到一个特定的氨基酸消息 y 。 $I(y) = 4.22 \text{ bit} < I(x, y)$,这说明,当 R 接收到一个消息 y 时,并不能完全确定 S 所发送的信号 x ,这是因为遗传密码存在简并的缘故。

信息和负熵的概念提供了组织复杂程度和进化程度的定量描述方法,为现代生物科学



提供了新的研究方法和思维方法。负熵是十分积极而有用的,机体的新陈代谢过程是生物体不断从外界获得并积累自由能的过程,从而使它的熵变为负,有机体赖负熵以生存。波耳兹曼说,生物为生存所作的斗争,既不是为了物质,也不是为了能量,而是为了熵。

思考题与习题八

- 8-1 解释下列术语:①系统;②环境;③参量;④过程;⑤外界;⑥准静态。
- 8-2 做功和传递热量是等效的,但又有本质的不同。试解释之。
- 8-3 试证明在同一 p - V 图上一定量理想气体的一条绝热线与一条等温线不能相交于两点。
- 8-4 分析下述说法正确与否?
- (1) 功可以完全变成热,但热不能完全变成功。
 - (2) 热量只能从高温物体传到低温物体,不能从低温物体传到高温物体。
 - (3) 可逆过程就是能沿反方向进行的过程,不可逆过程就是不能沿反方向进行的过程。
- 8-5 为什么说内能和熵都是态函数,而功和热量不是态函数。
- 8-6 把一块 0°C 的冰投入大湖中,设大湖中水的温度比冰高一微小量,于是冰逐渐融解。问:①冰的熵有无变化? ②大湖的熵有无变化?
- 8-7 1mol 单原子理想气体,从 300K 加热到 350K 。试求在定容过程和定压过程中各吸取多少热量? 内能各增加多少? 对外做了多少功?
(定容过程: $625\text{J}, 625\text{J}, 0\text{J}$; 定压过程: $1040\text{J}, 625\text{J}, 415\text{J}$)
- 8-8 一卡诺机在 1000K 和 300K 的两热源之间工作,试计算:
- (1) 热机效率。
 - (2) 若低热源不变,要使热机效率提高到 80% ,则高温热源需提高多少?
 - (3) 若高温热源不变,要使热机效率提高到 80% ,则低热源温度需要降低多少?
($70\%; 500\text{K}; 100\text{K}$)
- 8-9 2mol 的理想气体,经历可逆等温过程,体积从 0.02m^3 膨胀到 0.04m^3 ,温度为 300K 。求其熵变为多少?
($11.5\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)
- 8-10 把 2mol 的氧气从 40°C 冷却到 0°C ,若①定容冷却;②定压冷却。分别求其熵变为多少?
($-5.68\text{J} \cdot \text{K}^{-1}; -7.96\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)

(李晓春)

学习要求:

1. 掌握电场强度、电势和其相互关系与计算及静电场的能量的计算。
2. 掌握静电场的叠加原理、高斯定理与环路定理。理解它们所揭示的静电场性质。
3. 掌握静电场与电介质的相互作用规律。
4. 在电偶极子电场基础上了解心电知识。

电磁现象普遍存在于自然界(包括生命现象)之中,并被不断应用于现代技术。因此,掌握电磁学知识是十分必要的。

以电运动及其规律为研究对象的电学是物理学的重要组成部分,静电场是学习电磁学的基础。本章将讨论静电场的基本性质与规律,其中包括描述静电场性质的两个基本物理量——电场强度和电势及其相互关系;反映静电场基本规律的场的叠加原理、高斯定理以及场的环路定理等;静电场与电介质的相互作用规律以及静电场的能量等内容。并简介对医学有意义的电偶极子电场与心电知识。

第一节 电 场 强 度

一、电场强度的概念

1. 库仑定律 真空中两个静止点电荷 q_1 和 q_2 间的相互作用力 F 为

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (9-1)$$

式中 r 是两点电荷间距离, \mathbf{r}_0 是单位矢量,方向是由 q_1 指向 q_2 。比例系数 k 的数值及单位取决于式中各量所采用的单位。在国际单位制(SI)中通常为了简化电磁学中的一些常用公式,将 k 写成 $k = 1/4\pi\epsilon_0$, 其中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ 称为真空电容率(permittivity of vacuum)或真空介电常量。公式(9-1)严格成立于真空中,对于空气可近似地使用。

2. 电场 电场(electric field)是存在于带电体周围空间的特殊物质。任何电荷都在它周围空间产生电场。电荷之间的相互作用正是通过电场实现的。库仑力即是电场力。建立电场的电荷称为场源电荷(charge of field source)。与观察者相对静止的场源电荷所产生的电场称为静电场(electrostatic field),它是不随时间而变化的稳定电场。

电场具有两种重要性质:一是力的性质,即放入电场的任何电荷都将受到电场力的作用;二是能的性质,即当电荷在电场中运动时,电场力对电荷要做功,表明电场具有能量。

3. 电场强度 为了对电场的性质进行描述,我们引入试探电荷的概念。所带电量足够少且引入后不会影响原来电场性质的点电荷称为试探电荷(test charge)。试探电荷 q_0 在电场中某点所受的力 \mathbf{F} 不仅与该点所在的位置有关,而且与 q_0 的大小有关。比值 \mathbf{F}/q_0 则仅由电场在该点的客观性质而定,与试探电荷无关。于是我们定义这一比值为描述电场具有力的性质的物理量,称为电场强度(electric field intensity),简称场强,以 \mathbf{E} 表示,则

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (9-2)$$

上式表明,电场中某点的场强矢量,其量值等于一个单位试探电荷在该点所受的力,其方向



与正电荷在该点所受力的方向一致。在 SI 制中场强的单位是 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ 或 $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

二、电场强度的计算

1. 点电荷电场中的场强 真空中一个孤立点电荷 q 产生的电场在距其 r 远处的 P 点的场强,由式(9-1)和式(9-2)可得到:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = k \frac{q_0 q}{q_0 r^2} \mathbf{r}_0 = k \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (9-3)$$

式中 \mathbf{r}_0 是由 q 指向 P 的单位矢量。当场源电荷 q 为正时, \mathbf{E} 与 \mathbf{r}_0 同方向;当 q 为负时, \mathbf{E} 与 \mathbf{r}_0 反方向。该式表明点电荷的电场是以其场源为中心呈球形对称分布的。

2. 点电荷系的场强 场强叠加原理 实验表明电场力也满足力的独立作用原理。由 n 个点电荷所组成的带电体系在空间某点的总场强:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_{oi} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (9-4)$$

式中 \mathbf{E}_i 为第 i 个点电荷在该点的场强,而式(9-4)则称为场强叠加原理(superposition principle of field intensity)。它表明:电场中任一点的场强等于组成场源的各个点电荷各自在该点独立产生的场强的矢量和。因此,只要知道点电荷的场强和场源系统的电荷分布情况,便可计算出任意带电体系电场的场强。

3. 连续分布电荷电场中的场强 对于电荷连续分布的带电体,可先将带电体分割为许多电荷元 dq ,对 dq 的场强 $d\mathbf{E}$ 进行积分,即可得出整个带电体电场中的场强

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} \quad (9-5a)$$

若把 dq 视为点电荷,则上式可写成:

$$\mathbf{E} = \int k \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (9-5b)$$

式中 \mathbf{r}_0 是电荷元 dq 指向场点方向的单位矢量。以上积分是矢量积分,可以分解为三个标量积分。

[例 9-1] 一半径为 a 的圆环上均匀分布有电荷 Q 。试求圆环轴线上任一点 P 的场强(图 9-1)。

解:设 P 点距环心 O 为 x 。今将圆环分割为许多极小的元段 $d\lambda$ 、所带电量 dq 的电荷元,可视其为点电荷。 dq 至 P 点的距离为 r ,则 dq 在 P 点的场强大小 $dE = k \frac{dq}{r^2}$,方向如图 9-1。

根据圆环上电荷分布的对称性,各电荷元在 P 点产生的场强垂直于轴线的分量互相抵消,而平行于轴线的分量之和就是带电圆环在 P 点的场强,其大小为:

$$E = \int dE \cos\theta = \int k \frac{\cos\theta}{r^2} dq = k \frac{\cos\theta}{r^2} \int_0^Q dq = k \frac{Q}{r^3} x$$

式中 $\cos\theta = \frac{x}{r}$ 。由于 $r^2 = a^2 + x^2$,故上式又可写成矢量式:

$$\mathbf{E} = k \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{x}_0$$

式中 \mathbf{x}_0 为沿 OX 方向的单位矢量。若 $Q > 0$, \mathbf{E} 沿 OX 方向;若 $Q < 0$, \mathbf{E} 指向环心。

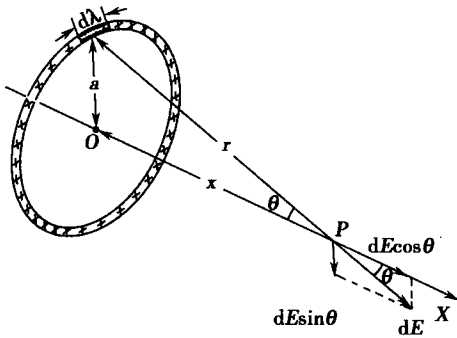


图 9-1 例 9-1



这里再介绍一种计算方法。由于 Q 均匀且连续地分布在圆环上, 电荷元 dq 与元段 $d\lambda$ 之间有关系式 $dq = \frac{Q}{2\pi a} \cdot d\lambda$, 代入上述积分式, 得

$$\mathbf{E} = \int k \frac{\cos\theta}{r^2} dq = \int_0^{2\pi a} k \frac{Q}{2\pi a r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot d\lambda = k \frac{Q}{r^3} x$$

可见两种算法结果一致。

在 $x=0$, 即环心处的场强 $\mathbf{E}=0$; 在 $x \gg a$ 处有 $(a^2 + x^2)^{3/2} \approx x^3$, 即远离圆环的场强 $\mathbf{E} = k \frac{Q}{x^2} \mathbf{x}_0$ 表明在远离圆环处可视圆环为一电荷集中于环心的点电荷。

第二节 高 斯 定 理

一、电场线和电通量

1. 电场线 在电场中描绘一系列曲线, 使其上每一点的切线方向都与该点场强的方向一致, 且通过垂直于场强的单位面积的曲线数目等于该点场强的大小, 即 $\Delta\Phi_E / \Delta S_{\perp} = E$ 。这些曲线称为电场线 (electric field line)。

显然, 电场线的方向表示场强的方向, 电场线的密度表示场强的大小。这样, 电场线就可以形象地全面描绘出电场中 \mathbf{E} 的分布状况。对于静电场的电场线有两个特点: 第一, 电场线是从正电荷出发而终止于负电荷, 电场线不闭合, 也不中断。第二, 任何两条电场线不能相交。因为任何一点的场强都只有一个确定的方向。

2. 电通量 通过电场中某一面积的电场线总数称为通过该面积的电通量 (electric flux) 或 \mathbf{E} 通量, 以 Φ_E 表示。下面我们分几种情况来讨论 Φ_E 的计算方法。

在匀强电场中通过与场强 \mathbf{E} 垂直的平面 S 的电通量, 由上述定义应为 $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$, 如图 9-2(a) 所示。如果平面 S 的法线 \mathbf{n} 与场强 \mathbf{E} 之间的夹角为 θ , 如图 9-2(b) 所示, 则通过该平面的电通量

$$\Phi_E = E \cos\theta \cdot S = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad (9-6)$$

对于在非均匀电场中通过任意曲面的电通量, 可将该曲面分割为许多无限小的面积元 dS , 以至可视其为一平面, 而且在 dS 上的电场强度可认为是均匀的, 则通过该面积元的电通量 [图 9-2(c)] 为

$$d\Phi_E = E \cos\theta dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (9-7)$$

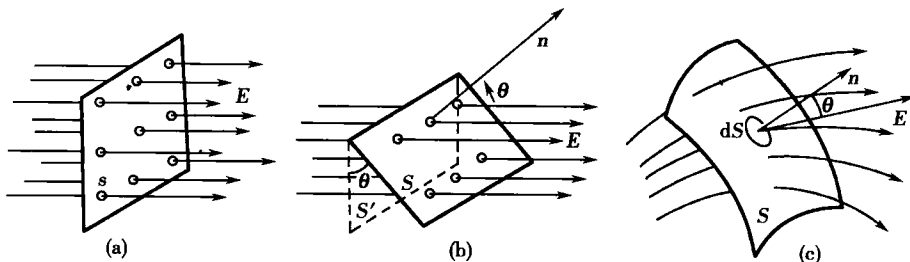


图 9-2 电通量的计算

其中 θ 为 dS 的法线 (\mathbf{n}) 方向与场强 (\mathbf{E}) 方向的夹角。对于整个曲面 S , 其电通量可由面积分求得:

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \iint_S E \cos\theta dS = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (9-8)$$



当 S 是闭合曲面时,式(9-8)可写为

$$\Phi_E = \oint_S E \cos \theta dS = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (9-9)$$

我们规定闭合曲面的法线方向是由里向外为正。若曲面上任一面积元处的 $\theta < \pi/2$, 则该处的电通量为正, 即穿出该面的电场线数为正; 若 $\theta > \pi/2$, 则该处的电通量为负, 即穿入该面的电场线数为负。通过整个闭合曲面的电通量 Φ_E 的值为穿出与穿入该闭合曲面电场线数的代数和。

二、高斯定理

高斯定理(Gauss's theorem)是静电场的基本规律之一。现在我们就真空中的情况推导这一定理。首先考虑场源是点电荷的情形。今以正点电荷 q 为中心, 任意长 r 为半径作一球面 S_1 , 如图 9-3(a)。显然, 球面上各点的场强大小均为 $E = k \frac{q}{r^2}$, 方向沿半径指向外且与球面法线的夹角 $\theta = 0$, 由式(9-9)可求得通过球面 S_1 的电通量

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E \cos \theta dS = E \oint_{S_1} dS = E \cdot 4\pi r^2 = k \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$$

上式表明 Φ_E 与 r 无关, 即对于任意大的球面上式均成立。今围绕点电荷 q 作任意闭合曲面如图 9-3(a)中之 S_2, S_3 等, 由上述推导及图中不难看出其电通量均为 q/ϵ_0 , 且 $\Phi_E > 0$ 。若 q 为负点电荷, 则 $\Phi_E < 0$ 。若作一闭合曲面 S 不包含此点电荷, 则由图 9-3(b)可看到穿出与穿入此闭合曲面的电场线数相同, 亦即通过此闭合曲面的电通量为零。

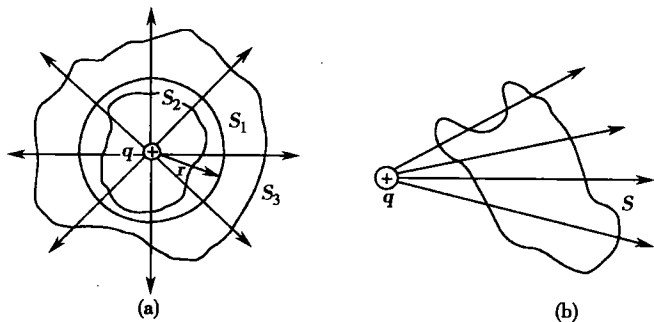


图 9-3 真空中高斯定理的证明

现在, 我们再考虑场源是任意点电荷系的情形。在场中作一任意闭合曲面, 第 1 至第 n 个点电荷在其面内, 自第 $n+1$ 至第 N 个点电荷在其面外。由于上述分析适用于任意一个点电荷, 那么总电通量应为

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} + 0$$

综合上式与式(9-9), 得出

$$\Phi_E = \oint_S E \cos \theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (9-10)$$

同样, 对于任意带电体系的场源, 上式均成立。式(9-10)表明通过真空静电场中任意一闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的电荷电量的代数和除以 ϵ_0 。这就是真空中的高斯定理。关于这一定理, 我们作如下说明:

第一, 由库仑定律和叠加原理导出的高斯定理揭示了场与场源之间的定量关系, 在场强分布已知时可由此求出任意区域内的电荷。这一规律显然与闭合曲面的形状、大小无关。



第二,高斯定理揭示了静电场是有源场。所选取的闭合曲面称为高斯面(Gauss's surface)。若面内是正电荷,则 $\Phi_E > 0$,表明电场线始于正电荷。若面内是负电荷,则 $\Phi_E < 0$,表明电场线终止于负电荷。若面内无电荷,电场线仅仅从该闭合曲面穿过而已。

第三,高斯面是一假想的任意曲面,并非客观存在。

第四,还应该注意,式(9-10)中的 E 在高斯面上,是面内、面外全体场源电荷产生的总场强。面外的电荷对 E 是有贡献的,虽然对高斯面上的电通量 Φ_E 没有贡献,但它可以改变闭合曲面上电通量的分布。式中的 q_i 在高斯面内,而不在面外,也不在面上(这是无意义的)。

Φ_E 与 q_i 的具体分布无关。 $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ 只表示高斯面内电荷电量的代数和为零,亦即高斯面上的电通量 Φ_E 为零,但并不一定面内没有电荷,也并不一定高斯面上各部分曲面的电通量为零。

三、高斯定理的应用举例

1. 均匀带电球面的场强 今有一均匀带电球面,半径为 R ,总带电量为 Q (图 9-4)。欲求离球心 r 远处任一点的场强。从场源电荷的分布可知场的分布呈球形对称,场强方向与球面法线方向一致且在距中心等远各处的场强大小相等。今以球心为中心, r 为半径作一球形高斯面 S ,欲求场强之点落在此高斯面上,代入式(9-10)得通过高斯面的电通量:

$$\Phi_E = \oint_S E \cos \theta dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\text{故有} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^n q_i = k \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^n q_i = 0 \quad (r < R)$$

这表明,在均匀带电球面外部可视其为一电荷集中于球心的点电荷,而在其内部则各处场强均为零。均匀带电球面的电场中各点的场强与该点距球心距离的关系曲线如图 9-4 所示。显然,对于球形对称分布的电场都有类似的分析。

2. 无限大均匀带电平面的场强 今有一无限大均匀带电平面,其面电荷密度为 σ ,欲求其周围电场的场强。由于场源电荷在无限大平面上均匀分布,在其两侧附近的电场则应均匀对称地分布,即场强方向与带电平面垂直、距带电平面等远处的场强大小相等。于是可作一侧面与带电平面垂直,两底面 S_1 与 S_2 距带电平面等远的正圆柱形高斯面,与带电平面相截之截面为 S ,如图 9-5 所示。对于高斯面的两底面均有 $\theta = 0$,对于其侧面则有 $\theta = \pi/2$,通过两底面的电通量均为 ES ,通过其侧面的电通量则为零。所以,通过高斯面的电通量:

$$\Phi_E = \oint_S E \cos \theta dS = 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S$$

$$\text{即} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ 或 } E = 2\pi k \sigma \quad (9-11)$$

图 9-5 无限大均匀带电平面的场强

上式表明无限大均匀带电平面附近是一方向与该平面

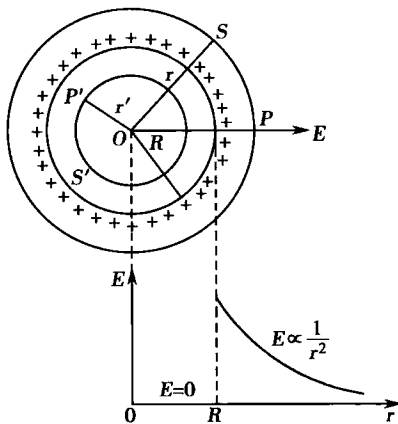
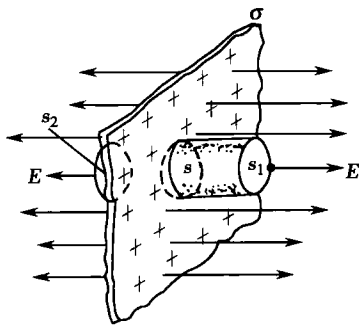


图 9-4 均匀带电球面的电场分析





垂直的匀强电场。

对于两个均匀带等量异号电荷的无限大平行平面之间的电场,利用场强叠加原理由上述结果便可得到 $E = \sigma/\epsilon_0$ 或 $E = 4\pi k\sigma$ 。这仍然是一方向与带电平面垂直的均匀电场。而在这两个平行带电平面的外部, $E = 0$ 。表明这两个平行带电平面的电场完全集中在它们之间的空间内(图 9-6)。这正是平行板电容器为我们提供了均匀电场的缘故。

由以上几个例子可以看出,高斯定理的一个特殊用途在于计算具有某些特殊对称性的静电场的场强,这是很简捷的。在具体运用时,有何步骤,请读者从中总结。

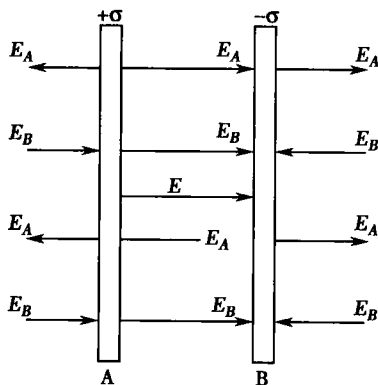


图 9-6 无限大均匀带电平行平面的场强

第三节 电 势

前面我们讨论了静电场的力的性质,现在来讨论静电场的能的性质。

一、静电场的环路定理

1. 点电荷的静电场力对试探电荷做的功 今取一试探电荷 q_0 在场源点电荷 $+q$ 的静电场中由 a 点移动至 b 点(图 9-7)。由于在移动过程中 q_0 受到的静电场力是变力,故可先计算在一段位移元 dl 中电场力所做的元功 dA ,在此元段中可视电场力不变,于是有:

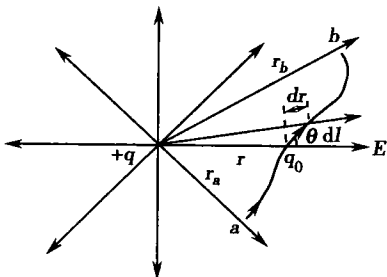


图 9-7 静电场力做功

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

那么 q_0 在从 a 点移动至 b 点的全过程中,电场力所做总功

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0 E \cos\theta dl$$

由图 9-7 可知 $\cos\theta dl = dr$ 且 $E = k \frac{q}{r^2}$,代入上式得

$$A_{ab} = kq_0 q \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = kq_0 q \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (9-12)$$

式中的 r_a 与 r_b 分别表示场源 $+q$ 到移动路径的起点 a 与终点 b 的距离。

2. 任意带电体系的静电场力对试探电荷做的功 对于任意带电体系的静电场,可以看做是许多点电荷的电场叠加的结果。根据场强叠加原理及式(9-12)可得该场对试探电荷 q_0 所做的功应为

$$A_{ab} = \sum_{i=1}^n A_{abi} = \sum_{i=1}^n \int_a^b q_0 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n kq_0 q_i \left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}} \right) \quad (9-13)$$

由于功有正、负之分,所以式(9-13)是代数和式。

3. 静电场的保守性 从式(9-12)与(9-13)可以得到结论:试探电荷在任意静电场中移动的过程中,该电场力对它所做的功只与它的量值以及它移动的始、末位置有关,而与所移动的具体路径无关。这是静电场的一个重要特性。它表明与重力、重力场一样,静电力是保守力,静电场是保守力场或有势场。

4. 静电场的环路定理 若将试探电荷 q_0 从静电场中某点出发经任意闭合路径 L ,最后



再回到该点,则在此过程中静电场力对 q_0 所做的总功应为零,即

$$A_{aa} = \oint_L q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

但 $q_0 \neq 0$, 因此必有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9-14)$$

上式表明在静电场中场强沿任意闭合路径的线积分恒等于零。这一重要结论称为静电场的环路定理(circuital theorem of electrostatic field)。它是静电场保守性的一种等价说法,是与高斯定理并列的静电场的基本定理之一。高斯定理说明静电场是有源场,环路定理说明静电场是有势场。由环路定理还可得出静电场的电场线不能闭合的结论。

二、电势

1. 电势能 静电场和重力场同是保守力场。与物体在重力场中具有重力势能一样,电荷在静电场中也具有电势能(electric potential energy),以 W 表示。电势能的改变是通过电场力对电荷所做的功来量度的,因此有

$$W_a - W_b = A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9-15)$$

式中 W_a 、 W_b 分别表示试探电荷 q_0 在起点 a 、终点 b 的电势能,在 SI 制中,电势能的单位是焦耳(J)。电势能是相对量,对于分布在有限区域的场源电荷,通常规定无限远处的电势能为零,即 $W_\infty = 0$ 。于是试探电荷 q_0 在该场中 a 点所具有的电势能在量值上即等于 q_0 从 a 点移动至无限远处时电场力对其所做的功

$$W_a = \int_a^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9-16)$$

W_a 为正,表明在此过程中电场力做正功,反之表明电场力做负功。

式(9-16)表明电势能是由 q_0 与 \mathbf{E} 共同决定的,它是试探电荷与静电场的相互作用能,为双方所共有。

2. 电势 库仑力不能描述电场的力的性质,同样地,电势能不能描述电场的能的性质。为此引入电势(electric potential),并定义比值 W_a/q_0 为 a 点的电势,以 V_a 表示:

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty E \cos\theta dl \quad (9-17)$$

显然,电势仅由电场的性质所决定。上式还表明:静电场中某一点的电势,在量值上等于单位正试探电荷在该点的电势能,也等于电场力从该点沿任意路径到零势能参考点移动单位正试探电荷所做的功,或静电场中某一点的电势是由该点到零势能参考点场强的线积分。

电势是表征静电场能量性质的物理量,是由场源电荷决定的,而与试探电荷的存在与否无关。这是与电势能不同的。电势是标量,电势有正、负之分。电势是相对量,其量值大小与参考点的选择有关,而参考点的选择本身是任意的,一般选在无限远处或地球等等,这些又与电势能类似。在 SI 制中,电势的单位是伏特(V), $1\text{V} = 1\text{J} \cdot \text{C}^{-1}$ 。

3. 电势差 静电场中两点间电势之差称为电势差(electric potential difference)或电压(voltage):

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9-18)$$

上式表明 a 、 b 两点间的电势差就是场强由 a 点到 b 点的线积分,在量值上等于将单位正试探电荷由 a 点移动到 b 点时电场力所做的功。由此可见,在一条电场线上没有电势相同的点。由于 $A_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 与式(9-18)比较,则有静电场力的功与电势差之间的关系:

$$A_{ab} = q_0 (V_a - V_b) = q_0 U_{ab} \quad (9-19)$$



由此可见,在静电场力的推动下,正电荷将从电势高处向电势低处运动。应注意,电势差与电势不同,它是与参考点位置无关的绝对量。

三、电势叠加原理

根据场强叠加原理,可以得到任意带电体系,其静电场在空间某点 a 的电势:

$$V_a = \sum_{i=1}^n \int_a^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n V_{ai} \quad (9-20)$$

即任意带电体系的静电场中某点的电势等于各个电荷元单独存在时的电场在该点电势的代数和。这就是电势叠加原理(superposition principle of electric potential)。式(9-20)从原则上给出了求任意带电体系电场中电势的方法。

真空中一个孤立点电荷 q 的电场在距其 r_a 远处一点 a 的电势,可根据式(9-17)计算。由于积分路线可以任意选择,若沿电场线方向积分以使 $\theta=0$,则 $d\mathbf{l}=dr$,同时注意到 $E=k\frac{q}{r^2}$,故有

$$V_a = \int_a^\infty E \cos\theta dl = k \int_{r_a}^\infty \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q}{r_a} \quad (9-21)$$

显然,当场源电荷 q 为正时,其周围电场的电势为正;当 q 为负时,其周围电场的电势为负。式(9-21)表明,点电荷电场中电势是以点电荷为中心而呈球形对称分布的。这与从式(9-3)分析的结果一致,它们从不同角度揭示了点电荷电场的特征。

对于电荷连续分布的带电体,其周围电场中任意点的电势可由式(9-20)与式(9-21)得到类似式(9-5)的公式

$$V = \int dV \text{ 或 } V = k \int \frac{dq}{r} \quad (9-22)$$

式中 r 是可视点电荷的电荷元 dq 到场点的距离。

[例 9-2] 求均匀带电圆环轴线上任一点 P 的电势。已知圆环半径为 a ,带电量为 Q 。

解:我们可以由两种方法求得。第一种是以类似于[例 9-1]的方法由式(9-22)求解。将圆环等分为许多元段 dl 、带电量 dq ,由电势叠加原理得整个圆环在 P 点的电势

$$V_P = \int dV_P = \int_0^Q k \frac{dq}{r} = k \frac{Q}{r} = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\text{或由 } dq = \frac{Q}{2\pi a} dl, \text{ 得 } V_P = k \int_0^{2\pi a} \frac{Q}{2\pi a} \frac{1}{r} dl = k \frac{Q}{r} = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

第二种方法是直接从定义式(9-17)计算。从[例 9-1]已知圆环轴线上场强的分布,且方向沿轴线 Ox ,于是可选择沿 Ox 方向积分($\cos\theta=1$)得

$$V_P = \int_P^\infty E \cos\theta dl = \int_x^\infty k \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

显然,两种方法解得的结果相同。在 $x=0$,即圆环中心处的电势 $V=k\frac{Q}{a}$;在 $x \gg a$ 处,由于 $(a^2 + x^2)^{1/2} \approx x$,则有 $V=k\frac{Q}{x}$,即在远离圆环处可视圆环为一电荷集中于环心的点电荷,这与[例 9-1]的结论一致。

四、电场强度与电势的关系

1. 等势面 静电场中由电势相等的点所连成的曲面,且规定任何两个相邻曲面间的电势差值都相等,则这些曲面称为等势面(equipotential surface)。等势面形象地描绘了静电场中电势的分布状况,其疏密程度则表示电场的强弱。静电场的等势面有两个特点:第一,



在静电场中沿等势面移动电荷,电场力做功为零。第二,等势面与电场线互相垂直。原因何在?请读者从本节所述自行论证。值得注意,电场线与等势面都不是静电场中的真实存在,而是对电场的一种形象直观的描述。

2. 场强与电势的关系 场强与电势是从不同角度描述静电场性质的两个重要物理量,它们之间必有确定关系。电势的定义式(9-17)已给出了场强与电势之间的积分关系。现在我们来研究两者之间的微分关系。

在静电场中取两个非常靠近的等势面 1 与 2,且 $dV > 0$ (图 9-8)。在 a 处作等势面 1 的法线,且规定沿电势增高的方向为其正方向, \mathbf{n}_0 为单位矢量。显然在 a 处沿 \mathbf{n}_0 方向有最大的电势增加率 dV/dn ,我们定义 a 处的电势梯度(electric potential gradient)矢量,记作 $\text{grad}V$

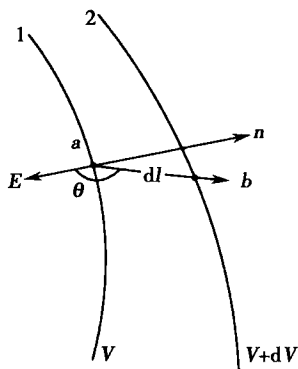


图 9-8 场强与电势的微分关系

$$\text{grad}V = \frac{dV}{dn} \mathbf{n}_0 \quad (9-23)$$

设有一试探电荷 q_0 从电场中之 a 点移动到 b 点,位移为 $d\mathbf{l}$ 。在此范围内可认为场强 \mathbf{E} 是不变的,那么在此过程中电场力对 q_0 所做的功

$$dA = q_0 E \cos\theta dl = q_0 (V_a - V_b) = -q_0 dV$$

于是可有

$$E_l = E \cos\theta = -\frac{dV}{dl}$$

式中 E_l 为场强 \mathbf{E} 在位移方向上的分量。上式表明:静电场中某一点的场强在任意方向上的分量等于电势在该点沿该方向变化率的负值。由于电场线的方向与等势面的法线都垂直于等势面,故场强在等势面法线方向的分量即是场强,且应有

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dn} \mathbf{n}_0 = -\text{grad}V \quad (9-24)$$

即静电场中各点的电场强度 \mathbf{E} 等于该点电势梯度的负值。这就是场强与电势之间的微分关系。从中我们可以看到以下几点:第一,场强与电势的空间变化率相联系。在场强大的地方电势变化得快,等势面密集。这也表明等势面的疏密程度反映了电场的强弱。第二,式(9-24)中的负号表示场强是沿等势面法线指向电势降落的方向。场强的单位 $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 正是由式(9-24)而来的。

由式(9-24)计算场强可避免复杂的矢量运算而只需解决好求电势分布函数对哪一个变量的导数问题。例如由点电荷的电势 $V = k \frac{q}{r}$ 代入式(9-24)便可得到场强的大小: $E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(k \frac{q}{r} \right) = k \frac{q}{r^2}$ 。读者也可用此法由[例 9-2]的结果去求解[例 9-1]。

第四节 电偶极子 电偶层

这一节将讨论对于人体生物电有着重要基础意义的一种典型电场——电偶极子的电场(例如原子、分子、心肌细胞等的电性质都可等效为电偶极子来描述),并着重研究其电势的分布特点。

一、电偶极子的电场

1. 电偶极子及其电偶极矩 两个相距很近的等量异号点电荷 $+q$ 与 $-q$ 所组成的带电



系统称为电偶极子(electric dipole)。所谓“相距很近”是指这两个点电荷之间的距离比起要研究的场点到它们之间的距离是足够小的。从电偶极子的负电荷作一矢径 l 到正电荷,称为电偶极子的轴线(axis)。我们将电偶极子中的一个电荷的电量绝对值与轴线的乘积定义为电偶极矩(electric dipole moment),简称电矩。写作

$$\mathbf{p} = ql \quad (9-25)$$

\mathbf{p} 是矢量,它是表征电偶极子整体电性质的重要物理量。在 SI 制中电矩的单位是 $\text{C} \cdot \text{m}$ 。

2. 电偶极子电场中的电势 设电场中任一点 a 到 $+q$ 与 $-q$ 的距离分别是 r_1 与 r_2 ,如图 9-9,则两点电荷在 a 点产生的电势分别是 $V_1 = k \frac{q}{r_1}$, $V_2 = -k \frac{q}{r_2}$,根据电势叠加原理, a 点的总电势应是:

$$V = V_1 + V_2 = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

设 r 为电偶极子轴线中心到 a 点的距离,根据电偶极子的定义知 $r_1 \gg l, r_2 \gg l, r \gg l$,故可认为 $r_1 r_2 \approx r^2, r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$ 代入上式可得

$$V = kq \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{P \cos \theta}{r^2} \quad (9-26a)$$

若令 \mathbf{r}_0 为从电偶极子中心指向场点 a 的单位矢量,则

$$V = k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} = k \frac{P}{r^2} \cos \theta \quad (9-26b)$$

显然, θ 角是 \mathbf{p} 与 \mathbf{r} 的夹角。上式表明:第一,电偶极子电场中的电势与电矩成正比。说明电矩是表征作为场源的电偶极子整体电性质的物理量,它决定着电偶极子电场的性质。第二,电偶极子电场中电势的分布与方位有关。以电偶极子轴线的中垂面为零电势等势面而将整个电场分为正、负两个对称的区域,正电荷所在一侧为正电势区;负电荷所在一侧为负电势区。这种分布特点在实践中是很有用的。

3. 电偶极子电场中的场强 电偶极子电场中场强的一般分布是比较复杂的,现介绍电偶极子轴线延长线上的场强。根据点电荷的场强公式可判断在电偶极子轴线延长线上的场强是沿 \mathbf{r} 方向的,且 $\theta = 0, V = k \frac{P}{r^2}$,由式(9-24)得 $E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(k \frac{P}{r^2} \right) = k \frac{2P}{r^3}$,显然, \mathbf{E} 与 \mathbf{p} 同方向,故可写成矢量式 $\mathbf{E} = k \frac{2\mathbf{p}}{r^3}$ 。读者可试求电偶极子轴线中垂面上的电场强度 $\mathbf{E} = -k \frac{\mathbf{p}}{r^3}$ 。

由上可知,无论从电势,还是从场强的分布来看,反映一个共同的特点,即沿 \mathbf{r} 方向电偶极子的电场比点电荷的电场衰减得快。两者是完全不同的电场。

二、电偶层

在生物体中,电偶层(electric double layer)是经常遇到的一种电荷分布。所谓电偶层是指相距很近、互相平行且具有等值异号面电荷密度的两个带电表面。计算电偶层电场中各点的电势时,可将电偶层看成是由许多平行排列的电偶极子所组成。图 9-10 是电偶层的示意图。两面间的距离为 δ ,两带电面的面电荷密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 。在电偶层上取面积元 dS ,该面元上的电量为 σdS 。由于 dS 很小,该偶层元可看作是电偶极子,其电矩大小为 $\sigma dS \cdot \delta$,电矩方向与面元的法线方向一致。这一电偶极子单独产生的电场在 a 点的电势为

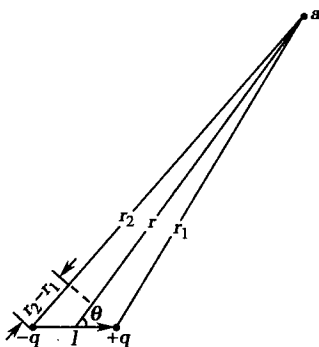


图 9-9 电偶极子电场中的电势



$$dV = k \frac{\sigma dS \cdot \delta \cos \theta}{r^2}$$

式中 r 为面元至 a 点的距离, θ 为面元法线与 r 间的夹角。令 $\tau = \sigma\delta$ 表示单位面积的电偶极矩, 称为层矩, 它表征电偶层的特性。因 $dS \cos \theta / r^2$ 为面元 dS 对 a 点所张立体角 $d\Omega$, 所以有 $dV = k\tau d\Omega$ 。如果从 a 点看到电偶层元带正电荷, 则 $d\Omega$ 取正值, 相反情形 $d\Omega$ 取负值。整个电偶层在 a 点的电势为

$$V_a = \int_S dV = k \int \tau d\Omega \quad (9-27)$$

如果整个电偶层上的层矩 τ 都相等, 则式(9-27)可写成

$$V_a = k\tau \int d\Omega = k\tau\Omega \quad (9-28)$$

式中 Ω 为各面积元对 a 点所张立体角的代数和。式(9-28)表明: 均匀电偶层在某点产生的电势只决定于层矩 τ 与电偶层对该点所张立体角 Ω , 而与电偶层的形状无关。

人体中存在着电偶层构成的闭合曲面。先考虑电偶层均匀的情况, 例如, 内面都带负电, 外面都带正电, 心肌细胞静息时就属于这种情况。由式(9-28)可知, 膜外空间各点电势为零, 而膜内空间各点的电势为 $-4\pi k\tau$ 。分别如图 9-11 中之 a 点与 b 点。如闭合曲面电偶层不均匀, 或其同一面的不同部分带有异号电荷, 则其闭合电偶层外部空间各点的电势一般不为零。心肌细胞的除极过程和复极过程就属于这种情况, 此时膜内外电势差的值与静息时不同。

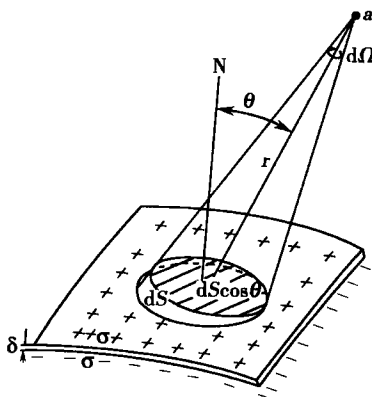


图 9-10 电偶层电场中的电势

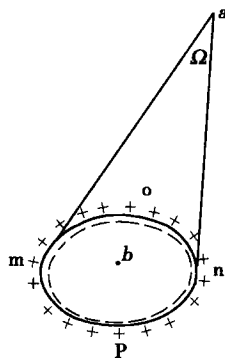


图 9-11 闭合曲面电偶层

第五节 静电场中的电介质

一、电介质的极化

电介质(dielectric)就是绝缘体。这类物质在原子结构上的特点是原子核与绕核的电子之间的相互作用力大, 束缚紧密, 以致使电介质内部几乎没有可以自由移动的电荷, 在外电场的作用下也几乎不能导电。

电介质分子中的正、负电荷总和是相等的。因此, 就整个分子的电性质而言, 可将一个分子等效为一个电偶极子, 称其为分子的等效电偶极子, 它的电偶极矩称为分子电矩 p 。电介质的分子可分为两类。一类由于正、负电荷的对称分布, 结果等效电偶极子中的两个等效点电荷位置重合, 例如 He 、 H_2 、 N_2 、 CH_4 、 CO_2 等, 它们的分子电矩为零, 称为无极分子(non-



polar molecule)。另一类由于正、负电荷的分布不对称,结果等效电偶极子中的两个等效点电荷位置不相重合,例如 HCl 、 H_2O 、 CO 、 SO_2 、 H_2S 、 NH_3 、 CH_3OH 等,它们的分子电矩(称为分子的固有极矩)不为零,称为有极分子(polar molecule)。这一类分子的电矩虽然不为零,但由于所有分子都处在无规则的热运动中,因此从电介质整体或从其中任一宏观微小体积来看,其内部分子电矩的矢量和均为零。这样,从宏观来看,这两类分子构成的电介质内均有 $\sum \mathbf{p}_i = 0$,对外不显示电场性质。

现在我们来讨论静电场对电介质的作用。首先介绍两个概念:第一,束缚电荷(bound charge),即在物体内不能自由移动且不能用传导的方法移走的电荷我们称为束缚电荷。第二,电介质极化(dielectric polarization),即在外电场作用下各向同性的均匀电介质表面(垂直于外电场方向的端面)出现束缚电荷的现象。对于无极分子,由于外电场的作用使两个等效点电荷分别受到方向相反的力,其位置不再重合而错开。分子电矩不再是零,且与外电场方向一致。结果在垂直于外电场方向的介质端面上出现束缚电荷。这种极化称为位移极化(displacement polarization),如图 9-12 所示。此时 $\sum \mathbf{p}_i \neq 0$ 。

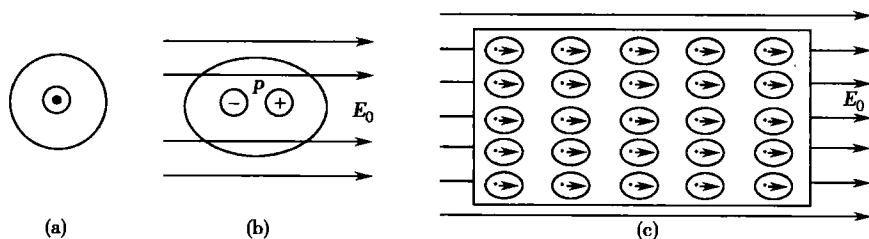


图 9-12 无极分子位移极化示意图

对于有极分子,由于外电场力矩的作用,每个分子的固有极矩都要在一定程度上转向外电场的方向排列。结果在垂直于外电场方向的介质端面上也出现束缚电荷。这种极化称为取向极化(orientation polarization),如图 9-13 所示。此时 $\sum \mathbf{p}_i \neq 0$ 。显然,分子的热运动是阻碍有极分子这种有序排列的,所以温度对取向极化的强弱是有影响的。

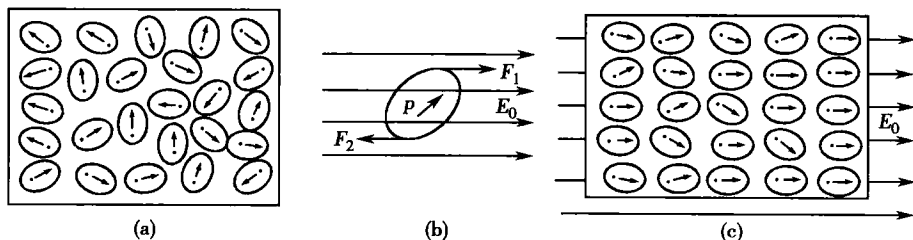


图 9-13 有极分子取向极化示意图

可见,这两类极化的微观过程虽然不同,但宏观结果却是相同的,都使电介质端面上出现了束缚电荷。而且,外电场愈强,极化程度就越高,所产生的束缚电荷也就越多。当外电场撤销后,这种极化现象也就随之消失。所以在对电介质的极化作宏观描述时,就无需再区分这两类极化了。为了描述电介质的极化程度,取单位体积内分子电矩的矢量和 $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i / \Delta V$, 定义为电极化强度(electric polarization)矢量,在 SI 制中 \mathbf{P} 的单位是 $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 。若电介质中各处的 \mathbf{P} 都相同,则称其为均匀极化。 \mathbf{P} 的取值由该处场强与电介质性质决定,在各向同性均匀电介质中有

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (9-29)$$

式中 χ_e 称为介质的极化率或电极化率(electric susceptibility)。



二、电介质中的静电场

静电场对电介质作用的结果是出现极化现象。那么,被极化的电介质反过来又对静电场发生什么影响呢?现在我们来讨论较简单的均匀电介质对静电场影响的效果问题。

如前所述,当均匀电介质在外电场 E_0 作用下极化时,电介质在垂直于 E_0 方向的两个端面上将分别出现均匀分布的正、负束缚电荷层。它们在电介质内部也将产生一个电场,称为极化电场(polarization electric field),写作 E_p 。于是,在电介质内部的总电场应是这两者的矢量和 $E = E_0 + E_p$ (图 9-14)。在均匀外电场中,这三个矢量互相平行,可写成 $E = E_0 - E_p$ 。若图中两平行带电板间距为 d ,其间的两层束缚电荷可视为一系列均匀排列的电偶极子,其电矩总和为 $\sigma' Sd$,由电极化强度定义可知

$$P = \frac{\sum p_i}{\Delta V} = \frac{\sigma' Sd}{Sd} = \sigma' \quad (9-30)$$

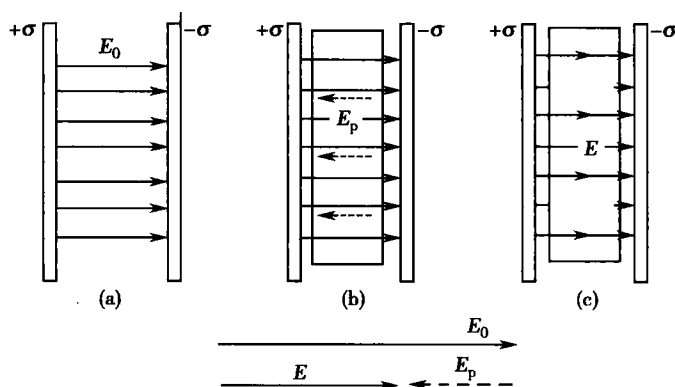


图 9-14 均匀电介质中的静电场

代入 $E = E_0 - E_p$, 得

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi_e \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

经整理得

$$E = \frac{1}{1 + \chi_e} E_0$$

令 $1 + \chi_e = \epsilon_r$, 代入上式并注意到矢量的方向, 得

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 \quad (9-31)$$

上式表明:同样的场源电荷在各向同性均匀电介质中产生的场强减弱为在真空中产生的场强的 $1/\epsilon_r$ 。这一结果正是电介质极化后对原电场产生影响所造成的。需要指出的是,式(9-31)虽然仅适用于各向同性的均匀电介质充满整个静电场的情形,但“减弱”的影响对于各种电介质却是普遍存在的。

式(9-31)中比例系数 ϵ_r , 称为相对电容率(relative permittivity)或相对介电常量,它与 χ_e 之间的关系是

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (9-32)$$

显然,它们具有相同的物理意义,都是表征电介质在外电场中极化性质的物理量。其值越大,表明电介质极化越强,对原电场削弱越厉害。它们都是无单位的纯数。在真空中 $\epsilon_r = 1$ 。对于气体,由于密度小,它的极化对外电场产生的影响很小,其 ϵ_r 值接近于 1。对于固体和液体,其 ϵ_r 值比 1 大很多。表 9-1 给出了一部分电介质(也包括人体组织)的相对电容率的值。



表 9-1 某些电介质的相对电容率

电介质	温度(°C)	ϵ_r	电介质	温度(°C)	ϵ_r
真空		1	骨		6~10
空气(1atm)	20	1.00059	皮肤		40~50
纯水	25	78	血液		50~60
	80	61	肌肉		80~85
二氧化钛	20	100	脂肪		5~6
玻璃	25	5~10	神经膜	37	7~8

对于有极分子构成的电介质,由于其取向极化与分子热运动有关,所以这一类电介质的 ϵ_r 值随温度的升高而减小。而无极分子构成的电介质的 ϵ_r 值则几乎与温度无关。在均匀电介质中各处的 ϵ_r 值都相同。

为了简化公式,今令 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ (9-33)
将其称为电介质的电容率(permittivity)或介电常量,它的单位与 ϵ_0 相同。引入它可使充有电介质的静电场公式得到简化。例如充有均匀电介质的平行板电容器中的场强 $E = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ 等等。还应该指出的是式(9-32)与式(9-33)所表达的关系是普遍成立的。

三、电位移 有电介质时的高斯定理

当有电介质存在时,高斯定理仍然成立。计算高斯面所包围的电荷时应包括自由电荷 q_0 与束缚电荷 q' ,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_{0i} + \sum q'_{i'}) \quad (9-34)$$

然而在解决具体问题时,束缚电荷难以确定,为此对(9-34)作如下变换处理。

以两平行带等量异号电荷的金属板间充以电介质为例。如图 9-15,作虚线所示的封闭柱形高斯面 S ,其底面与带电平板平行,面积为 ΔS 。由式(9-34)得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 \Delta S - \sigma' \Delta S) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 - \sigma') \Delta S \quad (9-35)$$

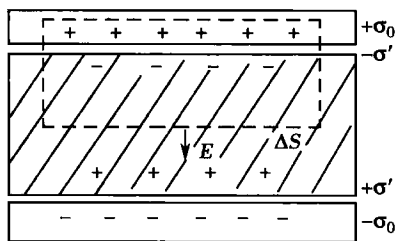


图 9-15 有电介质时的高斯定理的推导

由于 $E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$, 所以 $P = \epsilon_0 (E_0 - E) = (\epsilon - \epsilon_0) E$ 。若写成矢量形式,并且令电位移(electric displacement)矢量

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9-36)$$

则式(9-35)左边可写为 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

又由

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}, \text{ 即 } \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$$

则式(9-35)右边可写为

$$\frac{1}{\epsilon_0} \Delta S (\sigma_0 - \sigma') = \frac{1}{\epsilon} \Delta S \sigma_0$$

故将以上变换代入,则引入 \mathbf{D} 后的式(9-35)可写为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta S \sigma_0$$



式中 $\Phi_D = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 称为通过高斯面 S 的电位移通量 (electric displacement flux), $\Delta S \sigma_0$ 则正是高斯面 S 所包围之自由电荷的代数和, 一般情况下以 $\sum q_{0i}$ 表示, 则上式可写成

$$\Phi_D = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n q_{0i} \quad (9-37)$$

此式表明通过任意闭合曲面的电位移通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。这就是有电介质时的高斯定理, 也称 \mathbf{D} 的高斯定理。虽然式(9-37)是从特例中导出, 但它是普遍成立的, 即使在变化的电磁场中仍然如此。它是电磁学的基本规律之一。由于通过闭合曲面的电位移通量只与面内的自由电荷有关, 而与束缚电荷无关, 故可根据自由电荷以及 \mathbf{D} 矢量分布的对称性由此求出 \mathbf{D} 后再由式(9-36)求出 \mathbf{E} 以及 \mathbf{P} 和 σ' 。

四、电容器及其电容

能储存电量, 彼此绝缘而又靠近的导体系统称为电容器 (condenser)。电容器经过充电后使两极板分别带等量异号的电量 $+Q$ 与 $-Q$, 它们之间形成电势差 U_{AB} , 其大小与电量 Q 成正比, 比值定义为电容器的电容 (capacitance), 写作 C

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} \quad (9-38)$$

在 SI 制中电容的单位是法拉 (F)。电容器是储存电量的装置, 而电容则是表征电容器储存电量能力的物理量。对于平行板电容器有

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (9-39)$$

上式表明平行板电容器的电容 C 与两极板的相对面积 S 成正比, 与两极板之间的距离 d 成反比。因此, 电容器的电容值仅取决于电容器本身的结构 (形状, 大小) 与两极板之间的电介质。一个平行板电容器, 在其两极板间放入电介质之后的电容 $C = \epsilon S/d$ 和放入之前的电容 $C_0 = \epsilon_0 S/d$ 的比值为 ϵ_r 。这正是在实践中测量 ϵ_r 值所依据的原理。也表明在两极板间加入电介质后, 电容将增大 ϵ_r 倍。

五、静电场的能量

由于同种电荷间存在斥力, 任何带电体系的建立过程, 都必然是外力克服电荷之间相互作用力而做功的过程。同时在这一过程中某种外部形式的能量将转换为带电体系的能量。因此, 任何带电体系都具有一定的能量。由于静电场力做功与路径无关, 表明这一能量具有势能的性质。下面以电容器为例来讨论这一能量如何计算以及储存在何处。

1. 带电电容器的能量 一个电容器的能量可以用在整个放电过程中电场力所做的功来量度。在此做功过程中两极板间的电势差逐渐降低, 同时电容器的能量将逐渐释放。当两极板间电势差为 U_{AB} , 电场力将正电荷 dq 由正极板移至负极板时, 电场力所做元功 $dA = U_{AB}(-dq) = dW$ (注: 因为是放电过程, 式中 dq 为负值), 但 $U_{AB} = q/C$, 代入上式有 $dW = -\frac{q}{C}dq$ 。那么, 对于放电的全过程, 电容器释放的总能量, 即放电前电容器所储存的能量应为

$$W = \int dW = -\frac{1}{C} \int_Q^0 q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ 或 } W = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 = \frac{1}{2} Q U_{AB} \quad (9-40)$$

式中 Q 与 U_{AB} 分别为放电开始前任一极板所带的总电量与两极板之电势差。从式中还可看出, 当两个电容器的极板间电势差相同时, 电容器储存的能量与其电容成正比, 说明电容 C 是表征电容器存储能量本领的物理量。无论电容器的结构如何, 式(9-40)的结论总是正



确的。

2. 静电场的能量与能量密度 电容器充电以后具有电能。那么这些能量是储存在电容器极板上,还是储存在极板之间的电场中?为此,我们继续分析上述的能量公式。仍以平行板电容器为例。

由于 $E = \frac{Q}{\epsilon S}$, 移项得 $Q = \epsilon SE$, 且 $U_{AB} = Ed$, 代入式(9-40)得

$$W = \frac{1}{2} Q U_{AB} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Sd)$$

因电容器两极板间的空间体积 $V = Sd$, 若不考虑边缘效应, V 即为电容器电场所占有的空间体积, 代入上式, 得

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \quad (9-41)$$

上式表明电容器的能量与场强的平方及电场的体积成正比。这说明电能 W 是电场所具有, 并储存在电场中, 而不是集中在极板上的场源电荷处。所谓带电体系的能量或电容器的能量, 实质上是这一体系所建立的电场的能量。虽然式(9-39)与式(9-41)只适用于均匀电场, 但以上结论, 即电场具有能量对于任何电场都是普遍成立的。

单位体积电场的能量称为电场的能量密度(energy density), 以 w_e 表示

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (9-42)$$

上式虽然是从均匀电场导出的, 但可以证明它具有普遍性。它表明电场的能量密度仅仅与电场中的场强及电介质有关, 而且是点对点对应的关系。这进一步说明电场是电能的携带者。

在静电场中电场总是伴随着场源电荷同时存在的, 我们说能量是属于场源电荷还是属于电场似乎没有什么区别。但在变化的电磁场中, 由于电磁波是可以脱离场源电荷而存在的, 即当场源电荷不存在时, 电场还存在, 能量也存在。因此, 电场具有能量的观点是在电磁波被发现以后, 证明了电磁能量可以脱离场源而以波的形式传播时才得到最终确认的。能量是物质的固有属性, 电场能量的存在是电场物质性的重要证明。

对于非均匀电场, 其能量密度是随空间各点而变化的。若欲计算某一区域中的电场能量, 则需用积分的方法

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (9-43)$$

[例 9-3] 一平行板空气电容器的极板面积为 S , 间距为 d , 充电后两板上分别带电量 $+Q$ 与 $-Q$ 。断开电源后再将两极板的距离匀速地拉开到 $2d$ 。求:

(1) 外力克服两极板相互引力所做的功。

(2) 两极板间的相互吸引力。

解: (1) 外力匀速地拉动极板, 任一极板上所受到的合力应为零。故外力仅仅用于克服两极板间引力而做功。根据功能原理, 此功应等于电容器能量的增加。

电容器的能量在极板被拉开前、后应分别是: $W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1}$, $W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2}$, 但 $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$, $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{2d}$, 代入上面的式子则有外力所做的功 $A_{\text{外}} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$ 。

(2) 由于电容器两极板间是均匀电场, 故两极板间的相互吸引力 $F_{\text{电}}$ 是常力, 且大小应与外力相等。今有 $A_{\text{外}} = F_{\text{外}} \cdot d$, 所以

$$F_{\text{电}} = F_{\text{外}} = \frac{A_{\text{外}}}{d} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma Q}{2\epsilon_0}$$



对于这一问题,还有另一种解法:两极板的相互作用力也就是一个极板在另一个极板的电场中所受到的力,根据场强的定义式可知:

$$F_{\text{电}} = QE = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

此力的方向显然表现为引力。可以看到,两种解法的结果是一致的。

[例 9-4] 球形电容器两极板分别充电至 $\pm Q$, 内、外半径为 R_1 、 R_2 , 两极板间充满电容率为 ϵ 的电介质。试计算此球形电容器内电场所储存的能量(图 9-16)

解:球形电容器的电场只集中在两极板之间,且不是均匀电场,但具有球对称性。利用高斯定理可求得其场强为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} Q \quad (R_1 < r < R_2)$$

在半径为 r 处的球面上能量密度相同

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon r^2} Q \right)^2 \quad (R_1 < r < R_2)$$

故处在半径为 r 与 $r+dr$ 两球面之间电场的能量

$$dW = w_e dV = w_e 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr$$

由此根据式(9-43)得电容器电场之总能量

$$W = \int dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

如果我们利用球形电容器的电容公式 $C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ 代入电容器的能量公式(9-40),也可得到与上述计算相同的结果:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q^2 / \left(4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

第六节 心 电 知 识

一、心电场

1. 心肌细胞的电偶极矩 心脏的跳动是由心壁肌肉有规律收缩产生的,而这种有规律的收缩又是电信号在心肌纤维传播的结果。心肌纤维是由大量心肌细胞组成的,讨论心脏的电学性质就必然要从心肌细胞入手。心肌细胞与其他可激细胞一样,当处于静息状态时,在其膜的内、外两侧分别均匀聚集着等量的负、正离子,形成一均匀的闭合曲面电偶层。因此,在无刺激时心肌细胞是一个中性的带电体系,对外不显示电性,即外部空间各点的电势为零。这一状态在医学上称为极化(polarization),如图 9-17(a)。当心肌细胞受到某种刺激(可以是电的、化学的、机械的等)时,由于细胞膜对离子通透性的改变,致使膜两侧局部电荷的电性改变了符号,膜外带负电,膜内带正电。于是细胞整体的电荷分布不再均匀而对外显示出电性。此时正、负离子的电性可等效为两个位置不重合的点电荷,而整个心肌细胞类似一个电偶极子,形成一个电偶极矩。刺激在细胞中传播时这个电矩是变化的,这个过程称为除极(depolarization),如图 9-17(b)。当除极结束时,整个细胞的电荷分布又是均匀的,对外不显示电性,如图 9-17(c)。当除极出现之后,细胞膜对离子的通透性几乎立即恢复原状,即

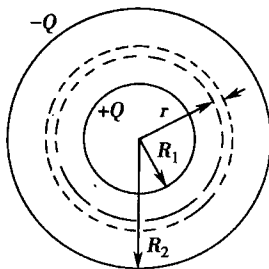


图 9-16 例 9-4



紧随着除极将出现一个使细胞恢复到极化状态的过程,这一过程称为复极(repolarization)。复极的顺序与除极相同,先除极的部位先复极。显然,这一过程中形成一个与除极时方向相反的变化电矩,如图 9-17(d),心肌细胞对外也显示出电性。当复极结束时,整个细胞恢复到极化状态,如图 9-17(e),这时又可以接受另一次刺激。从上述内容可以看出,在心肌细胞受到刺激以及其后恢复原状的过程中,将形成一个变化的电偶极矩,在其周围产生一变化电场,并引起空间电势的变化。

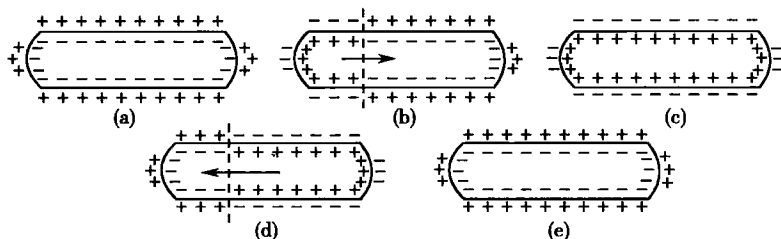


图 9-17 心肌细胞的电学模型

2. 心电偶的电性质及其描述 在某种刺激下,一个心肌细胞会出现除极与复极。同样,对于大量心肌细胞组成的心肌、乃至整个心脏也出现除极与复极。因此,我们在研究心脏电性质时,可将其等效为一个电偶极子,称为心电偶(cardio-electric dipole)。它在某一时刻的电偶极矩就是所有心肌细胞在该时刻的电偶极矩的矢量和,称为瞬时心电向量(twinkling electrocardiovector)。心电偶在空间产生的电场称为心电场(cardio-electric field)。

瞬时心电向量是一个在大小和方向上都随时间作周期性变化的矢量。我们对其箭头的坐标按时空顺序加以描记、并连接成轨迹,则此轨迹称为空间心电向量环(spatial electrocardiovector loop)。它是瞬时心电向量的箭头随时空变动的三维空间曲线(箭尾收在一点),描述了瞬时心电向量随时空变化的规律(图 9-18)。空间心电向量环在某一平面上的投影称为平面心电向量环。

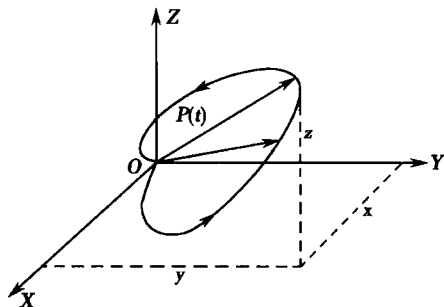


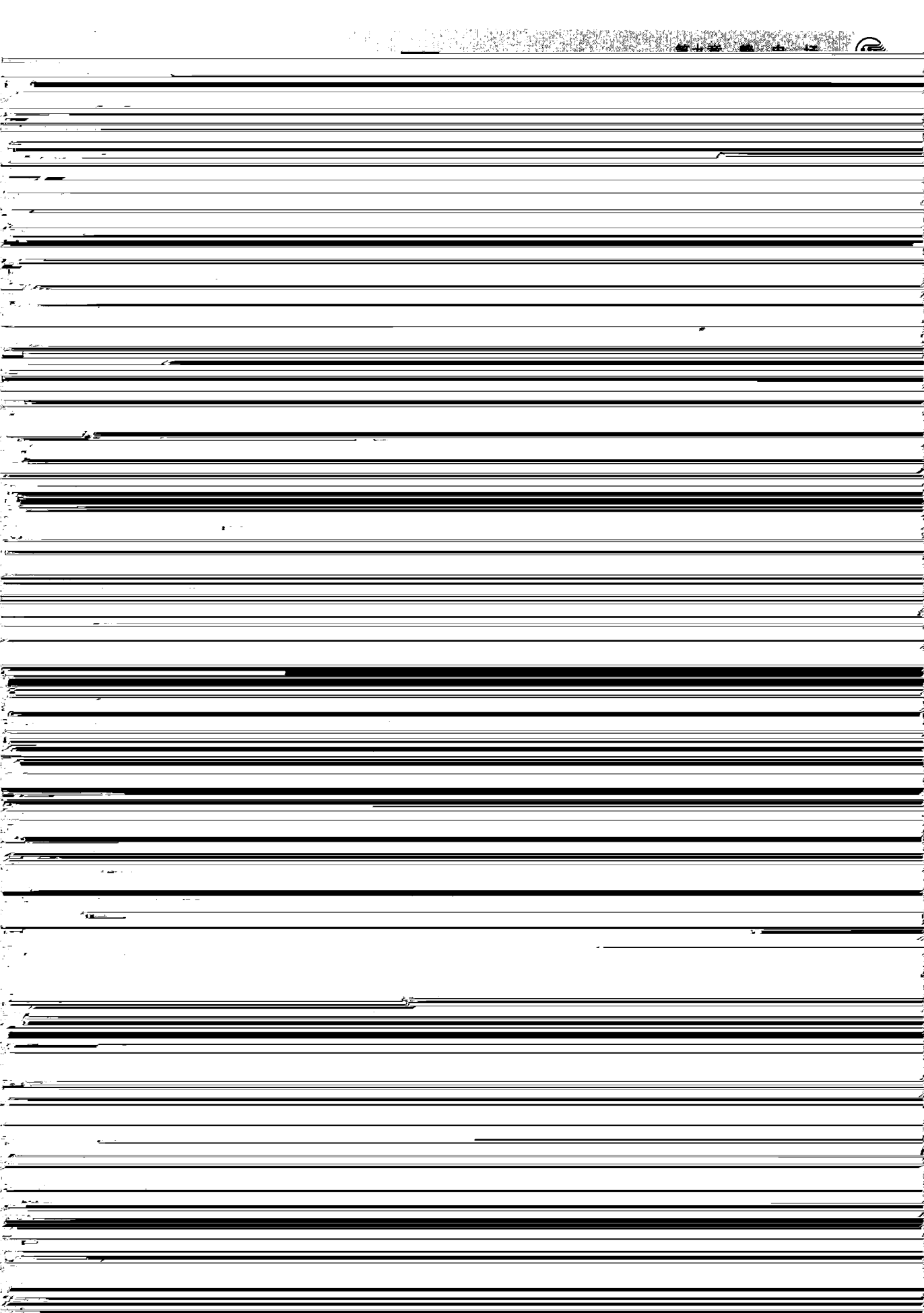
图 9-18 空间心电向量环

二、心电图

由空间心电向量环可以看到,心脏在空间所建立的电场是随时间作周期性变化的。任一瞬时,在空间两点(例如人体表面不同的两点:左臂与右臂)的电势差或电压是确定且可测量的(图 9-19)显然,这一测量值是随时间周期性变化的。于是我们可以根据人体表面两点间的电压描绘出一条曲线,这种曲线就称为心电图(electrocardiogram),如图 9-20 所示。由于心电场的电势分布有正势区、负势区,故心电图波形有时为正值,有时为负值。

三、心电图导联

通过电极引导体表电势(电位)与心电图机相连接的电路称为心电图导联。直接取出体表两点间电压加以显示的导联称为标准导联或双极导联。由于电压曲线取决于两点的电位变化,由其所显示的心电曲线不能确定是哪一个电极的电位变化,而临床医生常需观察体表一点电位的变化,为此需使一个电极处的电位不变或变化很小,这样测得的电压曲线就只反





探查电极接左手和心电图机正极, T 接右手、左脚和心电图机负极。这种导联称为左上肢加压单极肢体导联, 用 aVL 表示。

探查电极接左脚和心电图机正极, T 接右手、左手和心电图机负极。这种导联称为左下肢加压单极肢体导联, 用 aVF 表示。

3. 六种单极胸前导联

T 接左手、右手、左脚和心电图机负极, 作为零电位端, 探查电极接心电图机正极和人体前胸的六个特定部位, 分别形成 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 、 V_5 、 V_6 六个导联。所测电位是胸部对零电位的电压。

V_1 导联是把探查电极放在胸骨右缘第四肋间。

V_2 导联是把探查电极放在胸骨左缘第四肋间。

V_4 导联是把探查电极放在左锁骨中线第五肋间。

V_3 导联是把探查电极放在 V_2 与 V_4 两点连线的中点。

V_5 导联是把探查电极放在左腋前线第五肋间。

V_6 导联是把探查电极放在左腋中线第五肋间。

疑有或有急性心肌梗死者和疑有右心或右心梗死者首次作常规心电图检查时, 必须加做相关其他导联的心电图。

心电图的波形反映心肌传导功能是否正常, 广泛用于心脏疾病的诊断。例如, 心电图可能存在心肌传导阻滞的异常信号。若正常的窦房结信号没有传递到心室中, 那么, 来自房室结的冲动将以每分钟 30~50 次的频率控制心跳, 其值比正常人的心跳频率(70~80 次/分)低得多。由于这类心肌传导阻滞可能使病人半残废, 埋入一个心脏起搏器就能使病人维持适当的正常生活。心电图通常是由心电图室或心脏科的医生来解释, 现在也可用计算机分析心电图, 还可从示波器荧光屏上连续地显示和监视心电图。

思考题与习题九

9-1 如图所示的闭合曲面 S 内有一点电荷 q , P 为 S 面上的任一点, 在 S 面外有一电荷 q' 与 q 的符号相同。若将 q' 从 A 点沿直线移到 B 点, 则在移动过程中:

- A. S 面上的电通量不变。
- B. S 面上的电通量改变, P 点的场强不变。
- C. S 面上的电通量改变, P 点的场强改变。
- D. S 面上的电通量不变, P 点的场强也不变。

(A)

9-2 在一橡皮球表面上均匀地分布着正电荷, 在其被吹大的过程中, 有始终处在球内的一点和始终处在球外的一点, 它们的场强和电势将作如下的变化:

- A. $E_{内}$ 为零, $E_{外}$ 减小, $V_{内}$ 不变, $V_{外}$ 增大。
- B. $E_{内}$ 为零, $E_{外}$ 不变, $V_{内}$ 减小, $V_{外}$ 不变。
- C. $E_{内}$ 为零, $E_{外}$ 增大, $V_{内}$ 增大, $V_{外}$ 减小。
- D. $E_{内}$, $E_{外}$, $V_{内}$, $V_{外}$ 均增大。

(B)

9-3 设在 XY 平面内的原点 O 处有一电偶极子, 其电偶极矩 p 的方向指向 y 轴正方向, 大小不变。问在 x 轴上距原点较远处任意一点的电势与它离开原点的距离成什么关系?

- A. 正比
- B. 反比
- C. 平方反比
- D. 无关系

(D)

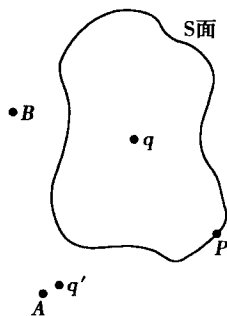


图 9-22 习题 9-1



9-4 在真空中有板面积为 S , 间距为 d 的两平行带电板 (d 远小于板的线度) 分别带电量 $+q$ 与 $-q$ 。有人说两板之间的作用力 $F = k \frac{q^2}{d^2}$ 。又有人说因为 $F = qE$, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$, 所以 $F = \frac{q^2}{\epsilon_0 S}$ 。试问这两种说法对吗? 为什么? F 应为多少?

9-5 今有点电荷 q 和 $4q$ 相距为 L , 试问在什么地方, 放置一个什么样的点电荷, 可使这三个点电荷达到受力平衡。
(在连线 L 上距 q 为 $L/3$ 处; $-\frac{4}{9}q$)

9-6 试求无限长均匀带电直线外一点 (距直线 R 远) 的场强。设线电荷密度为 λ 。

($E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$, 方向垂直于带电直线, 若 $\lambda > 0$ 则指向外, 若 $\lambda < 0$ 则指向带电直线。)

9-7 一长为 L 的均匀带电直线, 线电荷密度为 λ 。求在直线延长线上与直线近端相距 R 处 P 点的电势与场强。

($V = k\lambda \ln \frac{L+R}{R}$; $E = k\lambda \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R} \right)$, $\lambda > 0$, 则方向沿带电直线经 P 点指向外, $\lambda < 0$,

则方向相反。)

9-8 一空气平行板电容器 $C = 1.0 \text{ pF}$, 充电到电量 $q = 1.0 \times 10^{-5} \text{ C}$ 后将电源切断。求:

(1) 两极板间的电势差和此时的电场能。 ($1 \times 10^7 \text{ V}; 50 \text{ J}$)

(2) 若将两极板的距离增加一倍, 计算距离改变前后电场能的变化。并解释其原因。

(50 J)

9-9 试计算均匀带电圆盘轴线上任一点 P 处的场强。设 P 点距盘心 O 为 x , 盘的半径为 R , 面电荷密度为 σ 。并讨论当 $R \ll x$ (提示: $\left[1 + \frac{R^2}{x^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$) 和 $R \gg x$ 时 P 点的场强将如何?

($\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right]$; 方向沿轴线, 若 $\sigma > 0$, 则指向外, 若 $\sigma < 0$, 则指向盘心。)

9-10 有一均匀带电的球壳, 其内、外半径分别是 a 与 b , 体电荷密度为 ρ 。试求从中心到球壳外各区域的场强。

($E = 0, (r < a); E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right), (a < r < b); E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (b^3 - a^3), (r > b)$; 方向沿半径, $\rho > 0$

则背离中心, $\rho < 0$ 则指向中心。)

9-11 试证明在距离电偶极子中心等距离对称之三点上, 其电势的代数和为零。

9-12 在真空中有一无限长均匀带电圆柱体, 半径为 R , 体电荷密度为 $+\rho$ 。另有一与其轴线平行的无限大均匀带电平面, 面电荷密度为 $+\sigma$ 。今有 A, B 两点分别距圆柱体轴线为 a 与 b ($a < R, b > R$), 且在过此轴线的带电平面的垂直面内。试求 A, B 两点间的电势差 $V_{AB} = V_A - V_B$ 。(忽略带电圆柱体与带电平面的相互影响)

($\frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{2} (R^2 - a^2) + \rho R^2 \ln \frac{b}{R} - \sigma (b - a) \right)$)]

9-13 一空气平行板电容器在充电后注入石蜡。(一) 石蜡注入前电容器已不与电源相接; (二) 石蜡注入时电容器仍与电源相接。试比较在以上两种情况下该电容器内各量的变化情

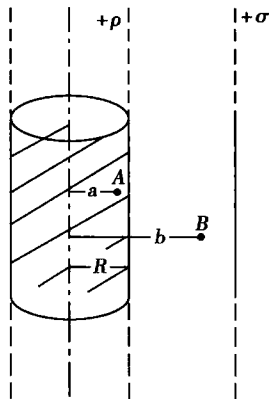


图 9-23 习题 9-12



况,并填入表 9-2 中。

表 9-2 习题 9-13

	(一)	(二)
电量 Q		
场强 E		
电压 U		
电容 C		
场能密度 w_e		

9-14 一个圆柱状电容器的内半径 a , 外半径 b ; a 、 b 间电介质的介电常数为 ϵ 。试证明其所储存的电场能量的一半是在半径为 $r = \sqrt{ab}$ 的圆柱内。

9-15 在半径为 R 的金属球外, 包有一半半径为 R' 的均匀电介质层, 设电介质的相对电容为 ϵ_r , 金属球带电量 Q 。求:

(1) 电介质内、外的场强分布与电势分布。

$$\left[E=0, (r < R); E=\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}, (R < r < R'); E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, (r > R'); \right.$$

方向沿半径, $Q > 0$ 则指向外, $Q < 0$ 则指向球心。

$$V=\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right), (r < R);$$

$$V=\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right), (R < r < R'); V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, (r > R') \left. \right]$$

(2) 金属球的电势。

$$\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) \right]$$

(3) 电介质内电场的能量。

$$\left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \frac{R' - R}{RR'} \right)$$

(郭嘉泰)

学习要求:

1. 掌握基尔霍夫第一、第二定律,电容器的充、放电特性,生物膜电位。
2. 理解电流密度,欧姆定律的微分形式。
3. 了解动作电位,电泳的基本原理。

电荷在电场作用下的定向移动形成电流(electric current)。电流不仅可以传输能量,还可以传递信息。因此,它不仅与人们的日常生活密切相关,而且在生命活动的过程中也起着很重要的作用。本章将从电流密度这个基本概念出发,讨论欧姆定律的微分形式以及电流在复杂电路中的流动规律,并分析电容器的充电和放电过程,最后介绍静息电位、动作电位及电泳技术。

第一节 电 流 密 度

一、电流强度和电流密度

导体(conductor)中含有大量的可自由移动的带电粒子,称为载流子(carrier)。例如,金属中的自由电子,电离气体中的正、负离子。一般情况下,导体内部的载流子在外电场作用下,都作无规则的热运动,因而不能形成电流。但是,如果导体两端保持一定的电势差,导体内部的载流子将在电场力的作用下,作定向移动而形成电流。因此,产生电流的条件是:导体内部必须有载流子;导体中必须存在电场,即导体两端要保持一定的电势差。电流方向习惯上规定为正电荷在电场力作用下的移动方向。电流大小则用电流强度(electric current intensity)来描述,用字母 I 表示,定义为单位时间内通过导体任一截面的电量。如果在 Δt 时间内通过导体任一截面的电量为 ΔQ ,则电流强度为

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (10-1)$$

如果导体中电流强度的大小和方向不随时间而变化,这种电流称为稳恒电流(steady current)。若电流的大小和方向随时间而变化,则称为瞬时电流,用 i 来表示

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (10-2)$$

电流强度是标量,其单位是安培(A), $1\text{A} = 1\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$,常用的单位还有毫安(mA)和微安(μA)。

$$1\text{A} = 10^3\text{mA} = 10^6\mu\text{A}$$

当电流在导体中流动时,一般情况下,只要知道通过导体的电流强度就可以了。但是,当电流通过任意形状的大块导体(如人体躯干、任意容器中的电解液)时,导体中各处电流强度的大小和方向就不完全相同,这样的导体称为容积导体(volume conductor)。显然,对于容积导体仅有电流强度的概念是不够的。为了确切地描述导体内部各点的电流分布情况,我们引入电流密度(electric current density)这一物理量。

如图 10-1 所示,在通有电流强度为 I 的导体内某

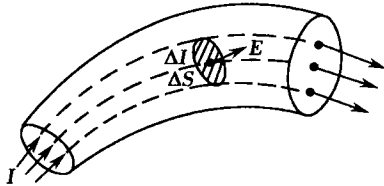


图 10-1 电流密度矢量



处取一面积元 ΔS , 使 ΔS 的法线方向与所在处场强 E 的方向相同。如果通过 ΔS 的电流强度为 ΔI , 则电流密度 J 定义为垂直通过单位截面积的电流强度, 即

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS} \quad (10-3)$$

电流密度 J 是矢量, 其方向与该点的场强 E 的方向一致, 单位是安培每平方米 ($A \cdot m^{-2}$)。

为了应用方便和表达 J 的矢量性, 我们导出 J 的另一表达式。假设导体中存在一种载流子, 且载流子为正电荷, 以 n 表示导体中单位体积内的载流子数目, Z 表示载流子的价数, \bar{v} 表示载流子在电场力作用下的漂移速度 (drift velocity), 则在 Δt 时间内, 通过 ΔS 的电量 $\Delta Q = Zen \cdot \bar{v} \Delta t \cdot \Delta S$, 或者 $\Delta I = \Delta Q / \Delta t = Zen \bar{v} \cdot \Delta S$, 将 ΔI 值代入到式 (10-3) 并取极限, 得

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = Zen \bar{v} = \rho_e \bar{v}$$

式中 $\rho_e = Zen$ 表示导体中自由电荷的体密度。 J 和 \bar{v} 都是矢量, 故上式可写成矢量式

$$\mathbf{J} = Zen \bar{\mathbf{v}} = \rho_e \bar{\mathbf{v}}$$

二、金属与电解质的导电性

在金属导体中传导电流是由大量自由电子的定向漂移运动形成的。自由电子除无规则的热运动之外, 还将在电场力的作用下, 沿着场强 E 的反方向漂移。值得注的是电子的漂移速度是十分缓慢的, 它和电流在导体中的传导速度不是一回事, 后者是电场在导体中的传播速度。下面我们来讨论金属导体中的电流密度。

如图 10-2 所示, 在金属导体中取一微小截面 ΔS , 使 ΔS 的法线方向与该点处的场强方向一致。电子漂移的平均速度为 \bar{v} , 电子密度为 n , 每个电子所带电量的绝对值为 e , 在 Δt 时间内电子定向漂移的距离为 $\Delta l = \bar{v} \cdot \Delta t$, 于是在 Δt 时间内通过截面 ΔS 的电量为

$$\Delta Q = ne \Delta S \Delta l = ne \bar{v} \Delta S \Delta t$$

由此求得通过截面 ΔS 的电流强度为

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = ne \bar{v} \Delta S$$

所以, 该处电流密度的大小为

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta S} = ne \bar{v} \quad (10-4)$$

上式表明, 金属导体中的电流密度 J 等于导体中电子密度 n 、电子所电量 e 和电子漂移的平均速度 \bar{v} 的乘积。

下面我们来讨论电解质的导电性。在人体内部的导电过程中, 电解质溶液导电占重要地位。电解质溶液中的载流子是正、负离子。在无外电场时, 所有的离子都作无规则的热运动, 因而电解质溶液内无电流。当有外电场作用时, 正、负离子在电场力作用下将分别沿电场方向和逆电场方向移动, 于是形成电流。

离子在电解质溶液中作定向运动时, 除受到电场力作用外, 还要受到周围媒质的阻力。当离子速度不大时, 阻力与离子定向运动速度成正比, 阻力的方向与离子定向运动的方向相反。由于正、负离子的质量并不一样, 因此正离子的漂移速度 \bar{v}_+ 和负离子的漂移速度 \bar{v}_- 并不相等。若用 Z 表示离子价数, K_+ 和 K_- 分别为正、负离子的摩擦系数, μ_+ 及 μ_- 分别称为正、负离子的迁移率 (ionic mobility), 当正、负离子所受阻力增加到与电场力相平衡时, 它们

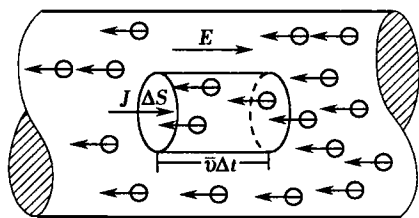


图 10-2 金属导体中的电子漂移与电流密度



的漂移速度可分别由下列各式求出:

$$ZeE - K_+ \bar{v}_+ = 0 \quad \bar{v}_+ = \frac{ZeE}{K_+} = \mu_+ E$$

$$(-ZeE) - K_- \bar{v}_- = 0 \quad \bar{v}_- = \frac{-ZeE}{K_-} = -\mu_- E$$

由上列右边两式可以看出:在电解质溶液中,离子漂移速度的大小和场强成正比。最后一式右边的负号表示负离子的漂移速度方向与场强方向相反。

设单位体积电解质溶液中正、负离子数均为 n , 则电解质溶液中总的电流密度 J 等于正、负离子的电流密度之和, 即

$$\begin{aligned} J &= J_+ + J_- = \rho_+ \bar{v}_+ + \rho_- \bar{v}_- = Zen \bar{v}_+ + (-Zen \bar{v}_-) \\ &= Zen \mu_+ E + (-Zen)(-\mu_- E) = Zen(\mu_+ + \mu_-) E \end{aligned} \quad (10-5)$$

式(10-5)说明,在一定温度下,对于一定的电解质溶液来说, Z 、 e 、 n 、 μ_+ 、 μ_- 都是确定的,故 J 与 E 成正比,且方向一致。

三、欧姆定律的微分形式

我们知道欧姆定律(Ohm's law)的一般形式为

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{U_{12}}{R}$$

它说明在温度一定时,通过粗细均匀导体中的电流与导体两端电势差的关系。上式中的 R 为导体的电阻,它与导体的材料和几何形状有关。

由实验得知对于粗细均匀的导体,当导体的材料和温度一定时,导体愈长、愈细,导体的电阻值就愈大。就是说,导体的电阻与它的长度 L 成正比,与它的横截面积 S 成反比,即

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (10-6)$$

式中比例系数 ρ 称为电阻率(resistivity),它与材料的性质有关,单位是欧姆·米($\Omega \cdot m$)。

电阻率的倒数 $\gamma = \frac{1}{\rho}$, 称为电导率(conductivity),单位是西门子每米($S \cdot m^{-1}$)。

对于不均匀导体,我们必须了解导体内部各点的导电情况。为此,在图 10-3 的导体中,沿电流方向取长度为 dl 、底面积为 dS 的圆柱体元,两端的电势分别为 V 和 $V+dV$ 。由欧姆定律可知,通过圆柱体元的电流强度为

$$dI = \frac{V - (V + dV)}{R} = -\frac{dV}{R}$$

而圆柱体元的电阻可表示为 $R = \rho \frac{dl}{dS}$, 代入上式可得

$$dI = -\frac{dV}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dl} dS$$

或

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dl}$$

上式中,因为 $\frac{dI}{dS} = J$, $E = -\frac{dV}{dl}$, 所以

$$J = \frac{E}{\rho} = \gamma E \quad (10-7)$$

由于电流密度 J 和场强 E 都是矢量,且方向相同,因此式(10-7)可写成矢量式

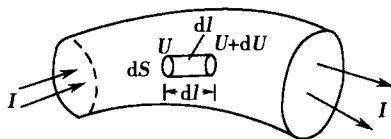


图 10-3 欧姆定律的微分形式



$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \gamma \mathbf{E} \quad (10-8)$$

式(10-7)、(10-8)都是欧姆定律的微分形式,它表明通过导体中任一点的电流密度与该处的电场强度成正比。由于电流密度与导体的性质有关,而与导体的形状大小无关,因此,它揭示了大块导体中的电场和电流分布之间的函数关系,比积分形式的欧姆定律具有更深刻的意义,它适用于任何导体以及非稳恒电场。

第二节 基尔霍夫定律

在分析简单的电路时,应用欧姆定律就可以解决问题。然而,在实际应用中,多数电路是由电阻和电源组成的几个回路而构成的复杂电路,解决这些问题仅用欧姆定律是不够的,必须利用基尔霍夫定律(Kirchhoff's law)。

对于一个复杂电路,电路中的每一分支称为支路。支路可由一个元件或若干个元件组成,特点是:支路上各处的电流都相同。如图 10-4 中的电路就是由 ACB、ADB 和 AB 三条支路组成的。电路中三条或三条以上支路汇合的点叫节点(nodal point),图 10-4 中的 A、B 都是节点。电路越复杂,所包含的支路和节点也越多。电路中任一闭合路径称为回路(loop),图 10-4 中的 ABCA、ABDA、ADBCA 都称为回路。

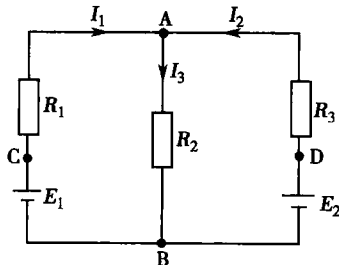


图 10-4 支路和节点

一、基尔霍夫第一定律

基尔霍夫第一定律(Kirchhoff first law)也称为节点电流定律(node current law)。它是用来确定电路中任一节点处各电流之间关系的定律,是根据电流的连续性原理得到的。对于图 10-4 电路中的节点 A 和 B,根据电流的连续性,电路中任何一点,包括节点在内,均不能有电荷的积累。因此,在任一时刻,流入节点的电流之和必定等于流出该节点的电流之和。对于节点 A 则可以得出

$$I_1 + I_2 = I_3$$

上式又可写成

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

若规定流入节点的电流为正,流出节点的电流为负,则汇于任一节点处电流的代数和等于零。数学表示式为

$$\sum I_i = 0 \quad (10-9)$$

这就是基尔霍夫第一定律。在实际应用中,由于电路中各支路电流方向往往难以判定,因此,在列方程时可以先任意假设电流方向,当计算结果为正时,说明电流的实际方向与假设的方向一致;若计算结果为负时,说明电流的实际方向与假设的方向相反。

图 10-4 中有 A、B 两个节点,虽然可以列出两个电流方程,但只有一个是独立的。可以证明,对于有 n 个节点的复杂电路只有 $(n-1)$ 个方程是独立的。

二、基尔霍夫第二定律

基尔霍夫第二定律(Kirchhoff second law)又称为回路电压定律(loop voltage law),它是用来确定回路中各段电压之间关系的定律。我们知道,从电路中任一点出发,绕回路一周,回到该点时电势变化为零。由此得出基尔霍夫第二定律,即沿闭合回路一周,电势降落



的代数和等于零。其数学表示式为

$$\sum \epsilon_i + \sum I_i R_i = 0 \quad (10-10)$$

应用该定律时,首先要假设一个绕行方向,然后再确定各段的电势降落。式中 ϵ_i 和 $I_i R_i$ 的符号选取规定为:对于任意选定的绕行方向,电流方向与其相同时,电势降落为 $+IR$,相反时,电势降落为 $-IR$; ϵ 的方向与绕行方向相反时,电势降落为 $+\epsilon$,相同时,电势降落为 $-\epsilon$ 。

如图 10-5 所示,该电路共有三个回路,ACBA、ABDA、ACBDA。对于每个回路均可用基尔霍夫第二定律列出一个方程,故可列出三个回路电压方程。设三个回路的绕行方向均为顺时针,则三个回路的回路电压方程分别如下:

$$\text{对于 ACBA 回路: } -I_1 R_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_2 R_2 = 0$$

$$\text{对于 ABDA 回路: } +I_2 R_2 - \epsilon_2 + I_3 R_3 = 0$$

$$\text{对于 ACBDA 回路: } -I_1 R_1 + \epsilon_1 + I_3 R_3 = 0$$

应当指出的是,在选取回路时也应注意它们的独立性。上面三个方程式中只有两个是独立的,因为它们中的任意两个方程式相加减,均可得出第三个方程式。在一般情况下,基尔霍夫第二定律能提供的独立回路方程数 l 等于电路支路数 m 与独立节点数 $(n-1)$ 的差,即 $l = m - (n-1)$ 。也就是说 n 个节点可建立 $(n-1)$ 个独立电流方程,其余的独立方程则由基尔霍夫第二定律给出。

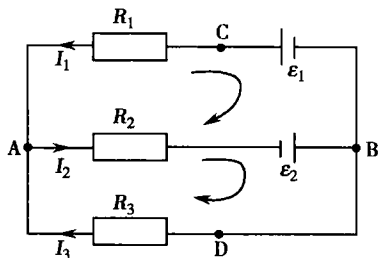


图 10-5 多回路电路

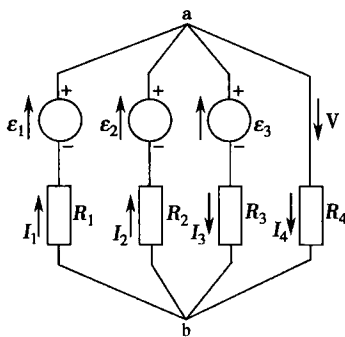


图 10-6 具有两个节点的复杂电路

下面我们用一个例子,进一步说明基尔霍夫定律的应用。如图 10-6 所示,此电路有一特点,就是只有两个节点 a 和 b。节点间的电压 V 称为节点电压,在图中,其正方向由 a 指向 b。各支路电流可应用欧姆定律得出

$$I_1 = \frac{\epsilon_1 - V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\epsilon_2 - V}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-\epsilon_3 + V}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V}{R_4}$$

由上面各式可知,在已知电动势和电阻的情况下,只要先求出节点电压 V ,就可以计算各支路电流了。

根据基尔霍夫第一定律,对于节点 a 可列出方程

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

即

$$\frac{\epsilon_1 - V}{R_1} + \frac{\epsilon_2 - V}{R_2} - \frac{-\epsilon_3 + V}{R_3} - \frac{V}{R_4} = 0$$

经整理后,得出节点电压的公式

$$V = \frac{\frac{\epsilon_1}{R_1} + \frac{\epsilon_2}{R_2} + \frac{\epsilon_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\sum \frac{\epsilon_i}{R_i}}{\sum \frac{1}{R_i}} \quad (10-11)$$

在式(10-11)中,分母的各项总为正;分子的各项可为正,也可为负。当电动势同节点电压的正方向相反时取正号,相同时则取负号。

求出节点电压后,可用欧姆定律计算各支路电流,这种方法称为节点电压法。式(10-11)称为弥尔曼定理,它适用于两个节点多个支路的网络计算,如计算机中的加法电路,也可用于细胞膜离子通道电流的分析。



第三节 电容器的充电和放电

稳态过程与暂态过程(transient state process)的转换是由电容器的充、放电来完成的,主要是利用电容器储存电荷的本领。下面我们将研究电容器充、放电过程中电压与电流的变化规律及影响电容器充、放电速度的电路参数。

一、RC 电路的充电过程

仅由电阻 R 和电容 C 组成的电路称为 RC 电路,它是最常见的脉冲电路。如图 10-7 所示为电容器的充、放电电路。当开关扳向 1 时,电动势为 ϵ 的电源就通过电阻 R 向电容 C 充电,电路中的充电电流为 I_c 。当开关 K 刚接通 1 的瞬间,由于电容器 C 上的电荷尚未积累,因此,电容器两端的电压 U_c 等于零。这时电路中的电流 $I = \frac{(\epsilon - U_c)}{R} = \frac{\epsilon}{R}$,即在这一瞬间电路中的充电电流最大。随着充电时间的延续,电容器上积累的电荷逐渐增加,电容器两端的电压 U_c 也逐渐增大,而这时的充电电流 I 则随 U_c 的增大而减小。当 $U_c = \epsilon$ 时, $I = 0$,充电过程结束,这一过程称为 RC 电路的充电过程。下面我们对充电过程中 I 、 U_c 的变化规律进行定量分析。

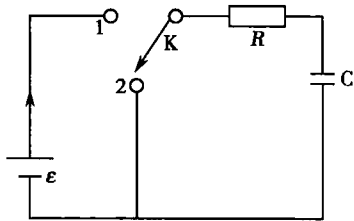


图 10-7 RC 电路

在充电过程中,由基尔霍夫定律可知

$$\epsilon = IR + U_c$$

而 $I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}$ 代入上式,得

$$\epsilon = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c$$

上式为 RC 电路在充电过程中电容器两端电压所满足的微分方程式,这个方程式的解为

$$U_c = \epsilon + A e^{-\frac{t}{RC}}$$

式中,常数由初始条件确定,当 $t=0$, $U_c=0$ 时,代入上式得 $A = -\epsilon$,所以

$$U_c = \epsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (10-12)$$

式(10-12)说明,在 RC 电路的充电过程中电容器 C 两端的电压 U_c 是随时间 t 按指数规律增加的,如图 10-8 所示。

而充电电流为

$$I = \frac{\epsilon - U_c}{R} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10-13)$$

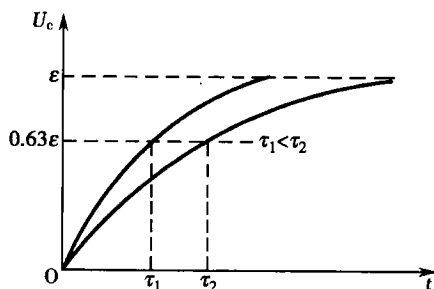
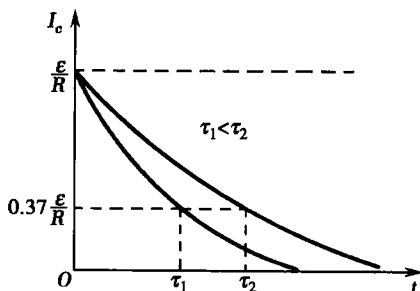
式(10-13)说明,RC 电路中的充电电流 I 是随时间 t 按指数规律下降的,如图 10-9 所示。

从上面的分析可以看出,电容器充电快慢与 R 和 C 的大小有关,我们把 R 和 C 的乘积称为电路的时间常数(time constant),用 τ 来表示, $\tau = RC$,其单位为秒(s)。可以用 τ 来表示充电的快慢, τ 越大,充电越慢;反之,充电越快,如图 10-8、10-9 所示。当 $t = RC = \tau$ 时,有

$$U_c = \epsilon(1 - e^{-1}) = 0.63\epsilon$$

$$I = \frac{\epsilon}{R} e^{-1} = 0.37 \frac{\epsilon}{R}$$

由此,我们可理解时间常数的物理意义。即, τ 是当 RC 电路充电时电容器上的电压从零上升到 ϵ 的 63% 所经历的时间。

图 10-8 RC 电路充电时的 $U_c \sim t$ 曲线图 10-9 RC 电路充电时的 $I_c \sim t$ 曲线

从公式(10-12)可知, $t = \infty$ 时, $U_c = \varepsilon$, 表明只有充电时间足够长时, 电容器两端电压 U_c 才能与电源电动势 ε 相等。但实际上, $t = 3\tau$ 时, $U_c = 0.95\varepsilon$, 当 $t = 5\tau$ 时, $U_c = 0.993\varepsilon$ 。这时 U_c 与 ε 已基本接近, 因此, 一般经过 $3\tau \sim 5\tau$ 的时间, 充电过程就已基本结束。此时充电电流 $I_c = 0$, 相当于开路, 我们通常所说的电容有隔直流作用就是指这种状态而言。

二、RC 电路的放电过程

在图 10-7 所示的电路中, 如果把开关 K 与 2 接通, 电容器 C 将通过电阻 R 放电。刚开始的瞬间, 由于 $U_c = \varepsilon$, 所以电路中有最大的放电电流, 其方向与充电电流相反。其后的放电过程中电容器两端电压 U_c 、放电电流 I_c 都逐渐减小, 直至 $U_c = 0$, $I_c = 0$ 时, 放电结束, 这一过程称为 RC 电路的放电过程。下面我们对放电过程中 U_c 、 I_c 的变化规律进行定量分析。

在放电过程中, 由基尔霍夫定律可知

$$U_c = I_c R$$

由于电容器放电过程电荷逐渐减少, 故电荷变化率为负, 因此

$$I_c = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU_c}{dt}$$

代入上式得

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{RC} = 0$$

这个一阶微分方程的解是

$$U_c = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

将初始条件 $t=0$, $U_c = \varepsilon$ 代入上式, 可得 $A = \varepsilon$, 则上式变为

$$U_c = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10-14)$$

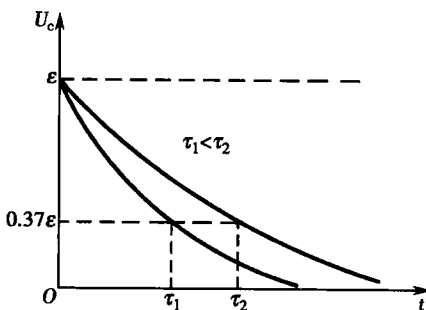
而放电电流 I_c 为

$$I_c = \frac{U_c}{R} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10-15)$$

由式(10-14)和式(10-15)可知, 在 RC 电路放电的过程中, U_c 、 I_c 均随时间 t 按指数规律衰减。

同样 U_c 、 I_c 衰减的快慢也取决于时间常数 $\tau = RC$, τ 越大衰减越慢, 如图 10-10 所示。当 $t = \tau$ 时, $U_c = 0.37\varepsilon$, 从理论上讲, 只有 $t = \infty$ 时, $U_c = 0$ 放电才结束。在实际中, 当放电时间经过 $3\tau \sim 5\tau$ 时, 便可认为放电基本结束。

从上面分析可知, 不论是在充电或放电过程

图 10-10 RC 电路放电时的 $U_c \sim t$ 曲线



中,电容器上的电压都不能突变,只能逐渐变化。这就是 RC 电路暂态过程的特性,这一特性在电子技术中有着广泛的应用。除此,在研究生命现象时经常用到 RC 电路。例如,细胞膜的电特性以及神经传导也常被模拟为 RC 电路。

第四节 生物膜电位

一、能斯特方程

大多数动物以及人体的神经和肌肉细胞在不受外界干扰时,由于细胞膜内、外液体的离子浓度不同,细胞膜对不同种类离子的通透性不一样,因此在细胞膜内、外之存在着电位差。

为了说明这一问题,我们首先考虑一种简单的情况。如图 10-11 所示,两种不同浓度的 KCl 溶液,由一个半透膜隔开,设半透膜只允许 K^+ 通过而不允许 Cl^- 通过。由于浓度不同, K^+ 从浓度大的 C_1 一侧向浓度小的 C_2 一侧扩散,结果使右侧正电荷逐渐增加,左侧出现过剩的负电荷。这些电荷在膜的两侧聚集起来,产生一个阻碍离子继续扩散的电场,最后达到平衡时,膜的两侧具有一定的电势差 ϵ 。对于稀溶液, ϵ 的值可由玻耳兹曼能量分布定律(Boltzmann energy distribution law)来计算。这一定律指出,在温度相同的条件下,势能为 E_p 的粒子的平均密度 n 与 E_p 有如下关系

$$n = n_0 e^{\frac{-E_p}{kT}}$$

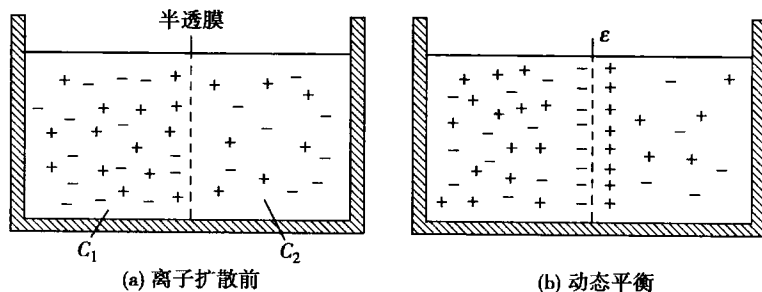


图 10-11 能斯特电势的形成

式中 n_0 是势能为零处的分子数密度, k 为玻耳兹曼常数(Boltzmann constant)。设在平衡状态下,半透膜左、右两侧离子密度分别为 n_1 、 n_2 , 电位为 V_1 、 V_2 , 离子价数为 Z , 电子电量为 e , 则两侧离子的电势能分别为

$$E_{p1} = ZeV_1 \quad E_{p2} = ZeV_2$$

则

$$n_1 = n_0 e^{\frac{-ZeV_1}{kT}} \quad n_2 = n_0 e^{\frac{-ZeV_2}{kT}}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{-Ze(V_1 - V_2)}{kT}}$$

对上式两边取对数

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = -\frac{Ze}{kT}(V_1 - V_2)$$

因为膜两侧浓度 C_1 、 C_2 与离子密度成正比,即

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

于是,下式成立



$$V_1 - V_2 = -\frac{kT}{Ze} \ln \frac{C_1}{C_2}$$

改成常用对数

$$\epsilon = -2.3 \frac{kT}{Ze} \lg \frac{C_1}{C_2} \quad (10-16)$$

式(10-16)是建立在正离子通透的情况下取负号,若负离子通透则取正号。综合考虑两种情况,则

$$\epsilon = \pm 2.3 \frac{kT}{Ze} \lg \frac{C_1}{C_2} \quad (10-17)$$

式(10-17)称为能斯特方程式(Nemst equation)。它给出了透膜扩散平衡时,膜两侧的离子浓度 C_1 、 C_2 与电势差 ϵ 的关系,因此, ϵ 称为能斯特电位,生理学上称为膜电位。

二、静息电位

大量的实验告诉我们,细胞膜是一个半透膜。在膜的内、外存在着多种离子,其中主要是 K^+ 、 Na^+ 、 Cl^- 和大蛋白质离子 A^- ,当细胞处于静息状态,即平衡状态时,这些离子的浓度如图 10-12 所示。 K^+ 、 Na^+ 、 Cl^- 离子都可以在不同程度上透过细胞膜,而其他离子则不能透过。因此那些能透过细胞膜的离子才能形成膜电位,这时的电位就是静息电位(resting potential)。

我们知道人体的温度为 $273 + 37 = 310K$,玻耳兹曼常数 $k = 1.38 \times 10^{23} J \cdot K^{-1}$,电子的电量 $e = 1.60 \times 10^{19} C$, K^+ 、 Na^+ 、 Cl^- 离子的 Z 分别为 $+1$ 、 $+1$ 和 -1 。代入这些值后,能斯特方程对于正、负离子来说可改写成如下形式

$$\epsilon = \pm 61.5 \lg \frac{C_1}{C_2} mV \quad (10-18)$$

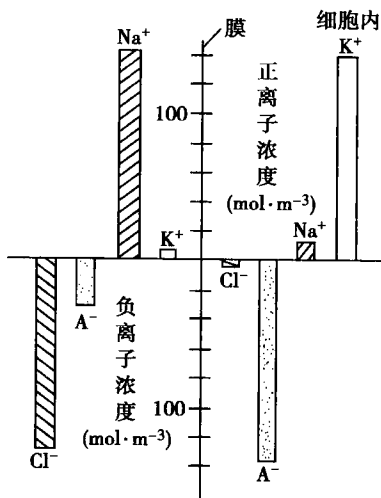


图 10-12 静息状态时膜内外离子浓度

表 10-1 人体神经细胞膜内外离子浓度值($mol \cdot m^{-3}$)

离子	细胞内液浓度 C_1	细胞外液浓度 C_2
Na^+	10	142
K^+	141	5
Cl^-	4	100
A^-	147	47

现在,我们根据表 10-1 所列出的 K^+ 、 Na^+ 、 Cl^- 离子在细胞膜内、外的浓度,并将其数值代入式(10-18)来计算这三种离子在平衡状态下的静息电位。

$$Na^+ : \epsilon = -61.5 \lg \frac{10}{142} = +71 mV$$

$$K^+ : \epsilon = -61.5 \lg \frac{141}{5} = -89 mV$$

$$Cl^- : \epsilon = +61.5 \lg \frac{4}{100} = -86 mV$$

如果把以上这些计算值与实验测量值得到的神经静息电位 $-86 mV$ 相比较,可以发现, Cl^- 离子正好处于平衡状态,即通过细胞膜扩散出入的 Cl^- 离子数目保持平衡。对于 K^+ 离



子来说,两结果相差不大,说明仍有少量 K^+ 离子由膜内向膜外扩散。而对于 Na^+ 离子来说却相差很远,这是因为在静息状态下细胞膜对 Na^+ 离子的通透性很小,仅有少量 Na^+ 离子可以由浓度高的膜外扩散到膜内。为了说明在静息状态下离子的浓度保持不变,必须认为存在着某种机制把扩散到膜外的 K^+ 离子和进入到细胞膜内的 Na^+ 离子送回原处,我们把这种机制称为钾泵(K^+ pump)和钠泵(Na^+ pump)。“泵”的意思是强调这不是一种被动的扩散过程,而是一种需要代谢能量的主动机制。图 10-13 示意地说明细胞膜内、外的离子浓度是如何保持平衡的。关于钠-钾泵的工作原理,目前还没有搞清,有待今后继续研究。

三、动作电位

我们已经知道,当神经或肌肉细胞处于静息状态时,细胞膜外带正电,膜内带负电,这种状态又称极化(polarized)。但是当细胞受到外来刺激时,不管这种刺激是电的、化学的、热的或机械的,细胞膜都会发生局部去极化。随着刺激强度的加大,细胞膜去极化的程度也不断地扩展。当刺激强度达到阈值或阈值以上时,受刺激的细胞膜对 Na^+ 离子的通透性会突然增加。由于膜外 Na^+ 离子的浓度远高于膜内,膜内的电位又低于膜外,于是大量 Na^+ 离子在浓度梯度和电场的双重影响下由细胞膜外涌入细胞膜内。这一过程的直接结果是使膜内电位迅速提高,当膜内、外 Na^+ 离子的浓度差和电位差的作用相互平衡时,细胞膜的极化发生倒转,结果细胞膜内带正电,膜外带负电,这一过程叫除极(depolarization)。与此同时,电位也由静息状态下的 $-86mV$ 变成 $+60mV$ 左右。

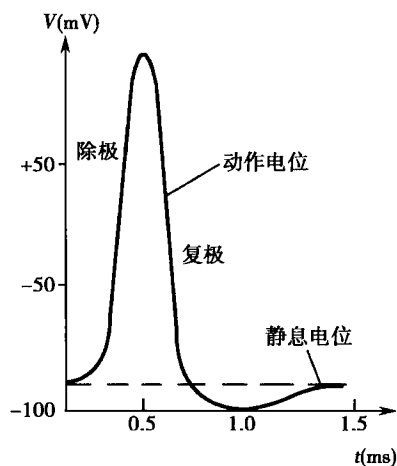


图 10-14 动作电位

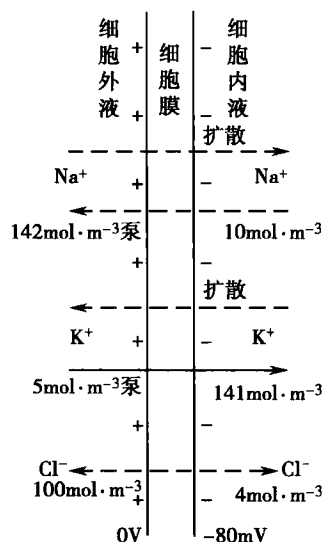


图 10-13 细胞膜内外离子的平衡

除极之后,细胞膜又使 Na^+ 离子不能通透,而 K^+ 离子的通透性突然提高,大量 K^+ 离子由细胞膜内向膜外扩散,使膜电位又由 $+60mV$ 迅速下降到约 $-100mV$ 左右。于是,离子在细胞兴奋时的移位都获得了恢复,即细胞膜内带负电、膜外带正电,这一过程称为复极(repolarization)。之后,由于“钠-钾泵”的作用,细胞膜内的 Na^+ 离子被输送到膜外,同时使细胞膜外的 K^+ 离子回到膜内,膜电位又恢复到静息电位值,即 $-86mV$ 。

由上面的论述可以看出,细胞受刺激所经历的除极和复极过程,伴随着电位的波动过程。实验证明,这一过程仅需 $10ms$ 左右。我们把这种电位波动称为动作电位(action potential)。图 10-14 给出了一个动作电位的形成过程。细胞在恢复到静息状态后,它又可以接受另一次刺激,产生另一个动作电位。在不断的强刺激下,一秒之内可以产生几百个动作电位。

第五节 电 泳

悬浮或溶解在电介质溶液中的带电粒子,在外加电场的作用下发生迁移的现象称为电泳(electrophoresis)。这些粒子可以是细胞、病毒、球蛋白分子,也可以是合成粒子。由于不同粒子



的分子量、体积及所带电量不同,因此在电场作用下它们的迁移速度也是不相同的。利用这一性质我们可以把样本中的不同成分分离,这已成为生物化学研究、制药以及临床检验的常用手段。

一、电泳原理

在电泳过程中带正电荷的粒子向电场的负极方向迁移,带负电荷的粒子向电场的正极方向迁移。这些带电粒子在迁移过程中要受到电场力和周围介质的阻力作用,当两力平衡时,粒子以稳定的速度向电极方向迁移。

设球状粒子的半径为 r 所带电量为 q ,在场强为 E 的电场中以速度 v 迁移,则它所受到的电场力 F_1 为

$$F_1 = qE$$

另据斯托克司定律,该粒子在黏度为 η 的液体中泳动时所受阻力 F_2 为

$$F_2 = 6\pi\eta rv$$

当 $F_1 = F_2$ 两力平衡时,粒子作匀速泳动,其迁移速度为

$$v = \frac{qE}{6\pi r\eta} \quad (10-19)$$

由式(10-19)可知,带电粒子的迁移速度受电场强度的影响,与粒子的半径和溶液的黏度有关。

实际上带电粒子的迁移速度还受外界因素的影响。溶液 pH 值的影响就是其中之一,例如,当溶液的酸碱度处于某一特定的 pH 值时,它就会带有相同数量的正负电荷,即净电荷数为零。在这种情况下,蛋白质分子不会在电场中迁移。除此,溶液的离子强度对粒子的迁移速度也有影响,离子强度大,粒子的迁移速度快,反之则慢。另外,支持物的吸附、电渗、蒸发也对带电粒子的迁移速度有影响。

带电粒子迁移速度的快慢常用迁移率 μ 来表示,定义为单位电场强度下的迁移速度。由式(10-19)可知

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{q}{6\pi r\eta} \quad (10-20)$$

在实际测量时,式(10-20)用下面的表示形式

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{L_d/t}{V/L} = \frac{L_d L}{V t} \quad (10-21)$$

式(10-21)中, L_d (单位: cm) 表示带电粒子在时间 t (单位: s) 内迁移的距离; L (单位: cm) 为支持物的实际长度; U (单位: V) 为支持物两端的实际电压; 迁移率 μ (单位: $\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)。

二、滤纸电泳

从工作原理上分类,滤纸电泳属于区带电泳,也是一种最早使用,且分离效果较好的电泳方法。所谓滤纸电泳是指用纸作为支持物的电泳方法,普通层析纸就适用于电泳。图 10-15 是水平式纸电泳的结构示意图,它由直流电源和电泳槽两大部分构成。直流电源需提供稳定的输出电压、电流和功率;电泳槽一般包括电极(由碳棒或铂片组成)、缓冲液(使溶液 pH 值在电泳过程中保持稳定)、电泳介质的支架和透明的绝缘密封盖等部分。两个电极和滤纸的两端分别放在盛有缓冲液的两个槽内,待滤纸全部润湿后,将少许的标本滴在滤纸上,之后接通电源。在电场的作用下,标本中的带电粒子开始移动。经过一段时间后,由于不同成分粒子的迁移率不同,它们的距离就逐渐拉开。例如,血清蛋白中含有清蛋白, α_1 、 α_2 、 β 、 γ 球蛋白等各种蛋白质,利用电泳技术就可以把这几种蛋白质分开,图 10-16 即为血清蛋白的电泳图谱。把滤纸烘干,然后进行染色,可见几条鲜明的色带。把色带一一剪下,并把它分别溶于脱色剂中,再进行比色测定,就可求得各种蛋白质占蛋白质总量的百分率。

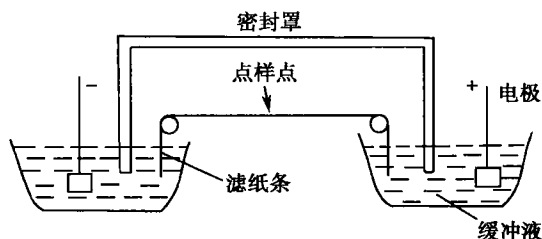


图 10-15 水平式纸电泳装置

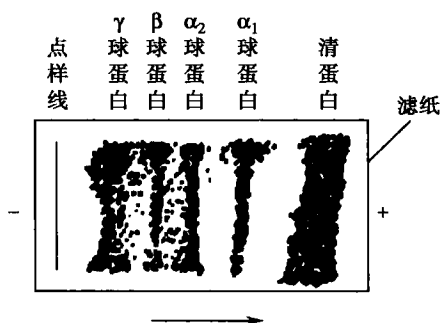


图 10-16 血清蛋白的电泳

三、毛细管电泳

毛细管电泳(capillary electrophoresis, CE)是以毛细管为分离通道,以高压直流电场为驱动力的一种新型液相分离技术。是 20 世纪 80 年代以后逐渐发展起来的,其最大的优点是高效、快速、进样量小、灵敏度高。

1. 毛细管电泳的基本工作原理 溶液中的带电粒子以高压电场为驱动力,沿毛细管通道,以不同的速度向与其所带电荷相反的电极方向迁移。对于常用的石英毛细管柱而言,在 $\text{pH} > 3$ 的情况下,毛细管内壁表面上的硅醇基($-\text{SiOH}$)将发生离解而带负电,当其与缓冲液接触时正离子就会聚集在液-固界面处形成电偶层。在缓冲液中,带电粒子在电场的作用下向与其所带电荷极性相反方向移动,形成电泳,电泳速度(即电泳淌度)用 v_{ep} 表示;同时,在高压电场的作用下,形成电偶层一侧的缓冲液由于带正电荷而整体地向负极方向移动,这一现象称为电渗流(electroosmotic flow, EOF),其速度用 v_{eo} 表示。显然,带电粒子在毛细管内缓冲液中的迁移速度应为电泳速度与电渗流速度的矢量和,即

$$v = v_{\text{ep}} + v_{\text{eo}} \quad (10-22)$$

带电粒子的迁移率为

$$\mu = \mu_{\text{ep}} + \mu_{\text{eo}} \quad (10-23)$$

由式(10-22)及式(10-23)可知:当待测样品位于两端加上高压电场的毛细管的正极时,正离子的电泳方向和电渗流方向一致,其迁移速度是二者之和;中性粒子的电泳速度为“零”,其迁移速度就是电渗流速度;负离子的电泳方向与电渗流方向相反,其迁移速度是二者之差。同理,带电粒子的迁移率也遵从这一规律。据此,正离子最先到达毛细管的负极端,其次是中性粒子,最后是负离子,使它们得以分离,这就是毛细管电泳的基本工作原理。

2. 毛细管电泳仪的基本结构 毛细管电泳仪的结构如图 10-17 所示,主要有高压电源、

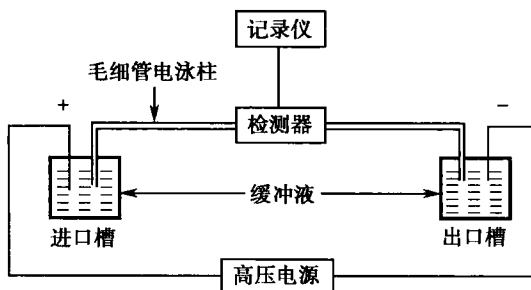


图 10-17 毛细管电泳仪结构示意图



毛细管柱、检测器、两个缓冲液槽(可供毛细管插入并和高压电源相连)、输出信号和记录装置(记录仪、积分仪或计算机工作站)相连。

毛细管电泳有多种分离模式,常用的有毛细管区带电泳(capillary zone electrophoresis, CZE)、毛细管胶束电动色谱(micellar electrokinetic capillary chromatography, MECC)、毛细管凝胶电泳(capillary gel electrophoresis, CGE)等。但不管是那种分离模式,分离过程主要是在毛细管内完成。因此,对于仪器的核心部件——毛细管来说,在材质及规格上都有较为严格的要求。目前,主要用石英制作毛细管柱,其内径在 $25 \sim 75 \mu\text{m}$ 之间。毛细管柱的长短应根据实际情况确定,在同样电压下,相同的毛细管,长度增加,电阻增大,电流减小,有利于减少自热;但同时也降低了电场强度,增长了分析时间。反之,毛细管柱过短,容易造成过热,但却减少了分析时间。实际应用时,CZE 的毛细管柱长为 30cm,CGE 的毛细管柱长则要短很多。

思考题与习题十

10-1 两根粗细不同的铜棒接在一起(串联),在两端加上一定电压。设两铜棒的长度相同,那么:

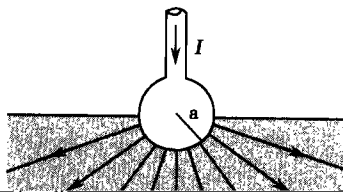
- (1) 通过两棒的电流强度是否相同?
- (2) 如果略去分界面处的边缘效应,通过两棒的电流密度是否相同?
- (3) 两棒内的电场强度是否相同?
- (4) 接在一起(串联)的棒两端的电场强度是否相同?

10-2 把大地看成均匀的导电介质,其电阻率为 ρ 。用一半径为 a 的球形电极与大地表面相接,半个球体埋在地下,如图 10-18 所示。如果电极本身

的电阻可以忽略,试证明此电极的接地电阻为: $R = \frac{\rho}{2\pi a}$ 。

10-3 灵敏电流计能测出的最小电流约为 10^{-10} A 。问:

- (1) 10^{-10} A 的电流通过灵敏电流计时,每秒内流过导线截面的自由电子数是多少?



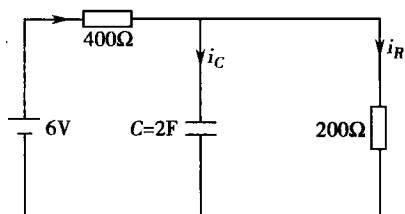


图 10-19 习题 10-4

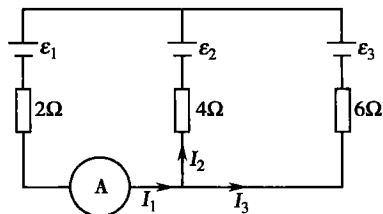


图 10-20 习题 10-5

10-8 什么叫动作电位？简述其产生过程。

10-9 电泳是根据什么原理把测量样品中的不同成分进行分离的？怎样可求得各种不同成分所占总量的比例？

10-10 毛细管电泳的基本工作原理是什么？毛细管的长度不同，对分离结果有什么影响？

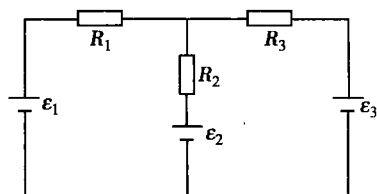


图 10-21 习题 10-6

(潘志达)

第十一章 稳恒磁场

学习要求:

1. 掌握磁场中的高斯定理、毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理、磁场对电流的作用。
2. 理解磁感应强度、霍尔效应、介质中的磁场。
3. 了解生物医学电磁传感器、超导体及其磁学特征、磁场的生物效应。

我们知道,磁铁和电流周围存在着磁场,磁场也是一种特殊物质,它具有能量,在空间也有一定的分布,磁现象的本质就是电荷的运动。本章首先介绍有关磁场的基本概念,然后介绍磁场对运动电荷和电流的作用。除此,本章我们还将讨论霍耳效应以及介质中的磁场等。最后简单介绍生物磁学在医学上的应用等有关知识。

第一节 磁场 磁感应强度

一、磁感应强度

在磁铁和电流周围空间存在着磁场(magnetic field)。为了描述磁场中各点的强弱和方向,我们引入磁感应强度(magnetic induction) \mathbf{B} 这个物理量,它是一个矢量。

由于磁场对运动电荷有力的作用,在磁场中放入正的运动电荷 q_0 ,根据该电荷的受力情况来定义磁场中各点磁感应强度 \mathbf{B} 的大小和方向。这一电荷称为运动试探电荷,简称运动电荷。运动电荷本身的磁场应该足够弱,以便使它不影响我们所研究的磁场分布。

当具有一定速度的运动电荷 q_0 通过磁场时,我们发现该电荷的受力情况与它的速度方向和磁感应强度方向的夹角有关。当运动电荷的速度方向与磁感应强度方向一致或相反时,运动电荷所受的力为零;当这两个方向相互垂直时,运动电荷所受的力最大,设为 \mathbf{F}_m 。 \mathbf{F}_m 的大小还与运动电荷的电量 q_0 和速度 v 成正比,但 \mathbf{F}_m 与乘积 $q_0 v$ 的比值是确定的,与 $q_0 v$ 的值无关。由此可见,比值 $F_m/q_0 v$ 是位置函数,它反映了磁场的性质,于是,我们用比值 $F_m/q_0 v$ 定义该点的磁感应强度,即

$$B = \frac{F_m}{q_0 v} \quad (11-1)$$

可见,比值 B 是一个与运动电荷的性质无关、仅与该点处磁场的性质有关的常量。对于磁场中不同的点,该比值一般是不同的。

在 SI 制中,磁感应强度 \mathbf{B} 的单位是特斯拉(T), $1\text{T} = 1\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。T 是一个比较大的单位,在实际工作中,经常使用较小的单位高斯(G), $1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$ 。

运动电荷在磁场中所受的力,总是与运动电荷速度 v 的方向和磁感应强度 \mathbf{B} 的方向所组成的平面相垂直,当 v 和 \mathbf{B} 互相垂直时, \mathbf{F}_m 、 v 和 \mathbf{B} 三者两两垂直,如图 11-1(a)所示。这时,磁感应强度 \mathbf{B} 的方向可用右手螺旋法则来确定,即将右手拇指与其余四指垂直,先将四指的指向与 \mathbf{F}_m 方向相同,再使其向 v 的方向弯曲,这时拇指的指向就是磁感应强度 \mathbf{B} 的方向,如图 11-1(b)所示。

二、磁通量 磁场中的高斯定理

为形象地描绘磁场的分布情况,我们在磁场中画一系列的曲线,使曲线上每一点的切线

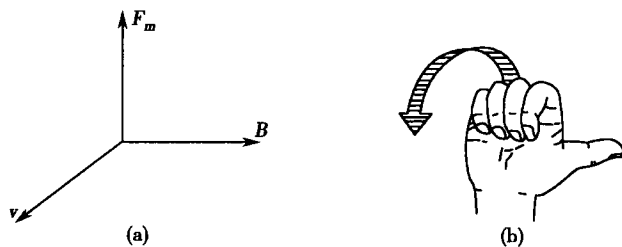


图 11-1 确定磁感应强度 B 的方向

方向与该点磁感应强度 B 的方向一致,这样的曲线叫做磁感应线(line of magnetic induction)。为了使磁感应线也能描述磁场的强弱,规定通过垂直磁场方向单位面积的磁感应线的数目等于该处的磁感应强度 B 的大小。这样,磁感应线密集的地方磁场就强,稀疏的地方磁场就弱。应该注意的是,磁感应线的方向不是试探电荷受力的方向。其次,磁感应线是一些闭合的曲线,不像电场线那样起于正电荷,终止于负电荷。

1. 磁通量 通过一给定曲面的磁感应线的总数称为通过该曲面的磁通量(magnetic flux),磁通量是标量,用 φ 表示。设 S 是磁场中的任意曲面,如图 11-2 所示,在曲面上取面积元 dS 。 dS 的法线方向与该点处磁感应强度 B 的方向之间的夹角为 θ ,于是,通过面积元 dS 的磁通量

$$d\varphi = B_n dS = B \cos \theta dS \quad (11-2)$$

式(11-2)中 B_n 为磁感应强度 B 在面积元 dS 法线方向上的分量,所以,通过有限曲面 S 的磁通量为

$$\varphi = \int d\varphi = \int_S B_n dS = \int_S B \cos \theta dS \quad (11-3)$$

在 SI 制中,磁通量的单位为韦伯(Wb), $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$ 。

2. 磁场中的高斯定理 由于磁感应线是一些闭合曲线,因此,穿入任一闭合曲面的磁感应线数(规定它为负的磁通量)必等于穿出该闭合曲面的磁感应线数(规定它为正的磁通量)。所以,通过任一闭合曲面的总磁通量为零,即

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B \cos \theta dS = 0 \quad (11-4)$$

式(11-4)称为磁场中的高斯定理,它反映了磁场是涡旋场的这一重要特性。

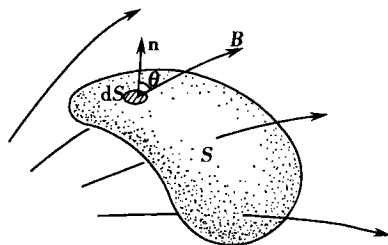


图 11-2 磁通量

第二节 电流的磁场

一、毕奥-萨伐尔定律

电流的周围空间存在着磁场,为了求任意形状的电流分布所产生的磁场,可以把电流分割成许多小段 $d\mathbf{l}$,每一小段中的电流强度为 I ,我们称 $I d\mathbf{l}$ 为电流元。它是矢量,其方向为 $d\mathbf{l}$ 中的电流强度方向。毕奥-萨伐尔定律(Biot-Savart's law)给出了电流元在空间某点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 。它指出,电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间某点 P 处产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元 $I d\mathbf{l}$ 的大小成正比,与电流元到 P 点的距离 r 的平方成反比,与 $I d\mathbf{l}$ 和 r 之间小于 π 的夹角 θ 的正弦成正

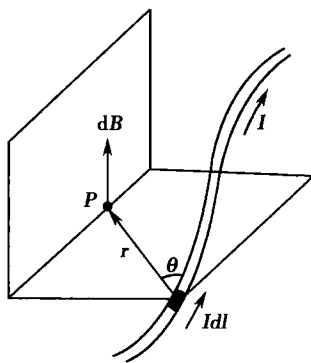


图 11-3 电流元的磁场



比,即

$$dB = K \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

上式中, K 为比例系数,其值与介质的种类和选用的单位有关。在 SI 制中 $K = \mu_0 / 4\pi$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ 称为真空中的磁导率(permeability of vacuum)。将 K 值代入上式得

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (11-5)$$

dB 的方向垂直于 Idl 和 r 所在的平面,由右手螺旋法则确定,即右手弯曲的四指由 Idl 的方向沿小于 π 的 θ 角转向 r 的方向,则拇指的指向就是 dB 方向。如图 11-3 所示。

二、毕奥-萨伐尔定律的应用

1. 长直电流的磁场 在图 11-4 所示的长直导线中,电流 I 由下向上流动,求这个电流周围磁场中 P 点的磁感应强度。在长直导线上任取一电流元 Idl ,由式(11-5)得,该电流元在 P 点所产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

dB 的方向垂直于 Idl 和 r 所确定的平面,向纸面里。并且长直导线上各电流元在 P 点所产生的磁感应强度的方向都相同,所以, P 点的磁感应强度就等于各电流元在该点所产生的磁感应强度的代数和。对上式积分得

$$B = \int_L dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (a)$$

上式在积分过程中有三个变量 r 、 Idl 和 θ ,为了使变量统一,从点 P 向直导线作垂线 PO ,设它的长度为 r_0 。若以 O 为原点,则电流元 Idl 到原点 O 的距离为 l ,由图可知

$$l = r_0 \cot(\pi - \theta) = -r_0 \cot \theta \quad (b)$$

取 l 的微分,得

$$dl = \frac{r_0 d\theta}{\sin^2 \theta} \quad (c)$$

$$r = \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r_0}{\sin \theta} \quad (d)$$

将式(c)和式(d)代入式(a),得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin \theta d\theta}{r_0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (11-6)$$

式中, θ_1 、 θ_2 分别是 A_1 、 A_2 端对 P 点的张角。

若导线为无限长,则 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$,由上式可以得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (11-7)$$

可见,长直电流周围的磁感应强度 B 与导线中的电流成正比,与距离成反比。磁感应线是一组围绕导线的同心圆。用右手握住直导线,使拇指的方向与电流方向一致,则四指的环绕方向就是磁感应强度的方向。

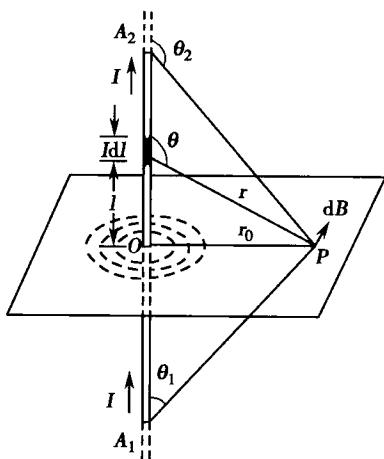


图 11-4 长直电流的磁场



对于有限长的直导线,在 $r_0 \ll l$ 的范围内,式(11-7)仍然成立。

2. 圆电流的磁场 在图 11-5 中,圆线圈的半径为 R ,其中的电流强度为 I ,它的周围也存在着磁场。现在求线圈轴线上任一点 P 处的磁感应强度。设圆电流的中心为 O , P 点距 O 点的距离为 r_0 。圆电流上任一点 A 处的电流元 Idl 在 P 点产生的磁感应强度为 $d\mathbf{B}$,由于 Idl 与 \mathbf{r} 互相垂直,根据毕奥-萨伐尔定律得

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

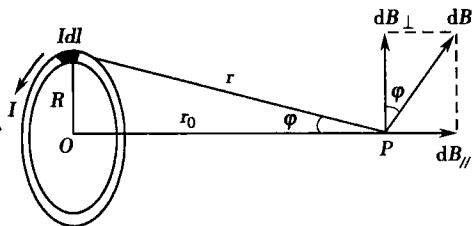


图 11-5 圆电流的磁场

由于轴对称性, P 点的磁感应强度在垂直于轴线方向的分量 dB_{\perp} 互相抵消,因此,总磁感应强度将沿轴线方向,其大小等于 $dB_{\parallel} = dB \sin \varphi$ 的代数和,即

$$B = \oint dB_{\parallel} = \oint dB \sin \varphi = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \oint dl$$

因为 $\sin \varphi = \frac{R}{r}$, $\oint dl = 2\pi R$, 所以,

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} \quad (11-8)$$

考虑到 $r^2 = (r_0^2 + R^2)$ 和圆线圈的面积 $S = \pi R^2$, 上式可写成

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(r_0^2 + R^2)^{3/2}} \quad (11-9)$$

可见, r_0 越大, B 越小, 即距圆电流中心处磁场愈弱。

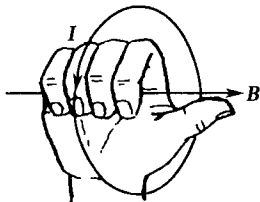


图 11-6 圆电流轴线上的磁场方向

圆电流轴线上的磁感应强度方向也可以用右手螺旋定则来判断,即用右手弯曲的四指代表圆线圈中的电流方向,则伸直的拇指的指向就是轴线上 B 的方向,如图 11-6 所示。

在圆心处, $r=0$, 磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (11-10)$$

当 $r \gg R$, $r_0 \approx r$ 磁感应强度近似为

$$B = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3} \quad (11-11)$$

3. 直螺线管电流的磁场 绕成螺线管形的线圈叫做螺线管。密绕的载流直螺线管如图 11-7(a)所示,下面计算其轴线上任一点 P 处磁感应强度。

图 11-7(b)是半径为 R , 载有电流 I 的密绕直螺线管的截面图。设 dl 段在 P 点产生的磁感应强度为 $d\mathbf{B}$, 螺线管单位长度上的匝数为 n , 则 dl 段相当一个电流强度为 $nIdl$ 的圆电流。根据式(11-8),它在 P 点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} nIdl \quad (a)$$

从图 11-7(b)中可以看出, $l = R \cot \beta$

对 l 微分得

$$dl = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \quad (b)$$

又因为

$$r = \frac{R}{\sin \beta} \quad (c)$$

将式(b)和式(c)代入式(a)得

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta d\beta \quad (d)$$



对(d)式从 A_1 端到 A_2 端积分,得

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0}{2} n \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (11-12)$$

P 点磁感应强度的方向沿着轴线向右。

若螺线管为无限长, $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$, 这时有

$$B = \mu_0 n I \quad (11-13)$$

可见, B 的大小与考察点的位置无关, 这表明密绕无限长螺线管轴线上磁场是均匀的。理论分析指出, 密绕螺线管中磁感应线泄露管外很少, 其内部空间的磁场都是均匀的。

在长直螺线管任一端的轴线上, 如图 11-7(b) 中的 A_1 点, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0$ 将其代入式(11-12)得

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (11-14)$$

说明在长直螺线管端点轴线上的磁感应强度为管内的一半。对于有限长螺线管, 当 $R \ll l$ 时, 式(11-13)、(11-14)也近似适用。

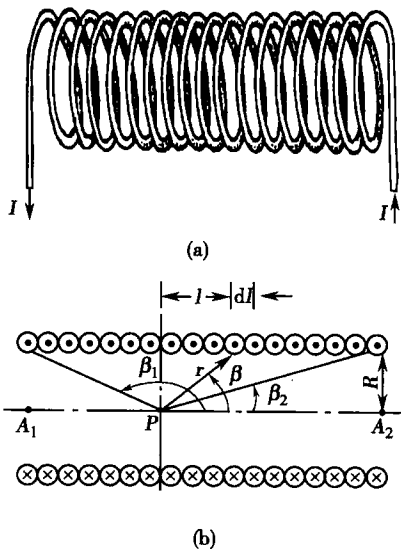


图 11-7 载流直螺线管的磁场

第三节 安培环路定律

图 11-8 是垂直于长直导线的平面 S , 电流 I 与该平面相交于点 O 。在此平面内任取一包围电流的闭合曲线 L , 设 L 的绕行方向和电流方向成右手螺旋关系。 L 上任一点 A 的磁感应强度 $B = \mu_0 I / 2\pi r$ 。式中 r 为 A 点到电流 I 的距离, B 的方向为通过 A 点的磁感应线(图中的虚线)的切线方向, B 与过 A 点所取的线元 dl 的夹角为 θ 。

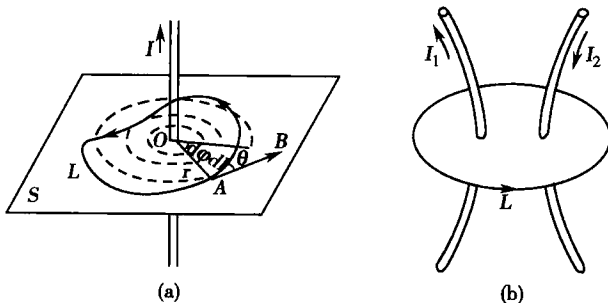


图 11-8 安培环路定律

由图可见, $dl \cos \theta = r d\varphi$, 所以 B 沿闭合曲线 L 的线积分为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos \theta = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I \quad (11-15)$$

积分的结果仅和包围在闭合曲线内的电流有关, 而和所选的闭合曲线的形状无关。上式是从无限长直电流的磁场推导出来的, 但它对任意形状电流所产生的磁场都是成立的, 即使所取的闭合曲线不在一个平面内, 上式也同样适用。如果所取的闭合曲线包含有多个电流, 式(11-15)可写为



$$\oint_L B \cos \theta dl = \mu_0 \sum I \quad (11-16)$$

上式表明,在电流周围的磁场中,磁感应强度 B 沿任何闭合曲线的线积分与通过该闭合曲线内电流强度的代数和成正比。这一结论叫做真空中的安培环路定律(Ampere circuital theorem)。

电流的正、负可按下列方法确定,如果电流的方向与积分回路的绕行方向符合右手螺旋关系时,电流为正,如图 11-8(b)中 I_1 ;反之为负,如图 11-8(b)中的 I_2 ;如果闭合曲线中不包含电流或包含等值反向电流时,式(11-16)右边为零。

下面求长直螺线管内的磁场。图 11-9 是一紧密缠绕的长直螺线管,通过的电流是 I ,由于螺线管很长,它内部中间部分的磁场是均匀的方向和管的轴线平行。管外的磁场很弱,可忽略。在螺线管内选一点 P ,过 P 点做一矩形封闭回路 $abcd$,对该回路应用安培环路定律得

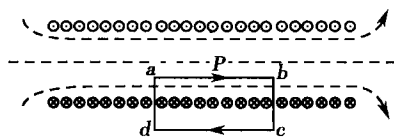


图 11-9 长直螺线管内的磁场

$$\oint B \cos \theta dl = \int_a^b B \cos \theta dl + \int_b^c B \cos \theta dl + \int_c^d B \cos \theta dl + \int_d^a B \cos \theta dl = \mu_0 \sum I$$

由于 cd 在螺线管外, $B=0$, 所以 $\int_c^d B \cos \theta dl = 0$; bc 和 da 两条线上各对应点上 B 相同,而积分路径相反,所以 $\int_b^c B \cos \theta dl + \int_d^a B \cos \theta dl = 0$ 。 ab 在螺线管内,管内为均匀磁场,且 B 的方向自 a 到 b , 故

$$\oint B \cos \theta dl = \int_a^b B dl = B \overline{ab} = \mu_0 \sum I = \mu_0 \overline{ab} n I \quad (11-17)$$

式(11-17)是从安培环路定律得出的,它和用毕奥-萨伐尔定律得出的结论完全相同,但方法较简便,所以在有些情况下常用安培环路定律来求电流的磁场。

第四节 磁场对电流的作用

一、磁场对运动电荷的作用

电荷在磁场中运动会受到磁场力的作用,这个力称为洛伦兹力(Lorentz force)。电荷的运动速度与磁场方向垂直时洛伦兹力最大,与磁场方向平行时洛伦兹力为零。在一般情况下,电荷的运动速度 v 与磁感应强度 B 之间可以成任意角度,如图 11-10 所示。这时可以将 v 分解成平行于 B 的分量 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 和垂直于 B 的分量 $v_{\perp} = v \sin \theta$ 两部分。由于与 v_{\parallel} 方向的电荷不受力的作用,因此运动电荷在磁场中所受的力只由分量 v_{\perp} 决定。由式(11-1)可以得出运动电荷在磁场中所受洛伦兹力的大小为

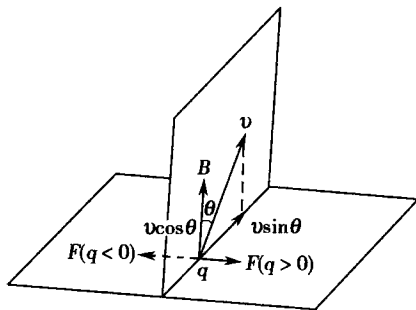


图 11-10 运动电荷在磁场中受力

$$F = qv_{\perp} B = qvB \sin \theta \quad (11-18)$$

洛伦兹力的方向可以由右手螺旋法则来判定,即将右手四指的指向由 v 的方向沿着小于 π 的一侧向 B 的方向弯曲,则竖直的拇指的指向就是 F 的方向。如果是负电荷,洛伦兹力的方向和上述方向相反。



二、磁场对载流导线的作用

导线中的电流是由大量电子作定向运动形成的,这样的导线称为载流导线。当载流导线处于磁场中时,它所受的磁场力就是导线中所有电子所受的洛伦兹力的总和。在载流导线上任取一电流元 Idl , 电流元所在处的磁感应强度为 \mathbf{B} , \mathbf{B} 与 Idl 的夹角为 θ 。设导线的横截面积为 S , 单位体积内的电荷数为 n , 则电流元中电荷的总数为 $nSdl$ 。因为每个电荷所受的洛伦兹力 $f=qvB\sin\theta$, 所以电流元受到的合力大小为 $dF=nSdl \cdot qvB\sin\theta$ 但通过导线的电流强度 $I=nqvS$, 故上式可以写成

$$dF = IB\sin\theta dl \quad (11-19)$$

dF 就是电流元 Idl 在磁场中所受的力, 称为安培力, 上式也叫安培公式。安培力的方向也可用右手螺旋法则确定, 即右手的四指由电流强度 I 的方向沿着小于 π 的一侧向磁感应强度 \mathbf{B} 的方向弯曲, 这时拇指的指向就是安培力 $d\mathbf{F}$ 的方向。图 11-11 中, $d\mathbf{F}$ 的方向垂直纸面向外。

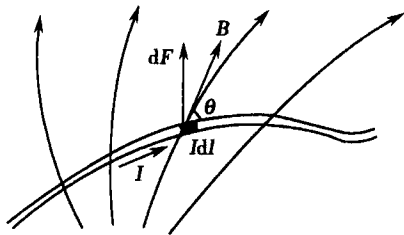


图 11-11 磁场对载流导线的作用

长度为 l 的载流导线在磁场中所受的力, 等于各个电流元所受安培力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int IB\sin\theta dl \quad (11-20)$$

三、载流线圈所受磁力矩

将一矩形线圈 $abcd$ 放在匀强磁场 \mathbf{B} 中, 已知线圈的两个边长分别为 l_1 和 l_2 , 其中电流强度为 I , 线圈平面与 \mathbf{B} 之间的夹角为 θ , 如图 11-12(a) 所示。边长 ab 和 cd 两边所受的安培力分别为

$$F_1 = Il_1 B \sin(\pi - \theta) = Il_1 B \sin\theta$$

$$F'_1 = Il_1 B \sin\theta$$

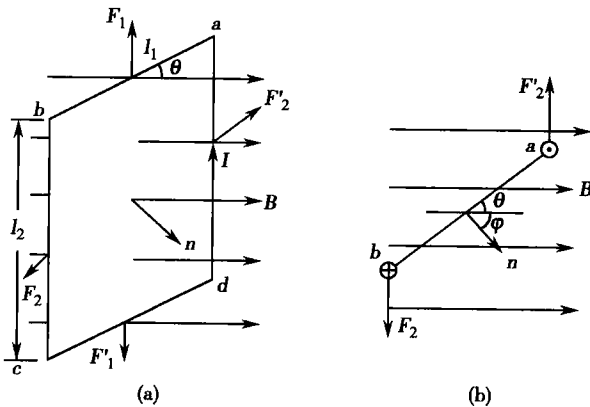


图 11-12 磁场中的载流线圈

即 $F_1 = F'_1$, 但它们的方向相反, 且作用在一条直线上, 所以这两个力互相抵消。

边长 bc 和 da 两边所受的安培力分别为

$$F_2 = IBl_2$$

$$F'_2 = IBl_2$$



可见 $F_2 = F_2'$, 它们的方向相反, 但不作用在一条直线上, 形成一对力偶, 如图 11-12(b) 所示。由于力臂为 $l_1 \cos \theta$, 因此磁场作用在线圈上的力矩为

$$M = IB l_1 l_2 \cos \theta$$

或

$$M = IB S \cos \theta \quad (11-21)$$

式(11-21)中, $S = l_1 l_2$ 表示线圈平面的面积, M 称为载流线圈的磁力矩。

我们用线圈的法线方向 n 来描述线圈的取向, 它的方向与线圈的环绕方向有关。让右手弯曲的四指与线圈中电流的环绕方向一致, 这时其拇指的指向就定义为线圈法线的正方向。 n 与 B 的夹角用 φ 表示, 显然, $\varphi + \theta = \pi/2$, 式(11-21)可以改写成

$$M = IB S \sin \varphi$$

如果线圈有 N 匝, 则

$$M = NIB S \sin \varphi$$

或

$$M = P_m B \sin \varphi \quad (11-22)$$

式中, $P_m = NIS$, 称为载流线圈的磁矩(magnetic moment)。由于磁矩 P_m 仅由载流线圈本身的条件 N 、 I 和 S 决定, 与外磁场的情况无关, 因此它是描述载流线圈本身特性的物理量。磁矩 P_m 是矢量, 它的方向就是载流线圈法线的方向。单位是安培·米²($A \cdot m^2$)。

式(11-22)虽然是由矩形载流线圈推导出来的, 但可以证明它也适用于处在均匀磁场中的任何形状的平面载流线圈。

在图 11-13 中, 图(a)表示一处在均匀磁场中且与 B 的夹角为 θ 的载流线圈, 图(b)表示一处在匀强电场中且与 E 的夹角为 θ 的电偶极子。如果没有其他外力的作用, 它们在磁场或电场力矩的作用下, 最终都转到与磁场或电场的方向一致。

可见载流线圈在磁场中的表现与电偶极子在电场中的表现非常类似, 所以也称它为磁偶极子(magnetic dipole)。

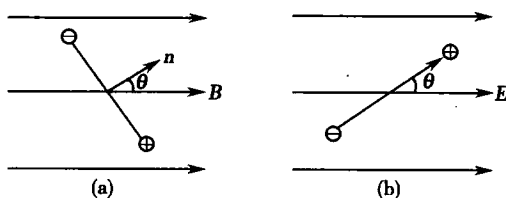


图 11-13 载流线圈和电偶极子的对比

四、霍尔效应

1. 霍尔效应 在均匀磁场 B 中放入通有电流 I 的导体或半导体薄片, 使薄片平面垂直于磁场方向, 这时在薄片的两侧产生一个电势差, 这种现象叫霍尔效应(Hall effect), 产生的电势差叫做霍尔电势差。

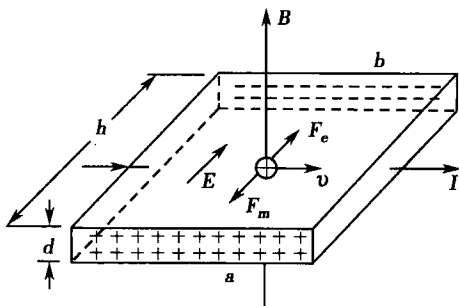


图 11-14 霍尔效应

下面我们来讨论霍尔电势差的大小。在图 11-14 中, 设薄片中的载流子的电量为 $+q$, 漂移速度为 v , 方向与电流方向一致, 磁场方向与薄片垂直由下至上。这时, 电荷 $+q$ 受到 $F_m = qvB$ 的洛伦兹力, 因此正电荷向前表面 a 聚集, 负电荷向后表面 b 聚集, 形成一个方向由前至后的电场 E , 并阻止载流子的继续移动。随着两侧电荷的积累, 电场逐渐加强, 当电场力与洛伦兹力相等达到平衡时, 则有

$$Eq = qvB$$



即薄片形成稳定电场的场强为

$$E = vB \quad (11-23)$$

设薄片的宽度为 h , 薄片内的电场可视为均匀电场, 由电势梯度与电场强度的关系可得

$$E = \frac{V_a - V_b}{h} = vB$$

或

$$U_{ab} = V_a - V_b = vBh$$

由于电流强度为 $I = JS = nqvhd$, 式中 J 为电流密度, n 为单位体积内的载流子数, d 表示薄片的厚度, 所以 $v = I/nqhd$, 则

$$U_{ab} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d}$$

令 $K = \frac{1}{nq}$, 上式变为

$$U_{ab} = K \cdot \frac{IB}{d} \quad (11-24)$$

式(11-24)为霍尔电势差的计算公式, 式中 K 称为霍尔系数, 它与薄片的材料有关, 材料的载流子密度 n 越大, K 就越小。为得到较大的霍尔系数, 常采用载流子浓度较低的半导体材料。

霍尔效应广泛应用于半导体材料的测试和研究上, 还可利用霍尔效应做成霍尔元件来测量磁场, 测量直流和交流电路的电流和功率等。

2. 量子霍尔效应 根据式(11-24)

可知, 对于给定的薄片, 通以一定的电流 I , 霍尔电势差 U_{ab} 将随磁场 B 线性增加。但是, 在低温和强磁场的情况下, 对于半导体材料的霍尔效应而言, U_{ab} 和 B 的对比曲线中有一系列的稳定状态, 它不是一条直线, 而是台阶式, 如图 11-15 所示。出现台阶处的电阻与材料的性质无关, 而是由一个常数 (h/e^2) 除以不同的整数, 于是, 霍尔电阻被定义为

$$R_H = \frac{U_{ab}}{I} = \frac{h/e^2}{n} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(11-25)

式(11-25)中 n 是整数, 令 $R_K = \frac{h}{e^2}$, 称为冯·克利青常数(Klaus von Klitzing constant), 该常数只与普朗克常数 h 和基本电荷 e 有关。

上述现象是德国物理学家冯·克利青(Klaus von Klitzing)于1980年发现, 称为量子霍尔效应(quantum Hall effect), 他也因此获得1985年诺贝尔物理学奖。

由于冯·克利青常数在测量中, 其测定值可以精确到 10^{-16} , 所以量子霍尔效应被用来定义电阻的标准。1990年1月欧姆被定义了, 所以 R_K 的准确数值是, $R_K = 25\,812.807\,\Omega$ 。

美国贝尔实验室的霍斯特·施特默(Horst L. Stormer)、普林斯顿大学的美籍华人崔琦, 在量子霍尔效应的研究中采用更低的温度更强的磁场, 发现由式(11-25)给出的霍尔电阻 R_H 中, n 可以被一些连续的分数取代, 这种现象称为分数量子霍尔效应(fractional quantum Hall effect)。美国斯坦福大学的罗伯特·劳克林(Robert B. Laughlin)对分数量子霍尔效应提出了理论解释。他认为, 在量子霍尔效应的情况下, 电子体系凝聚成具有分数电荷

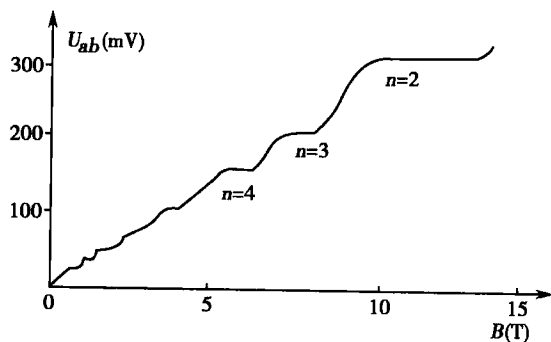


图 11-15 霍尔电势差和磁场的关系曲线



激发状态的新型量子流体。他还证明,在基态和激发态之间有一能隙,激发态内存在分数电荷的“准粒子”。以上三人因此共获 1998 年诺贝尔物理学奖。

量子霍尔效应是一个对基本物理常数有重大意义的固体量子效应,是 20 世纪以来凝聚态物理学和有关低温、超导、真空、半导体工艺、强磁场等综合发展的成果。由于 U_{oh} 、 I 、 B 等都是宏观可测的物理量,因此量子霍尔效应是一种宏观可测的量子效应。

五、质谱仪和回旋加速器

1. 质谱仪 (mass spectrometer) 利用质谱仪可以分离质量相差只有 1 个原子质量单位 (u) 的轻离子,用它来测量质量的准确度可以达到千万分之一,因此被广泛地应用于实验室以及医学研究上。质谱仪的基本结构如图 11-16 所示。待分析的离子经过电场加速后进入速度选择器,速度选择器由磁场 B_1 和与它互相垂直的电场 E 所组成。带电粒子在通过时受到的洛伦兹力为 $B_1 qv$,受到的电场力为 qE 。当两力相等而方向相反时,即

$$B_1 qv = qE \text{ 或 } v = \frac{E}{B_1}$$

粒子不受力的作用,直线通过狭缝。如果粒子的速度大于或小于 E/B_1 ,则它会受到力的作用向旁偏转,不能通过狭缝。所有通过狭缝的离子都带同一种电荷并且具有相同的速度。当这些离子垂直进入另一个磁场,在洛伦兹力作用下作圆周运动。圆周运动的半径为

$$r = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B_2} = \frac{mE}{qB_1 B_2}$$

根据圆半径 r 的不同,可识别同类离子的

各种同位素, $m = \frac{rqB_1 B_2}{E}$

半径越大,同位素的质量越大。式中的 v 和 B_1 都是不变的量,因此 r 和粒子的质量电荷比 m/q 成比例。在离子的电荷相同时, r 与 m 成正比。这些离子在磁场中运动半周后落在照相底版上,根据离子在底版上曝光的位置和浓淡程度,就可以测定和比较不同离子的质量数和丰富度。

2. 回旋加速器 (cyclotron) 回旋加速器的应用也非常广泛,它利用电场和磁场诱导粒子并使之加速,从而形成一高速的带电粒子束。回旋加速器的基本结构如图 11-17 所示。回旋加速器的主要部分是一对金属制成的空盒,两盒相对应的直径边缘是相互平行的,但隔开一小窄缝,离子源位于小窄缝的中心附近。两盒接至一高频的交流电源上,所以两盒缝隙之间的电场不断地交替变化。整个容器垂直放置在一个强大的均匀磁场中。设有一电荷 $+q$ 、质量为 m 的离子从离子源 S 射出。此时 D_1 为正电位的瞬间,这一离子被盒间的电场加速,并以 v_1 的速度进入 D_2 内部的无电场区域。因为这一离子的运动与磁场垂直,所以这一离子将作圆周运动,其半径为 $r_1 = \frac{mv_1}{Bq}$ 。如果离子走完一个半圆所需

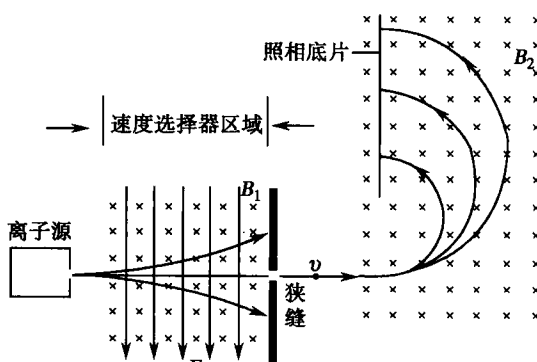


图 11-16 质谱仪

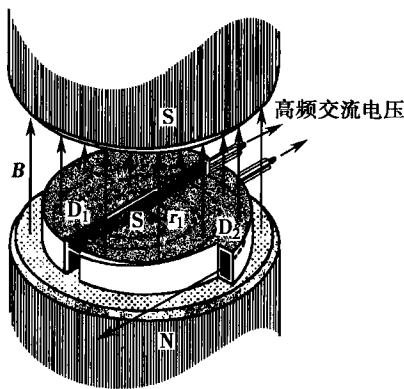


图 11-17 回旋加速器



的时间内,电场反向,即它的方向指向 D_1 ,当这一离子再次经过 D 盒间小窄缝时又将被加速,进入 D_1 时就具有较大速度 v_2 ,并以较大的半径 $r_2 = \frac{mv_2}{Bq}$ 走一半圆,然后再进入缝隙中。由于离子的角速 $\omega = B\left(\frac{q}{m}\right)$,所以离子回旋的角速度与离子的速度和它运行圆的半径无关,而只依赖于磁感应强度 B 和这一离子的荷质比 (q/m) 。所以离子的运动只要与交变电场保持同步,运动若干周后,被加速的离子的速度就可以达到很高。

六、电磁泵和电磁流量计

1. 电磁泵 电磁泵是一种利用作用在导电液体上的磁力来输送导电液体的装置。它的结构原理如图 11-18 所示。在液体中通过电流,使电流的方向垂直于磁感应强度 B ,则液体受到一个沿管子方向的推力 $F(F = jBabl)$,使它向前流动。这种泵在医学上常用于泵运血液或其他电解溶液。它的特点是没有任何运动的部件,不会使血液中的细胞受到损害。另外它是全部密封的,减少了污染的机会。在人工心肺机和人工肾装置中常采用电磁泵来输送液体。

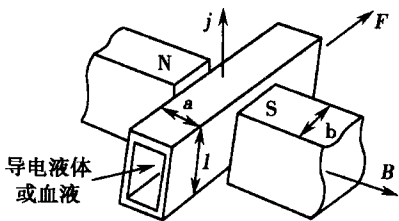


图 11-18 电磁泵

2. 电磁流量计 用电磁感应原理制成的电磁流量计 (electromagnetic flowmeter, EMF) 是一种测量血液流动速度的仪器,其原理如图 11-19 所示。

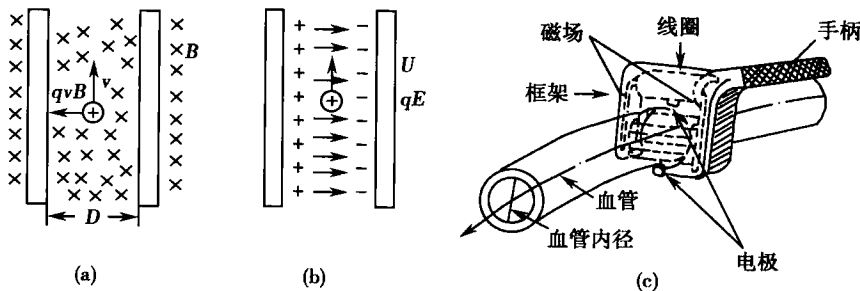


图 11-19 电磁流量

设血液中的带电粒子以速度 v 在直径为 D 的血管中运动,它的流向与外加磁场 B 互相垂直。血流中带正电 q 的粒子受到一个大小为 qvB 的洛伦兹力,方向向左。带负电的粒子,则受到向右的洛伦兹力。这样正负粒子分别积聚在两侧的管壁上,其间形成电势差 U 和电场 E , q 所受电场力为 Eq ,两力平衡时则有

$$qvB = Eq$$

假设正负电荷均匀分布在管壁内的两侧,其间的电场可以看成是均匀电场,则

$$E = \frac{U}{D}$$

将上述两式合并得

$$v = \frac{U}{DB} \quad (11-26)$$

式(11-26)说明,血管中的血流速度 v 和血管内两壁间的电势 U 成正比。这种电磁流量计主要供心脏和动脉手术时测量血流速度使用。



七、磁流体发电

磁流体是由强磁性粒子、基液以及界面活性剂三者混合而成的一种稳定的胶状溶液。磁流体在静态时无磁性吸引力,只有在外加磁场作用时才表现出磁性。

传统的发电方法是利用火力、水力来带动发电机,发电机是利用线圈对磁场转动,不断地切割磁力线,在线圈中产生感生电流来发电。磁流体发电则是将带有磁流体的等离子体(主要由电子和正离子组成)在高温下以极高的速度横切喷射到具有强磁场的管道中去,等离子体中高速运动的正、负电荷在磁场中受到洛伦兹力的作用分别向两极偏移,于是在两极间产生电压。在磁流体流经的管道上,安装电极并用导线将电压接入电路中就可使用了。磁流体发电的原理如图 11-20 所示。

利用磁流体发电的好处主要有两点:第一,磁流体发电产生的环境污染少,这是因为它使用的一些添加材料可以和硫化合,生成硫酸钾而被回收,避免了把硫排放到空气中。第二,可以大大提高发电效率,普通火力发电燃烧燃料释放的能量中只有 20% 变成电能;而磁流体发电的效率可达 50%。另外,在磁流体发电中,提高发电机的功率取决于带电流体的喷射速度和磁场强度,只要速度足够大,磁场足够强就可使发电机功率达到 10^7 kW,以满足大用电量的需求。

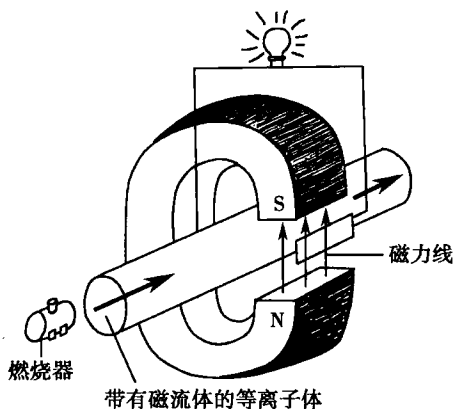


图 11-20 磁流体发电的原理

第五节 磁 介 质

前面我们讨论电流的磁场是指电流在真空(或空气)中而言,如果电流在其他介质中,情况又有所不同。在磁场作用下能发生变化,并能反过来影响磁场的物质叫做磁介质(magnetic substance)。实际上所有的物质在磁场作用下都会或多或少地发生变化,并能影响原磁场,因此,都是磁介质。

一、介质中的磁场

原来没有磁性的物体在磁场中获得磁性的过程,称为磁化(magnetization)。处于磁场中的磁介质将被磁场磁化,从而产生一附加磁场 B' 。由于附加磁场的存在,介质中的磁感应强度 B 应等于真空中的磁感应强度 B_0 与附加磁场 B' 的矢量和。

$$B = B_0 + B' \quad (11-27)$$

不同的磁介质在磁场中磁化的程度也不一样,我们用比值 B/B_0 来表征介质的磁化程度,即

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad \text{或} \quad B = \mu_r B_0 \quad (11-28)$$

μ_r 称为介质的相对磁导率(relative permeability),它是一个无量纲的纯数,其大小由磁介质的性质决定。表 11-1 中列出了一些物质的相对磁导率。式(11-28)表明,磁介质被磁化后,磁介质中的磁感应强度是真空中磁感应强度的 μ_r 倍。真空中 $\mu_r = 1$ 。

在充满相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质中,毕奥-萨伐尔定律可表示为



$$dB = \mu_r dB_0 = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

或

$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (11-29)$$

上式中 $\mu = \mu_r \mu_0$, 称为介质的绝对磁导率, 简称磁导率(permeability)。它与 μ_0 有相同的单位都是 $T \cdot m \cdot A^{-1}$ 。

表 11-1 一些物质的相对磁导率 μ_r

分类	物质	μ_r
顺磁质	铝	$1+0.21 \times 10^{-4}$
	氧(标准状况)	$1+17.9 \times 10^{-7}$
	空气(标准状况)	$1+3.6 \times 10^{-7}$
	铂	$1+2.9 \times 10^{-4}$
抗磁质	铋	$1-7.0 \times 10^{-5}$
	铜	$1-0.94 \times 10^{-5}$
	水	$1-0.88 \times 10^{-5}$
	氢(标准状况)	$1-0.21 \times 10^{-6}$
铁磁质	铸钢	500~2200
	硅钢	7000(最大值)
	纯铁(99.95%)	1800(最大值)
	坡莫合金	100 000(最大值)

由式(11-29)可以看出, 当起磁电流 I 为已知时, 介质中的磁感应强度与介质有关。如果将式(11-29)改写为

$$d\left(\frac{B}{\mu}\right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

令 $\frac{B}{\mu} = \mathbf{H}$, \mathbf{H} 为新引入的物理量, 它也是矢量, 称为磁场强度(magnetic field intensity), 这样, 上式就变为

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (11-30)$$

式(11-30)说明, 当起磁电流 I 给定后, 介质中各处的磁场就确定了。 \mathbf{H} 与介质的种类无关。在各向同性的介质中, \mathbf{H} 与 \mathbf{B} 的方向相同。用 \mathbf{H} 来处理有介质存在时的磁场, 会使问题变得简单得多。

二、磁介质的分类

从微观上看, 组成物质的分子或原子中的任何一个电子, 都同时参与环绕原子核的轨道运动及本身的自旋, 两种运动都产生磁效应。如果把分子或原子看成一个整体, 内部各电子对外界产生磁效应的总和可用一个等效的圆电流来表示, 称为分子电流, 相应的磁矩称为分子磁矩。从宏观上看一切物质都具有磁性, 都是磁介质。我们可用相对磁导率 μ_r 来描述物质的磁性, μ_r 的大小决定了磁介质在磁场中磁化的不同效果。据此, 磁介质可分为顺磁质、抗磁质、铁磁质三类。

1. 顺磁质(paramagnetic substance) 在顺磁质中, 分子内部各电子的磁矩不完全抵消, 具有分子磁矩。当这类磁介质处在外磁场 \mathbf{B}_0 中时, 各分子磁矩受到磁力矩的作用而转向外磁场方向, 形成一个与外磁场方向相同的附加磁场 \mathbf{B}' , 结果使 $\mathbf{B} > \mathbf{B}_0$, $\mu_r > 1$ 。绝大部分



物质属于这一类,如氧、锰、铬等。顺磁质具有的磁性称为顺磁性(paramagnetism)。

2. 抗磁质(diamagnetic substance) 抗磁质的分子内部各电子的磁矩都互相抵消,分子磁矩为零。当这类磁介质处在外磁场 B_0 中时,每个电子除绕轨道运动和自旋外,还要附加以外磁场方向为轴线的进动。电子的进动也相当于一个等效的圆电流,其磁矩的方向与外磁场的方向相反,产生的附加磁场 B' 也与外磁场的方向相反,结果使 $B < B_0$, $\mu_r < 1$ 。如铜、铋、铊及惰性气体。抗磁质具有的磁性称为抗磁性(diamagnetism)。

3. 铁磁质(ferromagnetic substance) 铁磁质内部存在许多自发的饱和磁化的小区域称为“磁畴”。铁磁质在外磁场 B_0 的作用下“磁畴”都转向外磁场的方向,磁化达到饱和,从而产生很强的与外磁场方向一致的附加磁场 B' ,因此 $B \gg B_0$, $\mu_r \gg 1$ 。如铁、镍、钴及某些合金。铁磁质所具有的磁性称为铁磁性(ferromagnetism)。

构成生物体的各种生物大分子也都具有磁性。绝大多数生物大分子是各向异性的抗磁质,少数为顺磁性(如含 Fe 的血红蛋白、肌红蛋白和铁蛋白,生物体中的自由基等),只有极少数呈现铁磁性。外加磁场对生物磁性有一定影响,这可能对一些生物功能和生命现象发生作用。

三、超导体及其磁学特性

1911 年荷兰物理学家卡曼林-昂尼斯(Onnes)在检测水银的低温电阻时,发现在 4.2K 时电阻突然消失,这时用磁铁穿过水银环路,使环路感应出电流,电流就会长时间持续流动不息,这现象称为超导现象(superconductivity),这是低温下的奇异特性。昂尼斯因发现超导现象以及将被称为永久气体的氦液化成功,于 1913 年获诺贝尔物理学奖。但是七十多年来,由于超导材料的临界温度、临界磁场和临界电流都太低,因而没有得到应用。至 1986 年,瑞士物理学家缪勒(Müller)和德国的物理学家柏诺兹(Bednerz)发现钡铜氧化物在 30K 时呈超导性,这一新突破使他们获 1987 年诺贝尔物理学奖,同时导致全世界范围掀起探索高温超导热潮,并且迅猛发展。在超导研究方面,中国科学家们做出了许多杰出成绩,举世瞩目。1987 年 2 月,中国科学院物理所宣布赵忠贤等人获得转变中点温度为 92.8K,出现零电阻温度为 78.5K 的超导材料,闯进了在液氮温区实现超导,使我国的超导研究处于世界领先地位。目前超导材料的最高转换温度已达到 123K。

1. 超导体 我们已经知道,通常物质的电阻与温度有关。随着温度的降低,金属的导电率会变大。昂尼斯在研究物质的电阻随温度变化关系的实验中,发现水银在 4.2K 低温下,电阻突然消失(即电阻等于零)。多次反复的实验展示了图 11-21 的结果,这个图的横坐标是温度(K),纵坐标是在该温度下的水银电阻与 0°C 水银电阻之比。由图可以看出,水银在 4.2K 附近进入零电阻的新物态。由于物质在低温下电阻突然消失,就意味着具有超乎寻常的导电能力,因而人们把物质的温度下降到某一定值时,该物质的电阻完全消失这一现象叫做超导电现象。物质失去电阻的性质叫超导电性。凡是具有超导电性的物质叫做超导体。当超导体显示出超导电性时,我们就说它处于超导态。超导体开始失去电阻时的温度叫做超导转变温度或临界温度,用符号 T_c 表示。实际上,由正常态向超导态的过渡,是在一个温度间隔内完成的,我们把这个温度间隔叫做转变宽度,用符号 ΔT_c 表示。不同性质的材料,它们的转变宽度是不一样的。在一般情况下,纯净的单晶样品,其转变宽度很小;而多晶体或含有机应变和杂质的样品,其转变宽度较大。如图 11-22 所示,曲线 1 是纯锡单晶,曲线 2 是纯锡多晶,曲线 3 是不纯的锡多晶,由于转变宽度的存在,通常我们把样品电阻下降到正常态电阻值一半时所处的温度定义为 T_c 。

哪些物质可能成为超导体呢?根据已经发现的超导体可以概述两条:①超导金属元素位于门捷列夫周期表的中部,而一价金属、铁磁质和抗铁磁质都不是超导体。②许多化合物或合金也具有超导性,一般说来,它们的转变温度较高。

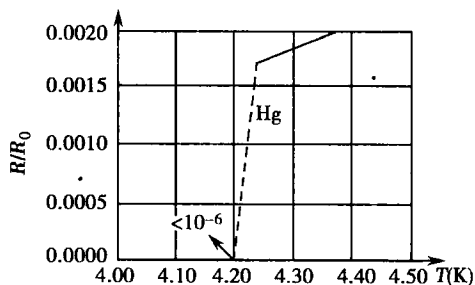


图 11-21 水银电阻随温度的变化

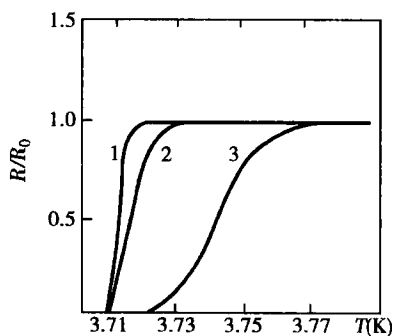


图 11-22 不同样品的超导转变温度

超导态金属既然电阻为零,因此当恒定直流电流通过超导态金属时,金属两端不产生电势差,导体内电场为零,因而也不产生功耗。用超导金属做成圆环,并通过电磁感应在环中激起电流,这种电流持续时间可达数年之久。常温下,超导体的导电性比普通金属差。

2. 迈斯纳效应 超导体不仅在超导态时具有零电阻的特性,而且还具有抗磁性,外界磁场不能渗入超导体内。这一现象是迈斯纳(Meissner)于 1933 年发现的,故被称为迈斯纳效应(Meissner effect)。迈斯纳对球形导体(单晶锡)的磁场分布进行实验测量发现,对于超导体来说,不论是先给磁体加热成为超导体,后加外磁场,还是先加外磁场,后冷却成为超导体,其结果都是超导体内部的磁场为零。

要锡球转变成了超导态,在锡球周围的磁场都会发生突然变化,磁力线被立即排斥到锡球之



第六节 磁场的生物效应

人类和动物能够感受到各种物理刺激,例如声、光、电、热等。但能否感知到磁的存在呢?生命活动中伴随有生物电的出现,因此必然也有生物磁场出现。生物磁场如何测定;心磁图、脑磁图、肺磁图是如何形成的,有什么临床意义;磁场的生物效应对生物体有哪些影响?这些问题就是我们这一节所要讨论的内容。

一、生物磁现象和生物磁场的测定

1. 生物磁现象 地球是一个大磁体,在地球上的各种生物无不受其影响。研究表明某些鸟类、海豚、鱼、蜗牛和某些细菌就是依据地磁场来定向的。

人体的许多功能和活动都是电荷的运动再通过神经系统的活动来传导的。所以,伴随着生物电现象的同时必然有生物磁现象的产生。生物磁信号非常微弱,心磁场约为 10^{-11} T;脑磁场约为 10^{-12} T 等。产生生物磁场的另一个原因是,某些铁磁性物质被吸入肺脏或随食物进入胃肠并沉积在里面,当这些磁性物质被地磁场或外界磁场磁化后,它们就成为小磁石残留在体内,从而也在体外产生一定的生物磁场。此外,在外界因素的刺激下,生物机体的某些部位可产生一定的诱发电位,同时产生一定的诱发磁场,如 $10\mu\text{V}$ 的诱发脑电位可引起 10^{-13} T 的诱发脑磁场,这种诱发的磁信号也是生物磁场。

2. 生物磁场的测定 地球磁场的强度约为 10^{-5} T,城市中的各种磁噪声也十分严重,强度可达 $10^{-8} \sim 10^{-6}$ T,在这样强的磁噪声中要测量十分微弱的生物磁信号,必须有高灵敏度的磁强计和良好的磁屏蔽室,以防止周围环境的磁噪干扰。由于这些条件的限制,使得对生物磁信号的研究进展缓慢。直到 20 世纪 60 年代后期,随着测量技术的不断发展,陆续研制出了一系列的测量手段,如感应线圈式磁强计灵敏度可达 10^{-8} T,磁通门式磁强计灵敏度可达 10^{-10} T,超导量子干涉仪(superconducting quantum interference device, SQUID)灵敏度可达 10^{-15} T。下面仅对 SQUID 磁强计作些介绍。

简单地说,SQUID 就是一个磁电变换器,由磁通量变化转变成电量的变化,由于灵敏度极高,故可以测量记录人体磁场。SQUID 的核心部件是约瑟夫森器件构成的超导环,它对环内磁通的变化非常灵敏,是一种灵敏度极高的磁场传感器。SQUID 磁强计结构示意图如 11-24(a)所示,它有三部分,第一部分即 SQUID 本身,被密封在一个超导屏蔽的小盒内,可对干扰磁场进行部分屏蔽;第二部分是检测线匝,用来探测磁场;第三部分是杜瓦瓶,内盛液氮。SQUID 及探测线圈均置于瓶中液氮内,保证其需要的温度,可达 4.2K。为了提高抗干扰能力,通常将检测线圈改为梯度仪,图 11-24(b)、(c)分别为一阶微分梯度仪和二阶微分梯

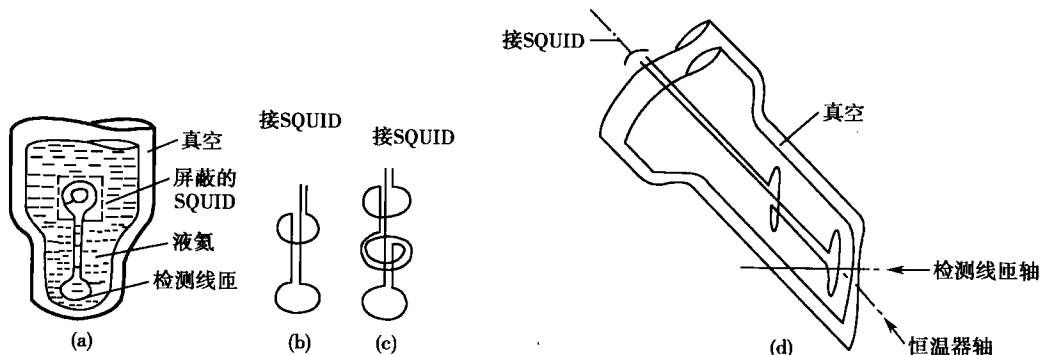


图 11-24 磁强计和梯度仪



度仪。梯度仪是由两个相隔很近、同样的线圈沿同轴反向串接而成。当两线圈所处磁场不均匀时,才有磁通变化,从而引起超导环内的磁通发生相应的变化;而在均匀磁场中时,超导环内总磁通维持恒定,即它对均匀磁场是不灵敏的,因而抵抗来自远处的磁干扰。当把每一瞬时的干扰磁场视为均匀场时,梯度仪将无信号输出给 SQUID。人体磁场在梯度仪这个小范围内是不均匀的,靠近人体的线匝处的磁场变化产生的信号必然大于另一线匝处的磁场变化产生的信号,梯度仪将两个线匝的信号差输出给 SQUID,这就提高了信噪比。当把每一瞬时干扰磁场视为均匀梯度场时,采用二阶微分梯度仪,它是由两个梯度仪同轴反向串接而成,两个梯度仪所测得的干扰磁场信号互相抵消。人体磁场不是均匀梯度场,取其信号差输出。这种二阶微分梯度仪具有更高的抗干扰能力,可使信噪比提高 $3\sim 4$ 个数量级。图 11-24(d)是一个倾斜 45° 的梯度仪,当其沿长轴转动时,可连续测出磁场在坐标上的两个分量的值。使用磁强计时,检测线圈不与皮肤接触,可相隔 $3\sim 5\text{cm}$ 。据报道,由于超导体研究的进展,国外有用 Y-Ba-Cu-O 超导材料制成的各种氧化物超导容器,它对外磁噪声有着优越的屏蔽效应,可使外界干扰磁场减弱约 10^7 倍。它比高磁导率的常规合金制成的超导屏蔽容器的屏蔽作用高 $2\sim 3$ 个数量级。它的另一个优点是可以价格较廉的液氮冷却。用这种超导容器制成的超导量子干涉仪,不仅进一步提高了信噪比,而且成本大大降低,对生物磁学的发展具有重要意义。

如图 11-25 所示,若将人体处于磁屏蔽室中进行各种生物磁信号的测量,可得到更精确的测量结果。为了屏蔽地磁噪声,可用三层坡莫合金包围,为了屏蔽交变磁场可用铝包围,磁屏蔽室可使信噪比提高一万倍以上。我国已建有磁屏蔽室,而且正在研究高水平的超导量子干涉仪。

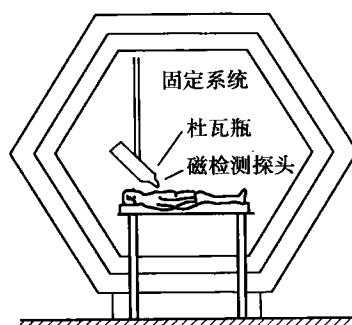


图 11-25 磁屏蔽装置及人体接受测试时的示意图

二、心磁图 脑磁图 肺磁图

1. 心磁图 1963 年鲍莱(Baule)、麦克菲(Mcfee)首先在人体的体表记录到心脏电流所产生的磁场,称其为心磁图(magnetocardiogram, MCG)。1970 年左右科恩(Cohen)用 SQUID 在磁场屏蔽室内首次创造了良好的心磁图。心磁图与心电图相比主要的优点有:①是非接触性的记录方法,不必考虑皮肤表面电流的影响,适合对 ST 段直流部分的波形判断,对右心房、左心室增大,心肌劳损的诊断具有重要意义。②当有环形电流和复数相等的逆向电流两重极存在时,因电压相互抵消,心电图不能记录,而心磁图却能记录到大幅度的变化信号,对陈旧性心肌梗死、心肌缺血能比较容易的检测出来。③心磁图所测磁场主要是偶极子信号源磁场,是心脏生物电本质的反映,通过分析可推导出信号源的位置和强弱,对普肯耶纤维系统异常传导通路等引起的异常节律的诊断有一定意义。

心磁图的记录是在前胸壁面选 36 点作为记录部位,与心电图的记录方法不同。心磁图也采用爱因托芬(Einthoven)命名法,分为 P 波,主要反映心房的除极过程;QRS 波,主要反映心室的除极过程;T 波,反映心室的复极化过程。图 11-26 表示正常人同一时间

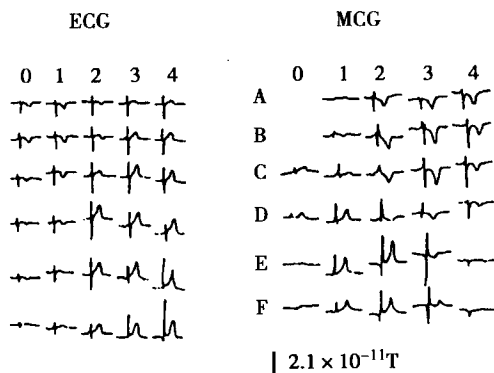


图 11-26 心电图和心磁图的对照

同一部位的心电图和心磁图的对照,由图可见,在心电图胸导联 V_1 、 V_2 处和与之对应的 D_1 、 D_2 处的心磁图同样出现 P、QRS、T 波。

2. 脑磁图 1968 年科恩(Cohen)首次 in 头颅的枕部测到自发性的 α 波引起的脑磁场信号,称其为脑磁图(magnetoencephalogram, MEG)。1972 年他又用磁屏蔽室和 SQUID 记录了第一个小噪声清晰的 α 波的脑磁图。

对于脑电图,由于脑颅骨的电阻率比头皮和颅内组织的电阻率大得多,所以头皮各处均有电流分布,这不仅使各处的电位差减小,脑电流微弱,而且难以确定场源部位。对于脑磁图情况则大不相同,颅内产生电流的神经元活动的小区域,可以看成是一个小的电偶极子(它所产生的磁场分布与一条孤立的小磁棒的磁场分布相似),从颅外记录到的脑磁图是由众多这样的小电偶极子磁场叠加的结果。当某一部位的神经细胞兴奋时,对应的脑电流和脑磁场较强,由于颅外和头皮中的电流很小,对颅内的电流和磁场影响很弱,所以从颅外记录的脑磁图波峰下的颅内部位,就是场源所在。这就是脑磁图对脑内兴奋部位推断的独特性,据此可推断癫痫病人的病灶部位,其特异性明显优于脑电图。

脑磁图的检测也是非接触性的,可分为无外界刺激的自发性脑磁图,有外界刺激的诱发性脑磁图,依赖于意识的内因性脑磁图。在自发性脑磁场中,除正常神经所引起的 α 波外,神经细胞的异常放电,如癫痫病时出现的棘波也会引起自发的脑磁场。诱发性脑磁场是由大脑皮质以及其他部位产生的,如听觉诱发的脑磁场发生源在听性脑干;脊髓神经诱发的脑磁场,发生源就在脊髓。内因性脑磁场依赖意识,在脑的高级中枢神经相对应的部位得到应答。图 11-27 所示为听觉诱发脑磁场,其中图(a)表示在颞部五个前后排列的点进行测量所得到的记录;图(b)表示由顶部向颞部垂直排列的点进行测量所得到的记录。两种排列都在第三点有显著不同,分析不对称指数(asymmetry index, AI),这个位置靠近颞叶皮层的初级听区。

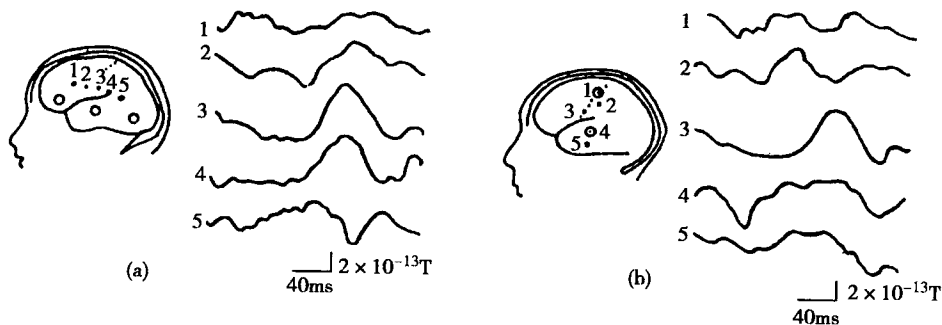


图 11-27 听觉诱发脑磁场及其在皮层上的定位

由于计算机技术的发展,现在使用的多道 SQUID 磁强计有专门的数据搜集装置,直接把脑磁场的信号进行处理和分析。目前利用脑磁图对大脑皮质功能的局限定位与生理学、解剖学达到非常一致的结果。根据信号源来推断病变部位可达到毫米数量级。把脑磁图投影到功能性磁共振成像(functional MRI, fMRI)上,可反映信号源处血流量。在脑外科手术中还常用脑磁图来确定感觉野和运动野的范围。

3. 肺磁图 肺磁图(magnetopneumogram, MPG)所测量的是吸入肺内的粉尘被磁化后的磁场强度及分布情况。早在 1970 年科恩(Cohen)就记录了世界上第一张肺磁图。利用肺磁图可间接地判断肺功能情况,它可比 X 射线更早地发现肺受到粉尘污染的职业病人。

肺磁场的测定装置主要有:①磁化器,用 $5 \times 10^{-3} \text{ T}$ 的磁场对全肺进行磁化。②磁通门式磁强计,用来测量肺产生的微弱磁场。③检查床,可前后、左右移动。④计算机系统,在肺



表面设定若干个测定点,根据测量数据计算出积蓄的粉尘量和分布。肺磁图的体表测定点是以胸骨剑突上窝为上界的中点,向下每隔 4cm 作一横线,共七条,再以 4cm 为间隔,在这些横线上水平移动,共得到 49 个测定点。测量时,病人脱去外衣,除去金属物品,经 $5 \times 10^{-3} \text{T}$ 的磁场磁化 10s,然后躺在床上上下左右移动 5min 完成第一次检测。初次检测后在同一场合,对相同的测定点让病人俯卧,用同样的方法进行第二次检测。将第二次检测数据与第一次检测数据相减,得到如图 11-28 的肺磁图。图中黑块表示受粉尘侵害的部位,黑块的大小表示磁化强度的高低。

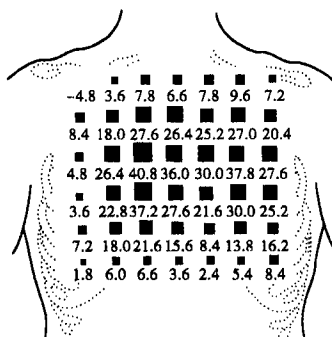


图 11-28 肺磁图

目前对生物磁信号的测量除上述几方面外,对眼磁场、神经磁场和肌磁场等的研究也十分活跃,可望在不久的将来,上述诸方面都能获得广泛的临床应用。

三、磁场的生物效应

大量实验和临床实践表明,磁场对生命机体的活动及其生理、生化过程有一定影响。这些影响主要体现在:

1. 磁场对生物体的作用与磁场强度、磁场类型有关 小鼠在磁场完全被屏蔽的环境中体内酶活性发生强烈的变化,寿命显著缩短;而 0.5T 的磁场则对小鼠有致死作用。恒定磁场对组织的再生和愈合有抑制作用,而脉冲磁场却对骨质愈合有良好的效果。交变磁场的频率也影响其对生物机体的作用,例如在研究磁场对血液的作用时,发现频率为 50~20 000 Hz 的脉冲磁场中,只有频率为 1~2kHz 的磁场会促进血液的纤溶性质,其他频率的磁场对纤溶性有抑制作用。

2. 磁场对生物体的作用与磁场方向有关 通常是当磁场方向和生物体轴线保持某一角度时其作用最大。例如当磁场的方向是从大鼠背部指向腹部时会减少白细胞的数目。如果磁场方向是任意的,则磁场的强度要增大两倍才能明显地看到白细胞的减少。

3. 磁场的生物效应与磁场的作用时间有关 磁场的物理作用有积累效应,必须达到一定的程度后,才能触发生物效应。显然,磁场越强达到阈值的时间越短。除物理作用时间(即物理作用累积到能刚好发生生物效应的时间)外,还有生物反应时间(即生物效应开始后,在组织中扩大,直到生物机体产生可观察到的变化所经历的时间)。生物反应时间与物理作用时间相比,可以长一些,也可以短一些。

4. 磁疗的作用 目前磁场疗法已广泛地应用于临床,对某些疾病如活血化瘀、消炎镇痛、安神降压、肌肉劳损、关节炎及气管炎等均有较好的疗效。至于治疗的机制、病种、各种类型磁场的强度、作用部位、治疗时间等均在不断实践和探索中。

思考题与习题十一

11-1 讨论库仑定律与毕奥-萨伐尔定律的类似与不同。

11-2 一个半径为 0.2m,阻值 200Ω 的圆形电流回路连着 12V 的电压,回路中心的磁感应强度是多少? ($1.9 \times 10^{-7} \text{T}$)

11-3 一无限长直导线通有 $I=15\text{A}$ 的电流,把它放在 $B=0.05\text{T}$ 的外磁场中,并使导线与外磁场正交,试求合磁场为零的点至导线的距离。 ($6.0 \times 10^{-5} \text{m}$)

11-4 在图 11-29 中求:

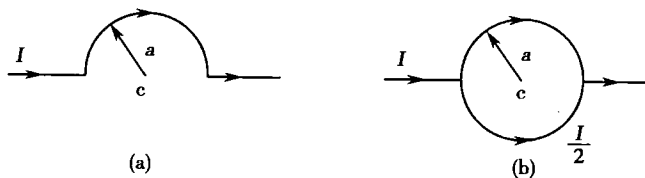


图 11-29 习题 11-4

(1) 如图(a)所示,半圆 c 处的磁感应强度是多少?

(2) 如图(b)所示,总电流分成两个相等的分电流时,圆心 c 处的磁感应强度是多少?

$$\left[(1) \frac{\mu_0 I}{4a}; (2) 0 \right]$$

11-5 如图 11-30 所示,一根载有电流 I 的导线由三部分组成, AB 部分为四分之一圆周,圆心为 O ,半径为 a ,导线其余部分伸向无限远,求 O 点的磁感应强度。 $\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \right]$

11-6 如图 11-31 所示,环绕两根通过电流为 I 的导线有四种环路,问每种情况下 $\oint B \cos \theta dl$ 等于多少?

$$[(1) 0; (2) 2\mu_0 I; (3) \mu_0 I; (4) -\mu_0 I]$$

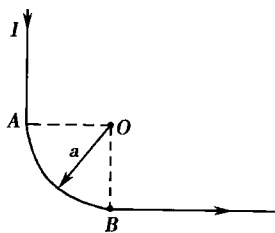


图 11-30 习题 11-5

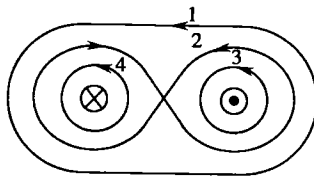


图 11-31 习题 11-6

11-7 一铜片厚度 $d = 2.0 \text{ mm}$,放在 $B = 3.0 \text{ T}$ 的匀强磁场中,已知磁场方向与铜片表面垂直,铜的载流子密度 $n = 8.4 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$,当铜片中通有与磁场方向垂直的电流 $I = 200 \text{ A}$ 时,求铜片两端的霍尔电势为多少? $(2.2 \times 10^{-5} \text{ V})$

11-8 磁介质可分为那三种,它们都具有什么特点? 构成生物体的各种生物大分子是否具有磁性,大多数生物大分子属于那种磁介质?

11-9 什么是超导现象? 超导体的三个重要临界参量是什么? 超过临界参量对超导体会有什么影响?

11-10 心磁图、脑磁图、肺磁图记录的都是什么信号? 它们在医学诊断上有哪些应用,具有什么优点?

(潘志达)

第十二章 电磁感应与电磁波

学习要求:

1. 掌握法拉第电磁感应定律、动生电动势、感生电动势、自感和互感、磁场能量。
2. 理解涡旋电场、位移电流、生物电阻抗、麦克斯韦方程组。
3. 了解电磁振荡、电磁波、电磁波谱、电磁场对生物体的作用。

电磁感应现象的发现,揭示了变化的磁场能够激发电场的性质。麦克斯韦在总结前人的理论和实验的基础上,指出了变化的电场能够激发磁场,进而建立了描述电磁场基本性质和规律的完整的电磁场理论——麦克斯韦方程组。这一理论预言了电磁波的存在,揭示了光的电磁本性。

第一节 法拉第电磁感应定律

一、法拉第电磁感应定律

自从奥斯特发现了电流能够产生磁场的现象以后,人们就致力研究如何利用磁场来产生电流,这个研究导致了电磁感应现象的发现。

图 12-1 中一个线圈的两端接在电流计上。磁铁与线圈保持相对静止时,电流计的指针不发生偏转。当线圈和磁铁进行相对运动时,电流计指针发生偏转,表明线圈中有电流通过。

在图 12-2 中使两个线圈彼此靠近,并保持相对静止。当使流经右边线圈中的电流发生变化时(接通、断开电路,或改变电阻值 R),电流计 G 的指针就立即发生偏转,表明左边的线圈中有电流产生。

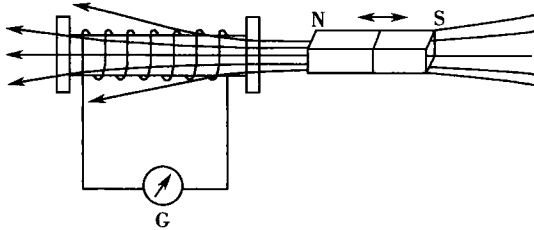


图 12-1 磁铁与闭合回路发生相对运动时的电磁感应现象

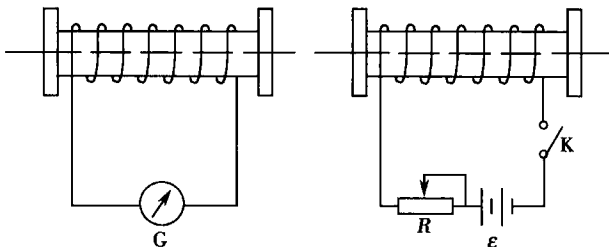


图 12-2 线圈中的电流发生变化时的电磁感应现象

上述两个实验其本质都是使穿过闭合导体回路所包围面积的磁通量发生了变化,因而在闭合导体回路中产生了电流。法拉第在总结了大量实验的基础上指出:当穿过闭合导体回路的磁通量发生变化时,回路中就产生电流,这种电流称为感应电流(induction current)。闭合回路中有电流产生,说明回路中有电动势存在。这种由于磁通量变化而引起的电动势,



称为感应电动势(induction electromotive force)。实际上,在回路中直接产生的是感应电动势,而感应电流则是由感应电动势所引起的。我们把由于磁通量发生变化而产生感应电动势的现象称为电磁感应现象。实验表明,导体回路中感应电动势 ϵ_i 的大小与穿过回路所包围面积的磁通量的变化率 $d\Phi/dt$ 成正比,这个结论叫做法拉第电磁感应定律(Faraday law of electromagnetic induction)。在国际单位制中,磁通量的变化率以韦伯/秒($\text{Wb} \cdot \text{s}^{-1}$)为单位,感应电动势的单位为伏特(V)。此定律用公式表示为

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (12-1)$$

式中的负号反映了感应电动势的方向。感应电动势的方向,可用下述方法确定:先选定回路的绕行方向,使由右手螺旋定则确定的回路的正法线方向与磁感应强度 B 的方向一致,于是 ϵ_i 的方向完全由 $\frac{d\Phi}{dt}$ 决定:如 $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 则 $\epsilon_i < 0$, 此时感应电动势的方向与回路的绕行方向相反;如 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 则 $\epsilon_i > 0$, 此时感应电动势的方向与回路的绕行方向相同,见图 12-3。这与楞次定律是一致的,即闭合回路中感应电流的方向,总是使感应电流所产生的磁场去反抗引起感应电流的磁通量的改变。

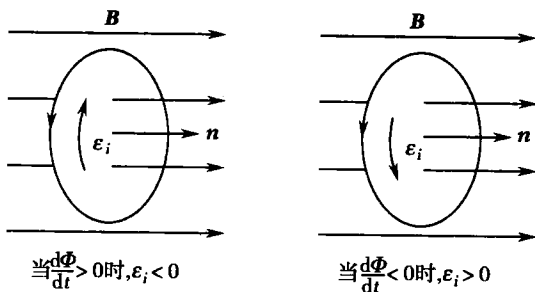


图 12-3 感应电动势的方向

使穿过回路面积的磁通量发生变化的方法很多。可以改变回路所在处磁感应强度 B , 也可以改变回路所包围的面积 S , 还可以改变回路面积的法线方向与磁感应强度方向之间的夹角。不论使用哪种方法,都可以用法拉第电磁感应定律式(12-1)来计算感应电动势。值得注意的是,以上我们讨论的回路都是由导线组成的单匝回路,因而式(12-1)只适用于单匝导线组成的回路。如果回路是 N 匝线圈,那么当磁通量变化时,每匝线圈中都将产生感应电动势。由于线圈的匝与匝之间是互相串联的,整个线圈的总电动势就等于各匝线圈所产生的电动势之和。令 Φ_1 、 Φ_2 、 \dots 、 Φ_N 分别代表通过各匝线圈的磁通量,则

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_N}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = -\frac{d\Psi}{dt} \end{aligned} \quad (12-2)$$

式中 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$ 称为磁链(magnetic flux linkage)或全磁通。如果穿过每匝线圈的磁通量相同,均为 Φ , 则 $\Psi = N\Phi$ 。

$$\epsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (12-3)$$

二、动生电动势

按照产生磁通量变化的原因不同,感应电动势分为两种:一种是由于导体在磁场中运动,而使导体内产生的感应电动势,称为动生电动势(motional electromotive force);另一种是导体不动,因导体所在处的磁场发生变化而在导体内产生的感应电动势叫做感生电动势(induced electromotive force)。

作为法拉第电磁感应定律的一个应用,我们计算在图 12-4 中因导线 ab 的运动而产生的动生电动势。设导线 ab 的长度为 l , 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中以速度 v 向右运动,并假定 l 、 v 、 B 三者互相垂直。先根据磁感应强度的方向确定回路 $abcd$ 的绕行方向为顺时针



方向。在 dt 时间内, l 向右移动 dx 距离。因回路的面积增加, 即 $dS = ldx > 0$, 故 $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Bl dx > 0$, 于是

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

ϵ_i 为负, 说明电动势方向与回路绕行方向相反, 为逆时针方向。

动生电动势的产生可以用洛伦兹力来解释。

在图 12-4 中, 磁场方向垂直于纸面向里, 当导线 ab 在纸面内以速度 v 向右运动时, 导线内每个电子受到大小为 $f = evB$ 的洛伦兹力的作用, 使电子沿导线由 a 端向 b 端移动, 结果在 b 端出现负电荷, 而在 a 端出现正电荷。这些正负电荷在导体内部产生一静电场 E , 方向从 a 指向 b 。该电场使导体内部的电子受到一个从 b 指向 a 、大小为 eE 的静电力作用, 阻止电子由 a 向 b 运动。因此在匀强磁场中运动着的导体内, 每个电子同时受到洛伦兹力 evB 和静电力 eE 这样两个相反方向的力的作用。当达到平衡时, 这两个力相等, 即

$$eE = evB$$

所以

$$E = vB$$

上式说明, 在平衡时, 导体内部存在着一个静电场 E 和一个非静电场 vB , 两者大小相等而方向相反, 在这两个相互平衡的电场的作用下, 导体内的自由电子就不再向 b 端移动, 此时, ab 可以看成为一个电源, a 端为电源的正极, b 端为负极。根据定义, 电源电动势的大小等于把单位正电荷从电源的负极经电源内部移到正极时非静电力所做的功, 于是有

$$\epsilon_i = \int_0^l vB dl = vBl$$

由此可见, 形成动生电动势的根本原因是洛伦兹力。动生电动势产生于作切割磁感应线运动的这段导体, 这段导体相当于一个开路的电源, a 端为正极, b 端为负极。如果与外电路相连接, 电流将从 a 端流出通过外电路而流向 b 端。在 ab 的内部, 电流是由 b 流向 a , 可见动生电动势 ϵ_i 在导线 ab 内的方向是由 b 指向 a , 而不动的那部分导体上不产生电动势, 它只是提供了电流流动的通路。

三、感生电动势 有旋电场

洛伦兹力能够说明导体在磁场中做切割磁感应线的运动时所引起的动生电动势, 但不能说明回路保持不动, 而使穿过回路面积的磁通量发生变化时所产生的感生电动势, 按照麦克斯韦关于电磁场的理论, 感生电动势是由于随时间变化的磁场在其周围空间产生的电场所引起的。

由变化的磁场所建立的感生电场, 是与变化着的磁通量相联系的, 它的电场线是闭合曲线, 因此感生电场又称为有旋电场(curl electric field)。

由于有旋电场的出现, 使得处于变化磁场中的导体内产生感生电动势。如果用 $\mathbf{E}_{\text{旋}}$ 表示有旋电场的电场强度, 则它在闭合环路 L 中产生的感生电动势 ϵ_i 可以表示为

$$\epsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l}$$

感生电动势的产生同样不要求电路闭合, 对于处在有旋电场 $\mathbf{E}_{\text{旋}}$ 中的一段导体 ab 中产生的

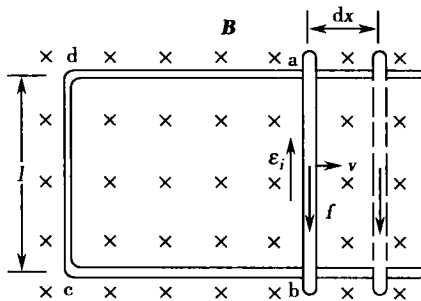


图 12-4 导体在磁场中切割磁感应线产生动生电动势



感生电动势可以表示为

$$\epsilon_i = \int_a^b \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} \quad (12-4)$$

有旋电场不是保守场,它存在于变化磁场的周围空间,不管这个空间是真空、电介质还是导体,但是感生电动势却必须在导体中才能产生。

在一般情形下,空间可能同时存在静电场 $\mathbf{E}_{\text{静}}$ 和有旋电场 $\mathbf{E}_{\text{旋}}$,总电场 \mathbf{E} 是二者的矢量叠加,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{旋}}$$

式中 \mathbf{E} 也称为全电场,它的环路积分为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{旋}}) \cdot d\mathbf{l} \quad (12-5)$$

因静电场是保守场,即 $\oint \mathbf{E}_{\text{静}} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 所以

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} \quad (12-6)$$

于是感生电动势又可写成

$$\epsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (12-7)$$

另一方面,按照法拉第电磁感应定律,感生电动势又可写成

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-8)$$

式中的面积 S 是以环路 L 为周界的任意曲面,联立式(12-7),(12-8)有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-9)$$

此式是电磁学的基本方程之一,它反映了变化的磁场能够激发电场。在稳恒磁场条件下,即 $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ 或 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ 时,上式化为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这便是静电场的环路定理。由此可见式(12-9)是静电场的环路定理在非稳恒磁场条件下的推广。

第二节 自感和互感

一、互感现象

设有两个相互邻近的线圈 1 和 2,分别通有电流,其中任一线圈中的电流发生变化时,都会在线圈中产生感应电动势,这种由于一个回路中的电流发生变化时在相邻的另一个回路中产生感应电动势的现象称为互感现象,所产生的电动势称为互感电动势(mutual induced electromotive force)。显然一个线圈中产生的互感电动势的大小不仅与另一线圈中电流改变的快慢有关,而且也与两个线圈的结构以及它们之间的相对位置有关。设线圈 1 中电流所激发的磁场穿过线圈 2 的磁链为 Ψ_{12} ,按照毕奥-萨伐尔定律 Ψ_{12} 与线圈 1 中的电流强度 I_1 成正比,即

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1 \quad (12-10)$$

式中比例系数 M_{12} 是线圈 1 对线圈 2 的互感系数,简称互感。如果线圈 1 中的电流 I_1 发生变化,则线圈 1 所激发的磁场穿过线圈 2 的磁链 Ψ_{12} 也发生相应的变化,按照法拉第电磁感



应定律,由于 I_1 的变化而在线圈 2 中产生的感应电动势 ϵ_{12} 为

$$\epsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{12} I_1) \quad (12-11)$$

在线圈的形状、大小和相对位置保持不变,而且周围不存在铁磁质的情况下,互感 M_{12} 为常量,上式可化为

$$\epsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (12-12)$$

同样,线圈 2 中电流的变化所激发的磁场穿过线圈 1 的磁链为 Ψ_{21} ,正比于线圈 2 中的电流 I_2 ,即

$$\Psi_{21} = M_{21} I_2 \quad (12-13)$$

由于线圈 2 中的电流 I_2 的变化,而在线圈 1 中产生的感应电动势 ϵ_{21} 为

$$\epsilon_{21} = M_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (12-14)$$

可以证明 M_{12} 和 M_{21} 相等,一般用 M 表示,即

$$M_{12} = M_{21} = M$$

M 称为两个线圈的互感系数,简称互感(mutual inductance)。实验表明,当线圈内或周围空间没有铁磁质时,两个线圈之间的互感 M 由线圈的几何形状、大小、匝数和相对位置及线圈内的磁介质所决定,与线圈中的电流无关;当线圈内或周围空间存在铁磁性物质时,互感则与线圈中的电流有关。

在国际单位制中,互感的单位是亨利(H)。 $1\text{H} = 1\text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$ 。由于亨利的单位太大,常用毫亨(mH)或微亨(μH)作为互感的单位。

互感现象被广泛地应用于无线电技术和电磁测量中。各种电源变压器、中周变压器、输入或输出变压器、电压互感器以及电流互感器等都是互感器件。但是,互感现象有时也会招致麻烦。例如,电路之间由于互感而相互干扰,影响正常工作。人们不得不设法避免这种干扰,磁屏蔽就是其中的一种方法。

[例 12-1] 设一长度为 $l=1.0\text{m}$,横截面积为 $S=10\text{cm}^2$,匝数为 $N_1=1000$ 的密绕、中空直螺线管。在此螺线管的中部,密绕一匝数为 $N_2=20$ 的短线圈。求两线圈的互感。

解:由于此螺线管的长度与其直径相比是足够长的,因而在计算时可视为无限长直螺线管。设长线圈中的电流为 I_1 ,它在线圈中部产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

该磁场穿过短线圈的磁链为

$$\Psi_{12} = N_2 BS = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S I_1}{l}$$

由式(12-10)得两线圈的互感为

$$M = M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}$$

代入数值得

$$M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 20 \times 10 \times 10^{-4}}{1.0} = 25 \times 10^{-6} \text{H} = 25 \mu\text{H}$$

二、自感现象

当一个线圈中的电流发生变化时,激发的变化磁场会引起通过线圈自身的磁通量发生变化,从而在线圈自身产生感应电动势,这种由于回路中电流的变化而在回路自身中产生感应电动势的现象称为自感现象,所产生的感应电动势称为自感电动势(self induced electro-



motive force)。

由于线圈中的电流所激发的磁场的磁感应强度与电流强度成正比,因此通过线圈的磁链也与线圈自身的电流成正比,即

$$\Psi = LI \quad (12-15)$$

式中比例系数 L 称为线圈的自感系数,简称自感。如果线圈中的电流 I 发生变化,穿过线圈自身的磁链 Ψ 也相应变化,在线圈中将产生感应电动势

$$\epsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (12-16)$$

在线圈的大小和形状保持不变,并且附近不存在铁磁质的情况下,自感 L 为常量,上式变为

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (12-17)$$

自感的单位与互感相同,在国际单位制中也是 H(亨利)。当线圈内或周围没有铁磁质时,线圈的自感由线圈的几何形状、大小、匝数及线圈内的磁介质所决定。

[例 12-2] 设一长度为 $l=1.0\text{m}$ 、截面积为 $S=10\text{cm}^2$ 、匝数为 $N=1000$ 的密绕、中空长直螺线管。求此螺线管的自感。

解:由于此螺线管的长度与其直径相比是足够长的,因而在计算时可视为无限长直螺线管,管内磁感应强度为

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

通过螺线管的磁链为

$$\Psi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

螺线管的自感为

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times \frac{10 \times 10^{-4}}{1.0} \\ &= 1.3\text{mH} \end{aligned}$$

第三节 磁场的能量

一、RL 电路的暂态过程

如图 12-5,对于一个含有电感 L 和电阻 R 的简单电路,在接通电路或切断电路的瞬间,由于自感的作用电路中的电流并不立即达到最大值或立即消失,而要经历一定的时间才能达到稳定值,这个过程称为 RL 电路的暂态过程(transient state process)。当电键 K 打向 a 点时,电路接通,电路中电流 i 逐渐增大,由于自感的作用,电流的变化使电路中产生自感电动势 ϵ_L

$$\epsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

ϵ_L 与电源电动势 ϵ 共同决定电路中的电流,由基尔霍夫第一定律

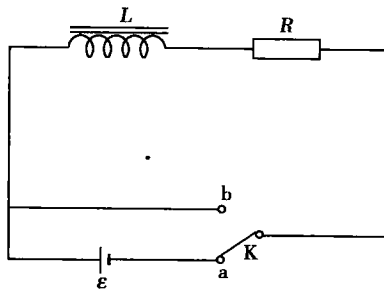


图 12-5 RL 电路



$$\varepsilon + \varepsilon_L - iR = 0 \quad (12-18)$$

即

$$\varepsilon_L - L \frac{di}{dt} - iR = 0 \quad (12-19)$$

这就是电路中变化着的电流所满足的微分方程,可用分离变量法求解以上一阶微分方程

$$\frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L} dt$$

对上式两边积分得

$$\ln\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + C$$

式中 C 为积分常数,将初始条件 $t=0$ 时 $i=0$,代入上式求出 C ,可解得

$$i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (12-20)$$

上式表达了 RL 电路接通电源后,电流强度 i 随时间 t 的变化规律。图 12-6(a)是按式(12-20)绘制的曲线。可以看出接通电路后,电流不是立刻达到无自感时的电流稳定值 $I = \varepsilon/R$,而是由零随时间而增长,最终达到稳定值。

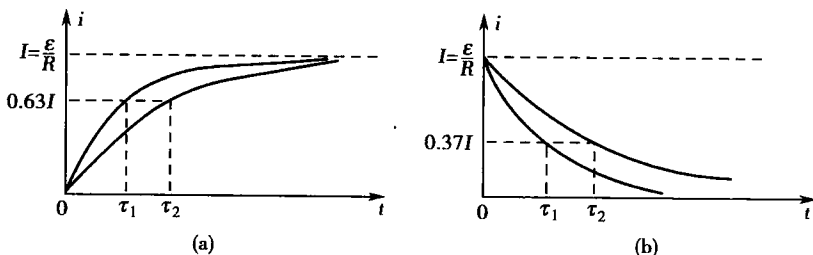


图 12-6 RL 电路暂态过程电流与时间的关系

电路中的比值 L/R 决定了电流达到稳定值的过程所需要的时间的长短。由式(12-20)可知当 $t = L/R = \tau$ 时,电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) = 0.63 \frac{\varepsilon}{R} = 0.63I$$

即经历 τ 时间电流达到其稳定值的 63%。通常用 $\tau = L/R$ 作为 RL 电路的暂态过程持续时间长短的标志,称 τ 为 RL 电路的时间常数(time constant)。 τ 越大,电流增长得越慢,暂态过程持续的时间越久。

如图 12-5,当 RL 电路中的电流达到稳定值后将电键 K 从 a 打向 b,断开电源,形成无源 RL 闭合回路,这时,回路中虽无外接电源,但由于电流消失时自感 L 中产生自感电动势使回路中电流将持续一段时间才会降为零。在这一过程中,电路中的电流由自感电动势式(12-17)决定。由基尔霍夫第一定律

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0 \quad (12-21)$$

用分离变量法解此一阶微分方程,代入初始条件 $t=0$ 时 $i = I = \varepsilon/R$,可得断开电源后 RL 闭合回路中电流随时间变化的规律

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (12-22)$$

即断开外电源后,RL 电路中的电流并不立即降为零,而是按指数规律逐渐减小。当 $t = \tau = L/R$ 时,电流降低为初始值 I 的 37%。图 12-6(b)是按照式(12-22)绘制的电流强度随时间变化的曲线。



二、磁场的能量

1. 自感磁能和互感磁能 一个通电的线圈也会储存一定的能量,其所储的能量可以通过电流建立过程中电源提供能量用以抵抗感应电动势做功来计算。

如图 12-5,当线圈与电源接通时,电路中的电流 i 由零逐渐增大到稳定值 I 。由于自感现象,在电流增大的过程中有与电源电动势反方向的自感电动势存在,外电源 \mathcal{E} 不仅要供给电路中消耗在电阻 R 上的焦耳热的能量,而且还要反抗自感电动势 \mathcal{E}_L 做功。在 dt 时间内,电源反抗自感电动势所做的功为

$$dA = -\mathcal{E}_L i dt \quad (12-23)$$

由

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

得

$$dA = L i di$$

在电流由 $i=0$ 达到稳定值 I 的过程中,电源反抗自感电动势所做的功为

$$A = \int dA = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad (12-24)$$

这部分功以能量的形式储存在线圈内。当切断电源把开关打向 b 时,电流由稳定值 I 逐渐减小到零,线圈中产生与电流方向相同的感应电动势。线圈中原已储存起来的能量通过自感电动势做功全部释放出来。自感电动势在电流减小的过程中所做的功转化为电流流经电阻 R 时放出的焦耳热

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty R i^2 dt = R \int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right)^2 dt \\ &= R I^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I^2 \end{aligned}$$

显然电阻 R 上消耗的能量只能来源于自感线圈 L ,这就表明自感线圈能够储存能量。由此可知,在一个自感系数为 L 的线圈中通有电流强度为 I 的电流时,线圈中所储存的能量为

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (12-25)$$

该能量称为自感磁能。

在两个相邻的线圈 1 和 2 中分别通有电流 I_1 和 I_2 。在建立电流的过程中,电源除了供给线圈中产生焦耳热的能量和抵抗自感电动势做功外,还要抵抗互感电动势做功。首先我们使线圈 1 中的电流由零增加到稳定值 I_1 ,然后使线圈 2 中的电流由零增加到稳定值 I_2 。由于线圈 2 中的电流 i_2 的变化在线圈 1 中产生了感应电动势 \mathcal{E}_{21} ,为了保持线圈 1 中的电流 I_1 不发生变化,在线圈 1 的电源必须抵抗互感电动势而做功

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^\infty \mathcal{E}_{21} I_1 dt = - I_1 \int_0^\infty \left(-M \frac{di_2}{dt} \right) dt \\ &= M I_1 \int_0^{I_2} di_2 \\ &= M I_1 I_2 \end{aligned} \quad (12-26)$$

如果我们把线圈通电的顺序交换一下,也能得到相同的结论。和自感一样,两个线圈中电源抵抗互感电动势所做的功,也以磁能的形式储存起来

$$W_{12} = A = M I_1 I_2 \quad (12-27)$$

W_{12} 称为线圈 1、2 的互感磁能。

当两个线圈中各自建立了电流 I_1 和 I_2 后,除互感磁能外每个线圈里各储有自感磁能



$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2, \quad W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

这样,两个相邻的载流线圈所储存的总磁能为

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (12-28)$$

2. 磁场的能量 式(12-25)是用载流线圈的自感及流经线圈的电流所表示的线圈的自感磁能。正如电荷系的电能实际上是电场的能量,分布在电场中一样,电流系的磁能实际上是磁场的能量,分布在磁场中。以下我们将会看到经过适当变换,电流系的磁能可以用描述磁场的量 B 、 H 来表示。考虑一无限长、密绕的直螺线管,管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质,参照例题 12-2 可得螺线管的自感系数为

$$L = \mu n^2 V$$

式中 n 为单位长度上线圈的匝数, V 为螺线管的体积,当螺线管中的电流为 I 时,其自感磁能为

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V I^2$$

由于无限长直螺线管内的磁感应强度 $B = \mu n I$,代入上式,得

$$W = \frac{1}{2\mu} B^2 V \quad (12-29)$$

V 可以看作磁场分布的空间,磁能分布在磁场存在的区域(可视为整个螺线管内部空间),因而单位体积内的磁能即磁能密度(magnetic energy density)为

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H \quad (12-30)$$

式(12-30)虽然是从无限长直螺线管中的均匀磁场这一特殊情况下求得的,但此公式适用于各种类型的磁场。该式说明,在任何磁场中,任一点的磁场能量密度只与该点的磁感应强度 B 及介质的性质有关。在一般情况下,磁场的能量密度是空间位置的函数,而场内任一体积中的磁场能量为

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2 dV \quad (12-31)$$

第四节 麦克斯韦方程组

一、位移电流

通过第十一章的讨论我们得到稳恒电流和它所激发的磁场之间满足安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{L \cap S} I \quad (12-32)$$

式中 $\sum I$ 是穿过以闭合回路 L 为边界的任意曲面 S 的传导电流的代数和。下面我们以前 RC 电路的暂态过程为例来讨论在非稳恒电流的条件下,安培环路定理的适用性。

如图 12-7,在电容器充放电的过程中流经导线的电流随时间变化,显然这个电流就是一个非稳恒电流。我们在电容器的一个极板附近取一闭合积分环路 L ,并以它为边界作两个曲面 S_1 和 S_2 ,曲面 S_1 与导线相交,曲面 S_2 在电容器两极板之间, S_1 和 S_2 共同组成一闭合曲面 S 。设通过导线的电流强度为 i ,该电流在电容器极板处中断,因而通过曲面 S_1 的电流为 i ,而通过曲面 S_2 的电流为零。即通过同一边界曲线 L 所作的不同曲面上穿过的电流不同。对于曲面 S_1 应用安培环路定理,有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i$$

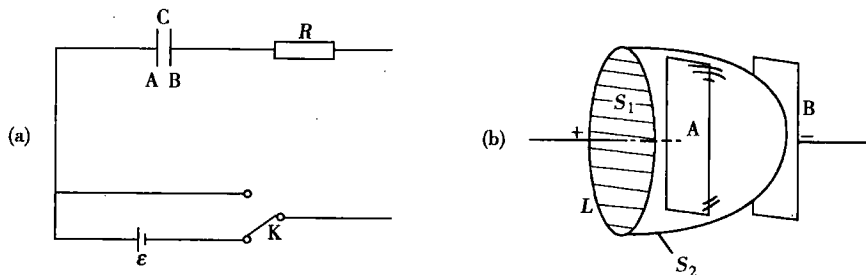


图 12-7 位移电流和传导电流

而对于曲面 S_2 应用安培环路定理,有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

显然,在非稳恒电流情况下,由于所取的环路曲面不同,导致环路积分的结果不同。表明在非稳恒电流的情况下安培环路定理式(12-32)不再适用。我们注意到,之所以导致环路积分的结果不一致,是由于电流被电容器极板隔断了,自由电荷在电容器的极板上积累下来。依照电流的连续性原理,所积累的自由电荷 q_0 与电流 i 的关系为

$$i = \frac{dq_0}{dt} \quad (12-33)$$

取上述闭合曲面 S 为高斯面,由电场的高斯定理,通过闭合曲面 S 的电位移通量为

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 \quad (12-34)$$

联立式(12-33)和式(12-34),得

$$i = \frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi_D = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-35)$$

上式表明:导线中的电流引起电容器极板上电荷的改变,而电荷的变化又引起了电容器两极板内电场的变化。麦克斯韦把这种电场的变化也视为一种电流,称之为位移电流(displacement current)

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = i$$

这样一来,在电容器极板处中断的传导电流 i 可以被位移电流 I_d 接替下去,二者合在一起保持了电路中电流的连续性。我们把传导电流和位移电流之和称为全电流。当我们用全电流替代式(12-32)中的传导电流时就可以得到在稳恒电流和非稳恒电流的情况下都成立的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I = I_0 + I_d = I_0 + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-36)$$

式中 I_0 为穿过以闭合环路 L 为边界的任意曲面的传导电流的代数和。麦克斯韦位移电流的假说指出:除传导电流能够激发磁场之外,位移电流也能够它在它周围空间激发磁场。

虽然位移电流在激发磁场方面和传导电流是等效的,但这两种电流之间存在着本质的不同。例如,传导电流是由自由电荷的定向移动形成的,当它流经导体时会产生焦耳热,而位移电流是只对变化电场的等效描述,不存在自由电荷的定向移动,因而也没有焦耳热效应。

二、麦克斯韦方程组

通过对静电场的研究,我们知道,静止的电荷在其周围空间产生静电场。有介质存在时静电场的高斯定理为



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\text{内}} q_0 \quad (12-37)$$

式中的 q_0 为自由电荷。式(12-37)说明静电场对任意封闭曲面的电位移通量仅取决于包围在封闭曲面内自由电荷的代数和,与曲面外的电荷无关,它反映了静电场是有源场,电场线由正电荷发出,终止于负电荷。

法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-38)$$

揭示出当磁场随时间变化时,也会激发电场。式(12-38)反映了变化的磁场和由其所激发的电场之间的关系:在任何电场中,电场强度沿任意闭合回路的线积分等于通过该曲线所包围面积的磁通量对时间的变化率的负值。式中的 \mathbf{E} 表示总电场的电场强度。与静电场不同,变化的磁场所激发的感应电场是无源的有旋场,它的电场线是无头无尾的闭合曲线,所以通过封闭曲面的电位移通量的代数和为零。因而式(12-37)不仅对静电场适用,而且对感应电场同样适用。综上所述,电荷和变化的磁场都可以激发电场,我们可以把式(12-37)推广为:在任何电场中,通过任何封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面所包围的自由电荷的代数和,即公式(12-37)中的 \mathbf{D} 表示为总电场的电位移矢量。

无论是传导电流还是变化的电场都能够激发磁场。它们所激发的磁场,磁感应线都是闭合的。因此,磁场中的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12-39)$$

对任何磁场都适用,即在任何磁场中,通过任意闭合曲面的磁通量恒为零。

引进了位移电流以后的安培环路定理为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0 + I_d = I_0 + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-40)$$

式(12-40)反映了传导电流及变化的电场与它们所激发的磁场之间的内在联系,表明在任何磁场中磁场强度沿任意闭合环路的积分等于穿过该闭合环路的全电流。

式(12-37)、(12-38)、(12-39)和(12-40)是麦克斯韦在前人理论和实验的基础上总结出的能够完整描述任意电磁场的普遍规律的方程组,称为麦克斯韦方程组(Maxwell equations)。

当电磁场中存在介质时,电场会使介质极化,产生极化电荷,极化电荷要产生附加电场;磁场会使介质磁化,而产生附加磁场。介质对场的影响可以反映在表征介质电磁学性质的相对电容率 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 中。在各向同性介质中联系电磁场场矢量与介质常数关系的方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (12-41)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \quad (12-42)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (12-43)$$

麦克斯韦方程组加上描述介质性质的上述三个方程,全面总结了电磁场的基本规律,是处理宏观电磁现象的经典理论,利用它们原则上可以解决宏观电动力学的各种问题。

第五节 电磁振荡和电磁波

一、电磁振荡

由一个无电阻的自感线圈 L 和一个电容器 C 所组成的回路叫 LC 振荡电路。当已充电



的电容器 C 和自感线圈 L 接通时,将通过自感线圈 L 放电,由于线圈的自感作用,电路中的电流不能立即达到最大,而是随电容器极板上的电荷的减少而逐渐增大。当电容器两极板上的电荷减为零时,电路中电流达到最大。与此相应的是,线圈 L 上因有电流通过而建立了磁场,磁场的能量随电流增加而增加,直到电容器放电完毕,电容器中电场的能量为零,线圈中磁场的能量达到最大值,电场能全部转换为自感线圈的磁场能。此时,虽然电容器两极板上的电荷为零,但电流并不立即消失,由于线圈的自感作用,使感应电流的方向和原电流方向相反,从而对电容器反向充电。在两极板间建立了与原电场方向相反的电场。当电容器两极

板上的电量达到最大值时,反向充电结束,电路中的电流减小到零,线圈中的磁场也相应消失。至此,线圈中的磁场能量又全部转变为电容器极板间的电场能量。接着,电容器再通过线圈放电,电场能量再次转换为磁场能量。如此周而复始地重复下去,电路中就产生了周期性变化的电流,这种电荷和电流随时间作周期性变化的现象称为电磁振荡(electromagnetic oscillation)。

二、电磁波及电磁波谱

位移电流和有旋电场是麦克斯韦电磁场理论的两个重要概念,从这两个概念出发,可以得出这样的结论,即变化着的电场在它周围空间产生变化的有旋磁场,所产生磁场的磁感应线是闭合的;而变化着的磁场在它周围空间产生变化的有旋电场,它的电场线也是闭合的。这样,变化着的电场和变化着的磁场,总是相互依存、相互激发,从而形成了统一的电磁场。

若空间某一区域存在着一个变化的电场,它必将在邻近的区域内激起一个变化的磁场,这个变化的磁场又将在它的邻近的区域内激起新的变化的电场,这个新的变化的电场又会在它的邻近区域内激起变化的磁场。这种从空间某给定区域出发,由近及远,交替地激发起变化的电场和变化的磁场,以有限的速度在空间传播,称为电磁波(electromagnetic wave)。LC 振荡电路可以作为发射电磁波的波源。振荡电路的固有振荡频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



- (3) 电矢量 E 和磁矢量 B 的振动同相位。
- (4) 电矢量 E 和磁矢量 B 的振幅有确定的比值。
- (5) 电磁波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (12-45)$$

在真空中

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (12-46)$$

即在真空中以光速传播。

麦克斯韦从理论上预言了电磁波的存在,1887年赫兹(H. Hertz)用电磁振荡的方法产生了电磁波,而且通过多次实验证明了电磁波与光波一样能够发生反射、折射、干涉、衍射和偏振,验证了麦克斯韦的预言,揭示了光的电磁本质,从而将光学与电磁学统一起来。大量实验事实证明了红外线、紫外线、X射线和 γ 射线都属于电磁波。在真空中各种电磁波都具有相同的传播速度,且都具有电磁波的共同性质,但它们的波长(或频率)不同。我们可以按它们的波长或频率排列起来,就形成了电磁波谱(electromagnetic spectrum)。如图12-9所示,电磁波谱中波长最长的是无线电波,其次是红外线、可见光、紫外线、X射线,波长最短的是 γ 射线。

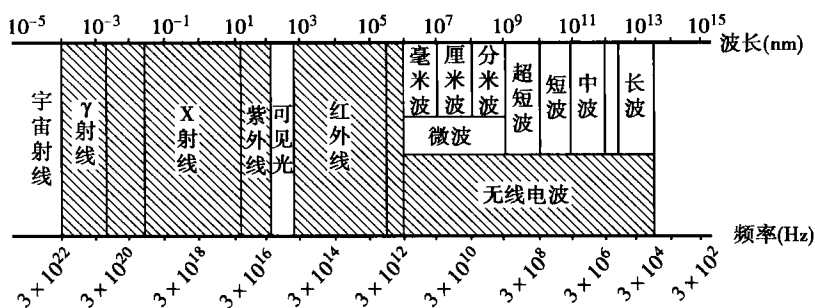


图 12-9 电磁波谱

各波段的电磁波虽然本质相同,但不同波长的电磁波与物质的作用并不相同。它们照射生物机体时,可引起生物组织不同程度的生物物理和生物化学的变化。

三、电磁场对生物体的作用

高频交变电流伴随着交变的电场和磁场,在医学上主要用来对人体内部各种组织和器官加热,在外科可以用于电切割、电凝固或电干燥。这方面的情况,这里不再介绍,我们将重点介绍微波对生物体的作用。

微波是高频电磁波,波长为 $10^{-3} \sim 1\text{m}$,一定剂量的微波作用于生物体可产生热效应,由此给生物体内的不同部位带来相应的影响。

微波对神经系统的作用与照射方式、照射剂量等因素有关。短时间、小剂量照射,可加强大脑皮质的兴奋过程;长时间、大剂量照射,可加强抑制过程,尤以照射头部这种作用最明显。小剂量微波的作用,可改变大脑皮质条件反射。大剂量微波的作用,可影响自主神经的调解功能,引起血液循环、呼吸频率的变化及皮肤和直肠温度的变化。

实验证明,微波照射后的血相变化与微波的辐射频率、功率密度、辐射时间密切相关。长期辐射可引起白细胞总数升高,多核细胞、淋巴细胞、嗜酸性粒细胞增多,而红细胞可能增多或减少。



微波照射对血液循环有明显影响,可使动、静脉扩张,对缓解痉挛、促进血管张力的恢复、改善供血有明显作用。但功率密度较大的微波照射也可使心跳加快,随即又变慢,最后停跳。在小功率密度照射下,不会引起心血管系统的显著变化。

高强度的微波辐射,对消化系统有明显的损害。肝脏出现剧烈充血,肝细胞肿胀、变性并出现大小不等的空泡。胃出现充血,甚至溃疡。也可引起盲肠黏膜糜烂和充血。在低强度微波的辐射下,不会引起消化系统组织形态的明显改变。

大剂量的微波辐射,可引起肺极度充血,血管剧烈扩张,肺泡上皮脱落并有血液经毛细血管涌入肺泡腔,造成肺出血、水肿,可致死。但小剂量的微波对肺的炎症有一定的治疗作用。

微波能促使甲状腺激素增加或使甲状腺代谢增强。对于下丘脑-垂体-肾上腺,不同剂量的微波影响不同,可抑制也可促进激素的产生。除此之外,一定剂量的微波照射可增加血液的激素含量。

微波可刺激代谢过程,影响生物氧化反应和组织的氧消耗,可抑制自由基的氧化,从而降低细胞中毒性产物自由基和过氧化物的浓度。

经常受微波照射的妇女可有月经不调,哺乳期泌乳不足。对于男性,当微波辐射使睾丸温升超过 35°C 时,精子的产量即明显减少或停止。

对于人的眼睛,当微波的功率密度大于 $10\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$,小于 $300\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$ 时能使晶状体产生可恢复性损害。当功率密度大于 $300\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$ 时,产生不可恢复性损害。

大剂量微波反复辐射皮肤会出现凝固性坏死,肌纤维与横纹模糊不清。皮肤、肌肉在小剂量微波的辐射下,没有明显的组织学变化。

除了上面所述,微波还具有治疗作用。微波治疗机是用磁控管产生高频振荡,经同轴电缆传输,用辐射器把导出的微波能量以电磁波的形式辐射到需治疗部位。在微波的热作用下,可抑制肿瘤生长,减低肿瘤细胞的氧代谢而使其损伤,并能提高癌细胞对放、化疗的敏感性。

第六节 生物电阻抗

电阻抗是交流电路中的一个基本概念,简称阻抗。某一导电体的阻抗,在数值上相当于通过单位电流强度时,该物体两端的电势差。阻抗包括电阻和电抗两部分,不论电阻和电抗,单位都是欧姆(Ω)。电抗又可分为由电容而引起的容抗和由电感而引起的感抗两类。生物体内含有电阻率不相同的各种物质,几乎到处存在着不可忽视的电容,而感抗是可以忽略的,因此可以认为,生物体内的阻抗是由电阻和容抗两部分构成的。由电阻和电容组成的电路,基本上可分为串联和并联两种。

在 R 、 C 串联的情况下,阻抗 Z 与电阻 R 和容抗 $Z_c = 1/(\omega C)$ 之间的关系为

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad (12-47)$$

式中 ω 为施加于生物体上的交流电的频率。在 R 、 C 并联的情况下,阻抗 Z 与电阻 R 和容抗 Z_c 之间的关系为

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (12-48)$$

电阻抗的倒数是电导纳,简称导纳,用符号 Y 表示,即 $Y = \frac{1}{Z}$,单位为西门子(S)。导纳也是研究生物体功能情况常用的概念。



明确了有关阻抗的一些基本概念之后,我们以人体内物质构成为例,采用模型化的办法,建立各种等效电路,近似分析人体阻抗的特点。

首先,我们分析一个细胞的阻抗。由于细胞膜的存在,细胞具有膜电容。膜电容的容抗与施加于细胞膜上的交流电的频率有关,频率低则容抗大,因此,可认为频率较低的交流电是不能通过细胞内部的,电流主要通过细胞外液;频率高时,膜电容的容抗较小,因而频率高的交流电能够通过细胞内部,而且交流电的频率越高,通过细胞内部的电流也越强。

细胞的这种阻抗特点可用图 12-10 所示的细胞的等效电路来表示,图中 C 表示细胞的膜电容, R_i 表示细胞内液的电阻, R_e 表示细胞外液的电阻。

其次,我们再来分析人体内局部组织的阻抗等效电路。因为对人体的组织或器官进行电测量时,都有通电电极的存在,当电极与体内物质接触时会产生电化学过程,这一过程可导致双重层电容 C_w 的建立,其容抗是总阻抗中的一部分。另外,由于通电会使体内局部组织中的体液电解,因此体液的阻抗也发生了变化,用 R_w 表示。 C_w 和 R_w 所代表的阻抗常称为瓦尔堡(Warburg)阻抗。如果用 R 表示电极附近的纯电阻,三者综合考虑,则电极附近的等效电路可用图 12-11 来表示。

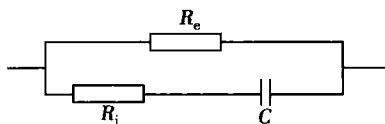


图 12-10 细胞的等效电路

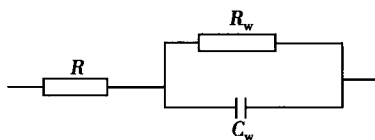


图 12-11 与电解过程有关的电极附近的阻抗

了解这些概念之后,就可以比较全面地分析体内局部组织总阻抗的等效电路,图 12-12 就是这种等效电路中的一例。图中 E_A 、 E_B 代表电极 A、B 附近出现的极化电动势; C_0 代表两电极与体内电介质所构成的电容, C_{1A} 、 C_{1B} 分别代表两电极处的双重层电容; R_1 代表体内物质的纯电阻, R_{2A} 、 R_{2B} 分别代表两电极附近与电解过程有关的纯电阻; R_{WA} 、 C_{WA} , R_{WB} 、 C_{WB} 分别代表两电极附近的瓦尔堡阻抗。当 E_A 、 E_B 和 C_0 可以忽略时,则图 12-12 中的等效电路便可简化为图 12-13(a)所示的等效电路。很明显,当电极间通以高频交流电时 $Z_C = 1/(\omega C)$ 便很小,可忽略不计,相当于电容的高频短路。在这种情况下,阻抗 Z 近似等于电阻 R_1 。图 12-13 (b) 给出了等效电路的阻抗与频率之间的这种关系。也就是说,这时可把体内物质的阻抗看成是由纯电阻构成的。

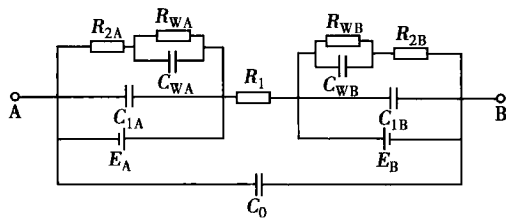


图 12-12 包括电极在内的局部组织阻抗的等效电路

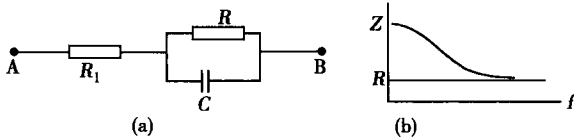


图 12-13 局部组织阻抗的等效电路的简化电路

(a) 在图 12-12 基础上简化了的等效电路

(b) 等效电路的阻抗-频率曲线

思考题与习题十二

12-1 将一条形磁铁推向一闭合线圈,线圈中将产生感应电动势。问在磁铁与线圈相



对位置不变的情况下,迅速推向线圈和缓慢推向线圈所产生的感应电动势是否相同?为什么?

12-2 一闭合圆形线圈在匀强磁场中运动,在下列情况下是否会产生感应电流?为什么?

- (1) 线圈沿磁场方向平移;
- (2) 线圈沿垂直于磁场方向平移;
- (3) 线圈以自身的直径为轴转动,轴与磁场方向平行;
- (4) 线圈以自身的直径为轴转动,轴与磁场方向垂直。

12-3 如图 12-14 所示,一刚性导体回路处在 $B=0.50\text{T}$ 的匀强磁场中,回路平面与磁场垂直,ab 段长 $l=0.50\text{m}$,拉动 ab 使其以 $v=4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度向右匀速运动,电阻 $R=0.50\Omega$,略去摩擦阻力及导体的电阻。求:(1)ab 内的非静电场场强 K ;(2)ab 内动生电动势的大小和方向;(3)感应电流消耗在电阻 R 上的功率;(4)拉力所做功的功率;(5)作用在 ab 上的拉力;(6)1s 内拉力所做的功。

[(1) 2.0V/m ;(2) 1V ,逆时针方向;(3) 2.0W ;(4) 2.0W ;(5) 0.50N ;(6) $2.0\text{N}\cdot\text{m}$]

12-4 若两组线圈缠绕在同一圆柱上,其中任一线圈产生的磁感应线全部并均等地通过另一线圈的每一匝。设两线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 ,若两线圈长度相等,证明两线圈的互感可以表示为: $M=\sqrt{L_1L_2}$ 。

12-5 如图 12-15 所示的电路,已知 $\epsilon=10\text{V}$, $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$, $L=10\text{H}$,求在以下情况时,电路中的电流 I_1 、 I_2 和 I_3 各为多少?

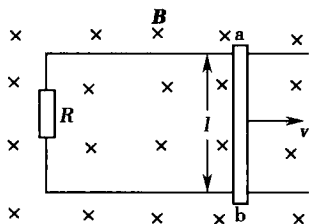


图 12-14 习题 12-3

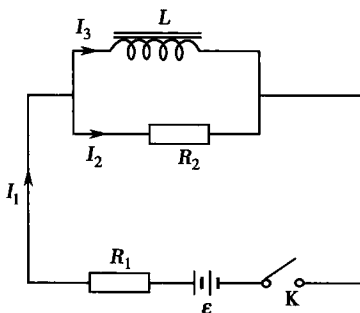


图 12-15 习题 12-5

- (1) 当电键 K 接通的瞬时;
- (2) 电键 K 接通足够长时间,使电流达到稳定值;
- (3) 电流达到稳定值后再断开电键 K 的瞬时;
- (4) 电流达到稳定值后再断开电键 K 足够长时间;
- (5) 电流达到稳定值后再断开电键 K 之后 2s。

[(1) $I_1=I_2=\frac{2}{3}\text{A}$, $I_3=0$;(2) $I_1=I_3=1\text{A}$, $I_2=0$;

(3) $I_1=0$, $I_3=1\text{A}$, $I_2=-1\text{A}$;(4) $I_1=I_2=I_3=0$;

(5) $I_1=0$, $I_3=e^{-\frac{R_2}{L}t}=\frac{1}{e}=0.37\text{A}$; $I_2=-0.37\text{A}$]

12-6 一无限长直导线,通有电流 I ,若电流在其横截面上均匀分布,导线材料的磁导率为 μ ,试证明每单位长度导线内所储存的磁能为

$$W_m=\frac{\mu I^2}{16\pi}$$



12-7 一长直螺线管,管内充满磁导率为 μ 的磁介质。设螺线管的长为 l ,截面积为 S ,线圈匝数为 N 。证明其自感系数 $L = \mu n^2 V$ (式中 V 为螺线管的体积, n 为单位长度的螺线管匝数)。

12-8 一螺线管的自感系数为 10mH ,求当通过它的电流强度为 4A 时,该螺线管所储存的磁场能量。 (0.08J)

12-9 一中空、密绕的长直螺线管,直径为 1.0cm ,长 10cm ,共 1000 匝。求:当通以 1A 电流时,线圈中储存的磁场能量和磁场能量密度。 ($4.93 \times 10^{-4}\text{J}$; $62.8\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)

12-10 将一导线弯成半径 $R=5\text{cm}$ 的圆形环,当其中通有 $I=40\text{A}$ 的电流时,环心处的磁场能量密度为多少? ($0.1\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)

12-11 一截面为长方形的螺绕环,共有 N 匝,环内充满磁导率为 μ 的磁介质,螺绕环内径为 R_1 ,外径为 R_2 ,厚度为 h ,如图 12-16 所示。求此螺绕环的自感。

$$\left(\frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

12-12 什么是位移电流? 比较位移电流与传导电流之间的相似和差异之处。

12-13 证明平行板电容器中的位移电流可以表示为

$$I_d = C \frac{dU}{dt}$$

式中 C 是电容器的电容, U 是两极板间的电势差。

12-14 麦克斯韦方程组包含那几个电磁场的基本定理? 指出各方程的物理意义。

12-15 简述平面电磁波的基本性质。

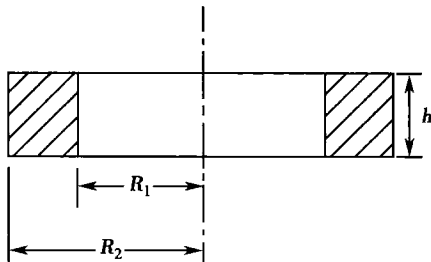


图 12-16 习题 12-11

(鲍修增)

第十三章 波动光学

学习要求:

1. 掌握杨氏双缝干涉、夫琅禾费单缝衍射、光栅衍射的基本原理和公式。
2. 理解光程、光程差、半波损失等概念及薄膜干涉、劈尖干涉、牛顿环的有关原理和公式。
3. 掌握偏振的有关概念及马吕斯定律,理解布儒斯特定律和光的双折射现象。
4. 理解物质的旋光性。
5. 了解圆孔衍射、光弹效应、克尔效应及液晶的光学特性。

光是一种电磁波。通常意义上的光是指可见光,即能引起人的视觉感受的电磁波,其波长范围约为 $400\sim 760\text{nm}$ 。不同波长的可见光给人以不同颜色的视觉感受。光的传播遵循波动的一般规律,本章主要讨论光的干涉、衍射、偏振等现象,阐明其波动性质和基本规律,这些性质和规律不仅在理论上具有重要意义,而且在现代科学技术中有许多应用。

第一节 光的干涉

干涉现象是波动的基本特征之一。满足一定条件的两束光叠加时,在叠加区域,光的强度或明或暗呈现稳定的分布,这种现象称为光的干涉(interference of light)。只有波动的叠加才可能产生干涉现象,因此光的波动性质可以通过干涉现象来证实。1801年,英国物理学家托马斯·杨首次用实验的方法观察到了光的干涉现象,证实了光是一种波动。

一、光的相干性

波动理论指出,只有满足相干条件,即频率相同、振动方向相同、初相位相同或相位差恒定的两列波相遇时才能发生干涉。对机械波而言,上述相干条件比较容易满足。但对光波来说,任何两个独立的普通光源发出的光叠加时却观察不到光的干涉现象,这表明这样的两个独立的光源发出的光不是相干光,这与光源的发光机制有关。

普通光源发出的光是由组成光源的大量原子或分子能级跃迁时辐射的电磁波。每个原子或分子发光持续的时间非常短,约为 10^{-8}s ;它们所发出的电磁波是长度有限的波列,其长度仅为米的量级。我们所看到的光波是由一系列断续的、相互独立的波列组成,如图 13-1 所示。

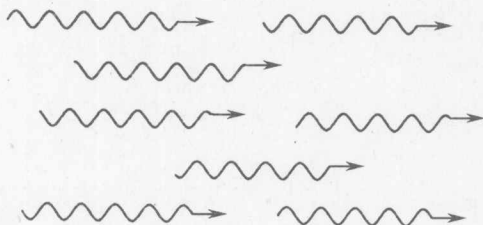


图 13-1 普通光源的发光



Thomas Young(1773—1829)

由于每个原子或分子的发光是随机的,他们所发出的光波波列的初相位没有固定关系,振动方向和频率也不一定相同,因而无法满足相干条件。所以,不仅来自两个独立光源的光波不能相互干涉,即使是同一光源不



同部分发出的光波也不可能产生干涉现象。

要实现光的干涉,首先应设法获得相干光。从原理上说,要利用普通光源获得相干光,可以设法将同一光源同一点发出的光波分成两束,使它们经过不同的路径后再相遇。在这种情况下,每一个原子或分子发出的每一个波列都被分成了两个波列,由于这两个波列是从同一波列分离出来的,它们的频率相同,振动方向相同,在相遇点有恒定的相位差。当原子或分子辐射的初相位改变时,这两个波列的初相位也作相应的改变,所以这两束光波在相遇点的相位差总是保持不变,因而满足相干条件,在相遇区域可以产生干涉现象。

两束频率相同、振动方向相同、初相位相同或相位差恒定的光称为相干光(coherent light)。能发出相干光的光源称为相干光源(coherent source)。要获得明显的干涉现象,除满足上述相干条件外,还应满足以下两个补充条件。

1. 两光波在相遇区域内振幅相差不能过大。否则,弱光将被强光掩盖而无法观察到明显的干涉现象。

2. 两束光波在相遇点的光程差不能太大。否则一光波的波列已通过,而另一光波的相应波列尚未到达,则两波列之间没有重叠,不能产生干涉现象。能够产生干涉现象的最大光程差称为相干长度(coherent length),相干长度等于一个波列的长度。光源的单色性越好,波列的长度就越长,相干长度也就越大,光源的相干性就越好。激光光源具有很高的单色性,其相干长度比普通单色光源的相干长度大得多,所以激光光源是目前最好的相干光源。

从同一普通光源获得相干光源一般有两种方法,一种是分波阵面法,如杨氏双缝实验等;另一种是分振幅法,如薄膜干涉等。

二、光程 光程差

相位差的计算在分析光的叠加现象时十分重要。为了方便地比较和计算光经过不同介质时引起的相位差,需引入光程和光程差的概念。

设有一频率为 ν 的单色光,它在真空中的波长为 λ ,传播速度为 c 。当它在折射率为 n 的介质中传播时,传播速度为 $u=c/n$,波长 $\lambda'=u/\nu=c/n\nu=\lambda/n$ 。这说明,一定频率的光在折射率为 n 的介质中传播时,其波长为真空中波长的 $1/n$ 。波传播一个波长的距离,相位变化 2π 。若光波在折射率为 n 的介质中传播的几何路程为 r ,则相位变化为

$$\Delta\varphi=2\pi\frac{r}{\lambda}=2\pi\frac{nr}{\lambda}$$

上式表明,光波在介质中传播时,其相位的变化不但与光波传播的几何路程及光在真空中的波长有关,而且还与介质的折射率有关。

对于任意介质,如果都采用真空中的波长 λ 来计算相位的变化,那么就需要把光在介质中传播的几何路程 r 乘以折射率 n 。这就是说,就相位变化而言,单色光在折射率为 n 的介质中通过了几何路程 r ,相当于它在真空中通过了 nr 的几何路程。折射率 n 和光所通过的几何路程 r 的乘积 nr 称为光程(optical path)。两束光的光程之差称为光程差(optical path difference),光程差常用 δ 表示。决定光波相位变化的不是几何路程,而是光程和光程差。相位差与光程差的关系为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

如图 13-2 所示,从光源 S_1 和 S_2 发出的同相位的两束相干光波,在与 S_1 、 S_2 等距离的 P 点相

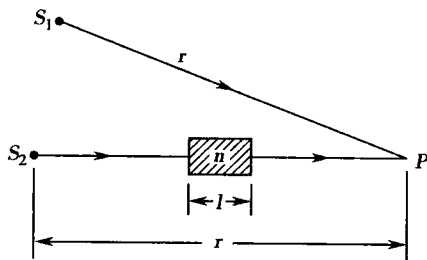


图 13-2 光程和光程差



遇,其中一束光波经过空气,而另一束光波还经过厚度为 l 、折射率为 n 的介质。虽然两束光波的几何路程都是 r ,但光程不同。

光波 S_1P 的光程就是几何路程 r ,而光波 S_2P 的光程却是 $(r-l)+nl$,两者的光程差为

$$\delta = (r-l) + nl - r = (n-1)l$$

由此光程差引起的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)l$$

在光学实验中,薄透镜是常用的光学元件。它可以改变光的传播方向,对光进行会聚、发散或产生平行光。但薄透镜的引入是否会产生附加的光程差呢?我们知道,从物点发出的光经透镜后会聚成一个明亮的像点;平行光通过透镜后,各光线要会聚在焦点处,形成一亮点。这说明同相位的光经过透镜后到达会聚点时仍然是同相位的。上述实验结果表明:薄透镜只改变光的传播方向,但对各近轴光线不会产生附加的光程差,这称为薄透镜的等光程性。

三、杨氏双缝实验

1801年,英国物理学家、医生托马斯·杨(Thomas Young)首先用实验的方法观察到了光的干涉现象,这就是杨氏双缝干涉实验。该实验为光的波动学说的建立奠定了实验基础,并在历史上首次完成了光波波长的测量。

杨氏双缝干涉实验装置如图 13-3 所示。单色平行光投射到一狭缝 S 上, S 后放有两条与 S 平行且等距的平行狭缝 S_1 和 S_2 。根据惠更斯原理, S_1 、 S_2 形成两个新的子波源。由于 S_1 和 S_2 在 S 发出的同一波阵面上,因而具有完全相同的振动特征,构成两个相干光源。由 S_1 和 S_2 发出的光波在空间相遇而产生干涉现象,在屏幕 AC 上形成稳定的明暗相间的干涉条纹。由于两相干光来自同一波阵面,这种获得相干光的方法称为分波阵面法。

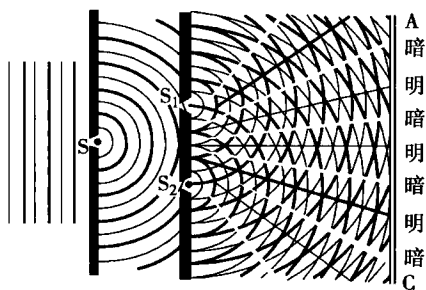


图 13-3 杨氏双缝干涉实验

下面分析屏幕上出现明暗条纹应满足的条件。如图 13-4 所示,设 S_1 、 S_2 间的距离为 d ,

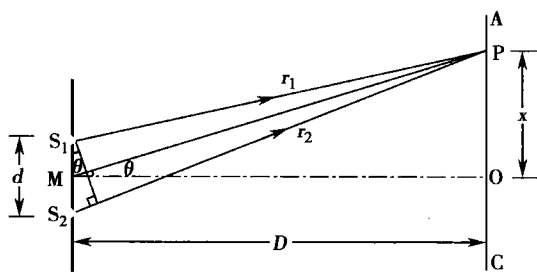


图 13-4 干涉条纹的推导

其中点为 M 。从 M 到屏 AC 的距离为 D ,且 $D \gg d$ 。在屏上任意取一点 P , P 与 S_1 和 S_2 间的距离分别为 r_1 和 r_2 , P 到屏的中心点 O (M 点在屏上的投影)的距离为 x ,则由 S_1 、 S_2 所发出的光波到 P 点的光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta \approx d \frac{x}{D}$$

根据波动理论,若入射光的波长为 λ ,则当

$$\delta = \frac{d \cdot x}{D} = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \text{ 或 } x = \pm k \frac{D}{d} \lambda, k=0,1,2,\dots \quad (13-1)$$

时,两光波在 P 点相互加强, P 点处出现明条纹。式中 k 为干涉级数,当 $k=0$ 时, $x=0$,即在 O 点处出现明条纹,称为中央明条纹或称零级明条纹;与 $k=1,2,3,\dots$ 对应的明条纹分别称为第一级,第二级,第三级, \dots 明条纹。式中的正、负号表示条纹在中央明条纹两侧对称分布。



$$\text{当 } \delta = \frac{d \cdot x}{D} = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2}, \text{ 或 } x = \pm(2k-1)\frac{D\lambda}{2d}, k=1,2,3,\dots \quad (13-2)$$

时,两光波在 P 点互相削弱,P 点处出现暗条纹。与 $k=1,2,3,\dots$ 对应的暗条纹分别称为第一级,第二级,第三级, \dots 暗条纹。

由式(13-1)或式(13-2)可以计算出两相邻明条纹或暗条纹中心间的距离,即条纹间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda \quad (13-3)$$

此结果表明 Δx 与 k 无关,因此干涉条纹是等间距分布的。用不同波长的单色光源做实验时,条纹的间距不相同,波长短的单色光条纹间距小;波长长的单色光条纹间距大。如果用白光做实验,只有中央明条纹是白色的,其他各级都是由紫到红的彩色条纹。

[例 13-1] 如图 13-5 所示,在杨氏双缝实验中,已知双缝间的距离为 0.60mm ,缝与屏相距 1.50m 。若测得相邻明条纹间的距离为 1.50mm 。(1)求入射光的波长;(2)若以折射率 $n=1.30$,厚度 $l=0.01\text{mm}$ 的透明薄膜遮住其中一缝,原来的中央明纹处将变为第几级明条纹?

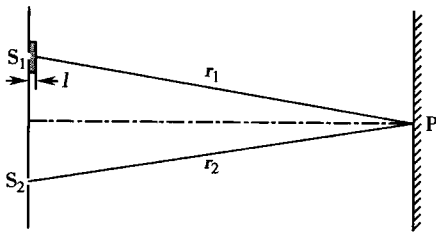


图 13-5 例 13-1

解:(1) 由 $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$ 得

$$\lambda = \frac{\Delta x d}{D} = \frac{1.50 \times 10^{-3} \times 0.60 \times 10^{-3}}{1.50} = 6.00 \times 10^{-7} (\text{m}) = 600 (\text{nm})$$

(2) 未遮薄膜时,中央明纹处的光程差为 $\delta = r_1 - r_2 = 0$;遮上薄膜后,光程差为

$$\delta = (r_1 - l + nl) - r_2 = (n-1)l$$

设此处为第 k 级明纹,则

$$(n-1)l = k\lambda$$

$$k = \frac{(n-1)l}{\lambda} = \frac{(1.30-1) \times 0.01 \times 10^{-3}}{6.00 \times 10^{-7}} = 5$$

原来的中央明纹处将变为第 5 级明条纹。

四、劳埃德镜实验

劳埃德镜(Lloyd mirror)是另一种观察光的干涉现象的实验装置,如图 13-6 所示。KL 为一块背面涂黑的玻璃片(劳埃德镜),从狭缝 S_1 射出的光,一部分直接射到屏幕 E 上,另一部分经玻璃面 KL 反射后到达屏幕 E 上,反射光可看成是由虚光源 S_2 发出的。 S_1 、 S_2 构成一对相干光源。图中画有阴影的区域表示相干光叠加的区域。这样,在处在阴影区域的屏幕 E 上可以观察到明暗相间的干涉条纹。

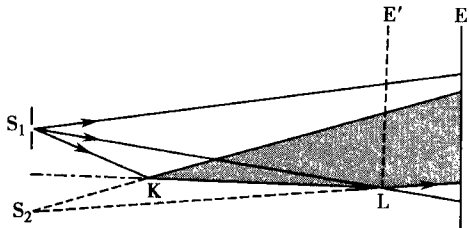


图 13-6 劳埃德镜实验简图

若把屏幕移到和镜端相接触的位置 $E'L$ 上时,实验显示在屏幕和镜面的接触处出现一暗条纹。这表明,直接射到屏幕上的光与由镜面反射出来的光在 L 处的相位相反,即相位差为 π 。由于直接射到屏幕上的光不可能有这个变化,所以只能认为光从空气射向玻璃发生反射时,反射光有大小为 π 的相位突变。相位差 π 相当于光波多走(或少走)了半个波长的距离,



这个现象称为半波损失(half-wave loss)。

劳埃德镜实验不但显示了光的干涉现象,证实了光的波动性,而且更重要的是它证实了光由光疏介质射向光密介质表面发生反射时,反射光会发生半波损失。

五、薄膜干涉

在日常生活中常可观察到薄膜干涉现象。当太阳光照在肥皂膜或油膜上时,能观察到彩色条纹,这就是薄膜干涉现象。

如图 13-7 所示,设空气中的平行平面薄膜厚度为 e ,折射率为 n 。入射光 a 到达薄膜的表面时,一部分被反射,另一部分进入薄膜,在膜的后表面被反射回来再经前表面折射而出。这样形成的两束光 b 和 c 均来自于同一入射光线,只是经历了不同的路径而有恒定的相位差,因此它们是相干光,经透镜 L 会聚而发生干涉。

光束 b 和 c 的光程差为

$$\delta = n(AB + BC) - AD + \frac{\lambda}{2}$$

式中, $\lambda/2$ 是光束 b 在上表面反射时发生半波损失而产生的附加光程差。

$$AB = BC = \frac{e}{\cos \gamma}, AD = AC \cdot \sin i = 2e \tan \gamma \cdot \sin i$$

根据折射定律 $n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$, 光程差 δ 为

$$\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

于是,平行平面薄膜反射光干涉的明、暗纹条件为

$$\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3, \dots \text{干涉加强, 形成明纹} \\ (2k-1) \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3, \dots \text{干涉削弱, 形成暗纹} \end{cases} \quad (13-4)$$

上式表明,光程差 δ 随入射光线的倾角 i 的改变而改变。具有相同入射角 i 的入射光有相同的光程差,因而它们干涉加强或削弱的情形是一样的,这种干涉称为等倾干涉(equal inclination interference)。

若光波垂直入射,其结果为上述讨论在 $i=0$ 时的特殊情形。

此外,透射光也能产生干涉现象。由于不存在半波损失,这两条透射的相干光之间的光程差

$$\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \quad (13-5)$$

比较(13-4)和(13-5)两式可知,对某一入射光而言,反射光的光程差与透射光的光程差正好相差 $\lambda/2$ 。即当反射光干涉加强时,透射光却干涉削弱,这正是能量守恒的体现。

[例 13-2] 照相机的透镜常镀上一层透明薄膜,目的是利用干涉原理来减少表面的反射,使更多的光进入透镜。常用的镀膜物质是氟化镁(MgF_2),它的折射率 $n=1.38$ 。如果要使可见光谱中 $\lambda=550\text{nm}$ 的光有最小反射,问膜的厚度应是多少?

解:若光波垂直入射,图 13-8 中入射角 $i=0$ 。由于两次反射都有半波损失,因此两反射光波互相削弱的条件是

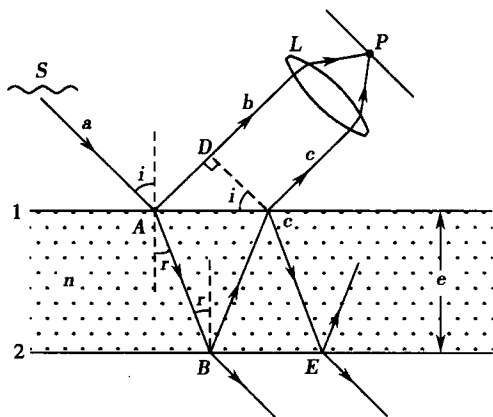
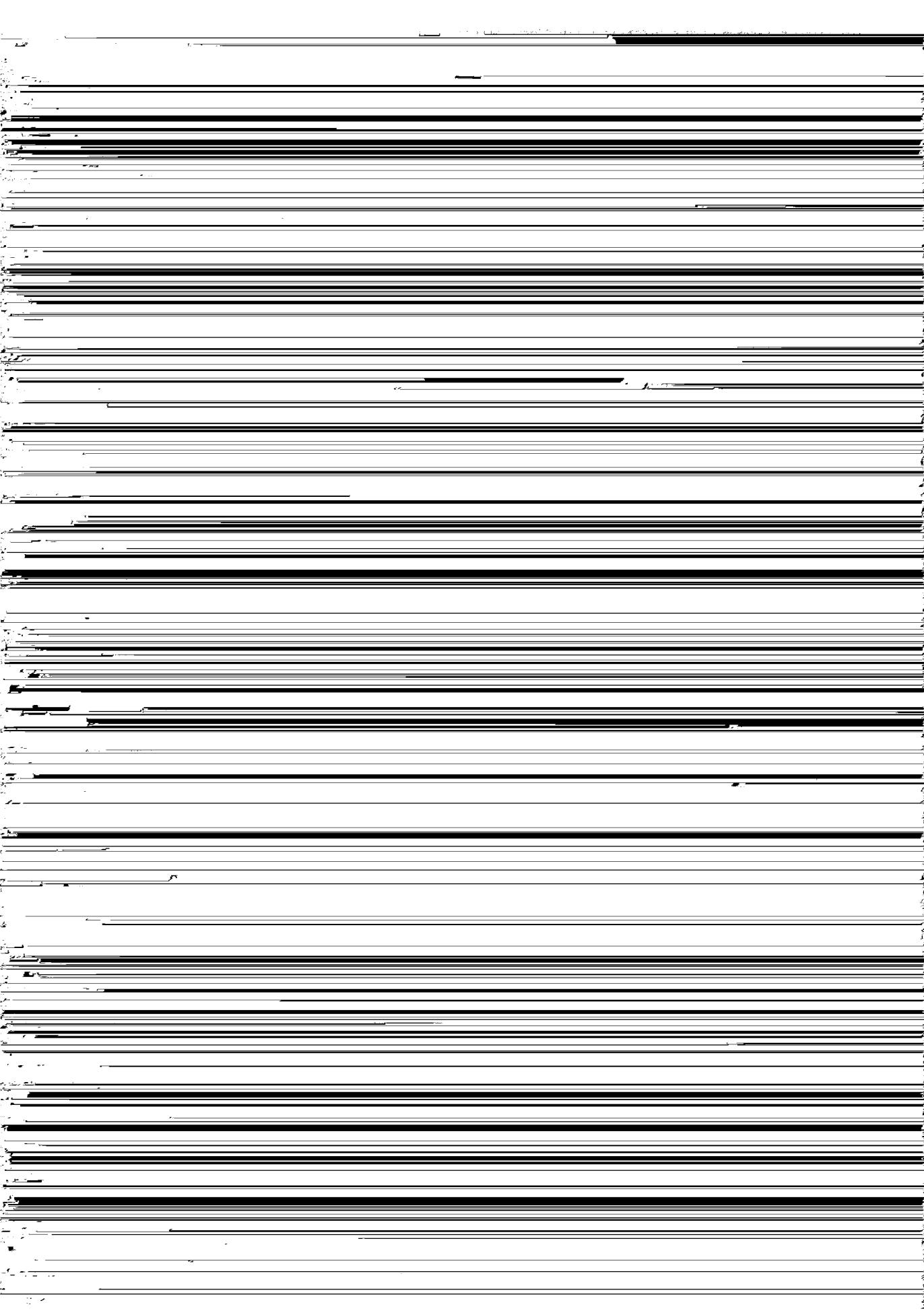


图 13-7 薄膜干涉





则

$$L = \frac{\lambda}{2n\sin\theta} \quad (13-8)$$

通常 θ 很小, 所以 $\sin\theta \approx \theta$, 上式又可写为

$$L = \frac{\lambda}{2n\theta} \quad (13-9)$$

式(13-8)和式(13-9)表明, 劈尖干涉形成的干涉条纹是等间距的。条纹间距与劈尖角 θ 有关。 θ 越大, 条纹间距越小, 条纹越密。当 θ 大到一定程度时, 条纹就密得无法分开。所以干涉条纹只能在劈尖角度很小时才能观察到。

2. 牛顿环 在一块光平的玻璃片 B 上, 放置一个曲率半径 R 很大的平凸透镜 A, 在 A、B 间形成一薄的劈形空气层, 如图 13-10(a) 所示。当用平行单色光垂直入射平凸透镜时, 在空气层的上、下表面发生反射, 形成两束向上的相干光, 这两束相干光在平凸透镜下表面处相遇而发生干涉, 可以观察到一组以接触点 O 为中心, 明暗相间, 内疏外密的同心圆环, 称为牛顿环(Newton ring), 如图 13-10(b) 所示。这两束相干光的光程差为

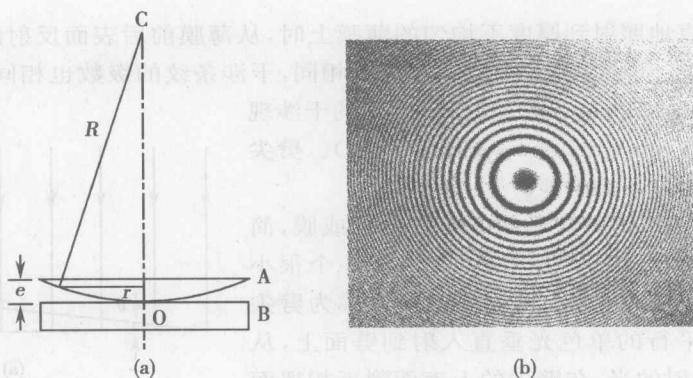


图 13-10 牛顿环实验

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

其中, e 是空气层的厚度, $\lambda/2$ 是光在空气层与玻璃板表面的分界面上反射时产生的半波损失。由于这一光程差由空气薄层的厚度决定, 所以牛顿环也是一种等厚条纹。又由于空气层的等厚线是以 O 为中心的同心圆, 所以干涉条纹成为明暗相间的圆环。

形成明环的条件为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (13-10)$$

形成暗环的条件为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (13-11)$$

在中心处 $e=0$, 因有半波损失, 两相干光光程差为 $\lambda/2$, 所以形成一暗斑。

设牛顿环的半径为 r , 由图 13-11(a) 可以看出, r 与 R 的关系为

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (R-e)^2 \\ &= 2Re - e^2 \end{aligned}$$

因为 $R \gg r$, 此式中 e^2 可以略去, 于是得

$$r^2 = 2Re$$

则明环半径为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (13-12)$$



暗环半径为

$$r = \sqrt{kR\lambda}, k=0,1,2,\dots \quad (13-13)$$

可见半径 r 与环的级数的平方根成正比, 所以从环心越向外, 圆环的分布越密。

第二节 光的衍射

光波绕过障碍物传播的现象称为光的衍射(diffraction of light)。衍射后所形成的明暗相间的图样称为衍射图样。干涉和衍射现象都是波动所固有的特性。

根据观察方式的不同, 可把光的衍射现象分为两类: 一类是光源和观察屏(或二者之一)与障碍物之间的距离是有限的, 这一类衍射称为菲涅耳衍射(Fresnel diffraction); 另一类是光源和观察屏与障碍物之间的距离都是无限远或等效于无限远的, 这一类衍射称为夫琅禾费衍射(Fraunhofer diffraction)。下面的讨论只限于夫琅禾费衍射。实验中观察光的夫琅禾费衍射是借助于两块会聚透镜来实现的。其中一块放在障碍物前, 把点光源发出的光变成平行光, 另一块放在障碍物后, 使经过障碍物后的衍射光在透镜的焦平面上成像。这样既可增加衍射图样的强度, 又可保持衍射的性质不变, 更便于观察。

一、单缝衍射

单缝衍射的实验装置如图 13-11 所示。光源 S 放在透镜 L_1 的前焦点上, 观察屏 E 放在透镜 L_2 的后焦平面上。当平行光垂直照射到狭缝 K 上时, 在屏幕 E 上将出现明暗相间的衍射图样。

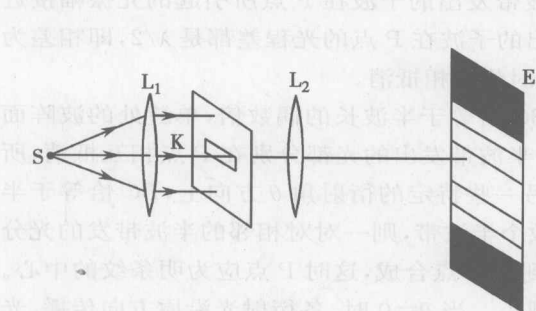


图 13-11 单缝衍射

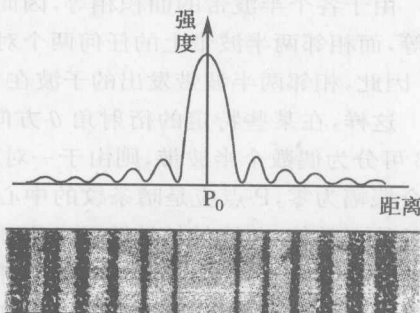


图 13-12 单缝衍射图样

如果 S 是单色光源, 其衍射图样是一组与狭缝平行的明暗相间的条纹, 正对狭缝的是中央明纹, 两侧对称分布着各级明暗条纹。条纹的分布是不均匀的, 中央明纹光强最大亦最宽, 其他明纹的光强迅速下降且随着级数的增大逐渐减小, 如图 13-12 所示。图中的曲线表示光强的分布, 光强的极大值、极小值与各级明、暗条纹的中心相对应。

单缝衍射可用半波带法(half wave zone method)加以说明。如图 13-13(a)所示。设单缝的宽度为 a , 入射光的波长为 λ 。根据惠更斯原理, 当平行光垂直照射到狭缝上时, 位于狭缝所在处的波阵面 AB 上的每一点都是一个新的子波源, 向各个方向发射子波。狭缝后面空间任意一点的光振动都是这些子波传到该点的振动的相干叠加, 其加强或减弱的情况, 决定于这些子波到达该点时的光程差。

其中, 平行于光轴(即沿入射方向)的子波经过透镜 L_2 会聚于屏幕 E 上的中央位置 P_0 处, 且任意两条对称子波到达该点时的光程差均为零, 他们在 P_0 处两两相干加强形成明条纹, 称中央明纹。

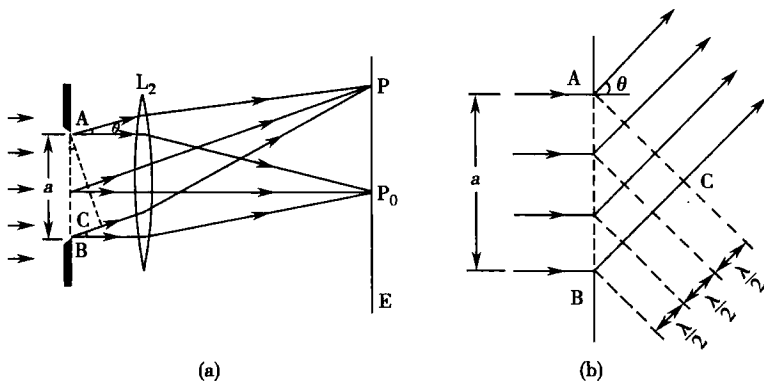


图 13-13 单缝衍射条纹的形成

对于沿其他与入射方向成 θ 角方向传播的平行子波,他们经透镜 L_2 会聚在屏幕 E 上的某点 P , θ 称衍射角。从 A 点作 AC 垂直于 BC , 由于光线经过透镜会聚后不会产生附加的光程差,这束平行子波的两边缘光线之间的光程差为

$$BC = a \sin \theta$$

BC 亦是这束平行子波的最大光程差, P 点的明暗程度完全决定于光程差 BC 的量值。

如果这个光程差 BC 刚好等于入射光的半波长的整数倍,可做一些平行于 AC 的平面,使两相邻平面之间的距离都等于 $\lambda/2$, 这些平面将把单缝处的波阵面 AB 分为整数个面积相等的部分,每一个部分称为一个半波带,如图 13-13(b) 所示。

由于各个半波带的面积相等,因而各个半波带发出的子波在 P 点所引起的光振幅接近相等,而相邻两半波带上的任何两个对应点发出的子波在 P 点的光程差都是 $\lambda/2$, 即相差为 π 。因此,相邻两半波带发出的子波在 P 点合成时将互相抵消。

这样,在某些特定的衍射角 θ 方向上,若 BC 恰等于半波长的偶数倍,单缝处的波阵面 AB 可分为偶数个半波带,则由于一对对相邻的半波带发出的光都分别在 P 点相互抵消,所以合振幅为零, P 点应是暗条纹的中心。而在另一些特定的衍射角 θ 方向上, BC 恰等于半波长的奇数倍,单缝处的波阵面 AB 可分为奇数个半波带,则一对对相邻的半波带发的光分别在 P 点相互抵消后,还剩一个半波带发的光到达 P 点合成,这时 P 点应为明条纹的中心。此外, θ 角越大,半波带面积越小,明纹光强就越小。当 $\theta=0$ 时,各衍射光沿原方向传播,光程差为零,通过透镜后聚焦在屏幕的中心 P_0 , 这就是中央明纹的中心位置,该处光强最大。

除在上述特定衍射角 θ 方向上形成明条纹或暗条纹外,在其他的衍射角 θ 方向上, BC 不再恰好等于半波长的整数倍, AB 亦就不能分成整数个半波带,此时,衍射光束在屏上形成介于明和暗之间的中间区域。

综上所述,当平行光垂直于单缝平面入射时,单缝衍射条纹的明暗条件为

$$a \sin \theta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3, \dots \text{暗纹中心} \quad (13-14)$$

$$a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3, \dots \text{明纹中心} \quad (13-15)$$

$$\theta=0 \text{ 中央明纹中心} \quad (13-16)$$

式中 k 为衍射的级数, $k=1, 2, 3, \dots$ 依次为第一级、第二级、第三级...暗纹或明纹,正负号表示条纹对称分布于中央明纹的两侧。

两个对称的第一级暗条纹中心间的距离即为中央明纹的宽度。考虑到一般 θ 角较小,中央明纹的半角宽度为



$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (13-17)$$

若 f 为透镜 L_2 的焦距, 则屏上中央明纹的宽度为

$$\Delta x = 2f \tan\theta \approx 2f \sin\theta = 2f \frac{\lambda}{a} \quad (13-18)$$

屏上各级暗条纹的中心与中央明纹中心的距离为

$$x = \pm k f \frac{\lambda}{a} \quad (13-19)$$

如果把相邻暗条纹中心之间的距离 $f\lambda/a$ 定义为一条明条纹的宽度, 则中央明纹的宽度既是其他明纹宽度的两倍, 也是第一级暗纹中心与中央明纹中心距离的两倍。

式(13-18)表明, 中央明纹的宽度正比于波长 λ , 反比于缝宽 a 。缝越窄, 衍射越显著; 缝越宽, 衍射越不明显。当缝宽 $a \gg \lambda$ 时, 各级衍射条纹向中央靠拢, 密集得以至无法分辨, 只能观察到一条明条纹, 它就是透镜所形成的单缝的像。由此可见, 光的直线传播现象是光的波长较障碍物的线度小很多时, 衍射现象不显著的情形。所以, 几何光学是波动光学在 $\lambda/a \rightarrow 0$ 时的极限情形。

当缝宽 a 一定时, 入射光的波长 λ 越大, 衍射角也越大。因此, 若以白光照射, 中央明纹将是白色的, 而其两侧则呈现出一系列由紫到红的彩色条纹。

二、圆孔衍射

在图 13-11 所示的单缝衍射装置中, 如果用一直径为 D 的小圆孔代替狭缝, 那么在光屏上就可得到如图 13-14 所示的圆孔衍射的图样。图样的中央是一明亮的圆斑, 周围是一组明暗相间的同心圆环。由第一暗环所包围的中央亮斑称为艾里斑(Airy disk), 它集中了约 84% 的衍射光能量。其半角宽度为

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (13-20)$$

若 f 为透镜 L_2 的焦距, λ 为入射光的波长, 则艾里斑的半径为

$$r = f\theta = 1.22 f \frac{\lambda}{D} \quad (13-21)$$

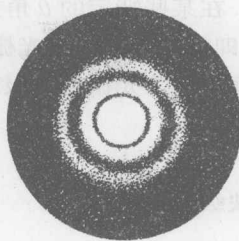


图 13-14 圆孔衍射图样



在衍射角为任意角 θ 的方向上,从任意相邻两狭缝的对应点发出的光到达 P 点的光程差都是 $d\sin\theta$ 。由波的叠加规律可知,当 θ 满足下式时,所有的缝发出的光到达 P 点时都是同相的,它们将彼此加强,形成明条纹

$$d\sin\theta = \pm k\lambda, k=0, 1, 2, \dots \quad (13-22)$$

式(13-22)称为光栅方程(grating equation)。式中 k 表示明条纹的级数, $k=0$ 的明条纹称为中央明条纹; $k=1, 2, \dots$ 时分别称为第一级、第二级...明条纹,正负号表示各级明纹对称分

布于中央明纹的两侧。在满足光栅方程的那些特殊方向上,各缝发出的光才可能彼此加强,形成一系列细窄而明亮的光栅衍射条纹。

由光栅方程可以看出,光栅常量愈小,各级明条纹的衍射角就愈大,即各级明条纹分得愈开。对给定长度的光栅,总缝数愈多,明条纹愈亮。对光栅常量一定的光栅,入射光波长愈大,各级明条纹的衍射角也愈大。如果是白光(或复色光)入射,则除中央明条纹外,其他各级明条纹都按波长不同各自分开,形成光栅光谱(grating spectrum)。通过光栅光谱可以了解原子、分子的内部结构,还可以了解物质由哪些元素组成及每种元素所占的百分比,因此光栅已成为光谱分析仪器的核心部件。

在某些特定的 θ 角方向,若每一单缝恰满足单缝衍射形成暗纹的条件 $a\sin\theta = \pm k'\lambda$ 。此时,即使同时又满足光栅方程 $d\sin\theta = \pm k\lambda$,则在此本该出现明纹的位置将缺失该级明纹,这一现象称为光栅的缺级现象(missing order)。在缺级处有

$$\begin{aligned} d\sin\theta &= \pm k\lambda, k=1, 2, 3, \dots \\ a\sin\theta &= \pm k'\lambda, k'=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

则缺级数 k 为

$$k = \pm \frac{d}{a} k', k'=1, 2, 3, \dots \quad (13-23)$$

例如,当 $d/a=4$ 时,则缺级的级数为 $\pm 4, \pm 8, \dots$ 。

理论上,光栅光谱的最大衍射角 $\theta=90^\circ$,所对应的光栅谱线的最高级数 $k_{\max} = \frac{d}{\lambda}$ 。

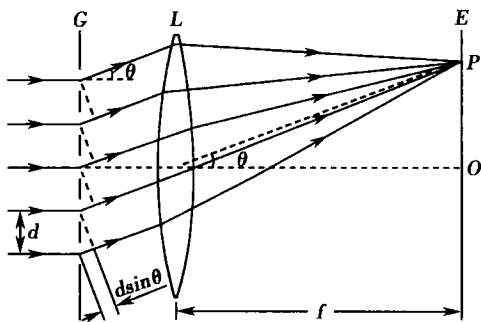


图 13-15 光栅衍射

第三节 光的偏振

光的干涉和衍射现象证实了光是一种波动,而光的偏振现象则进一步证实了光的横波性质,它们有力地证明了光的电磁理论的正确性。

一、自然光和偏振光

光是电磁波,而电磁波是横波。其电场强度矢量 \mathbf{E} 和磁感应强度矢量 \mathbf{B} 相互垂直并都垂直于光的传播方向。在光波的 \mathbf{E} 矢量和 \mathbf{B} 矢量中,能引起感光作用和生理作用的主要是 \mathbf{E} 矢量,所以一般把 \mathbf{E} 矢量称为光矢量(light vector),把 \mathbf{E} 矢量的振动称为光振动,并以它的振动方向代表光的振动方向。

由于原子、分子发光的独立性和间歇性,普通光源发出的光中包含有各个方向的光矢量,且没有哪一个方向的光振动比其他方向更占优势。也就是说,普通光源发出的光在所有



可能的方向上, E 矢量的振幅都相等, 这样的光称为自然光(natural light)。这样, 我们可以用两个相互垂直, 取向任意且等振幅的光振动表示自然光, 如图 13-16(a) 所示。

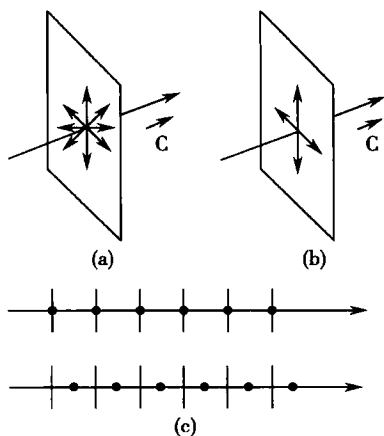


图 13-16 自然光的图示法

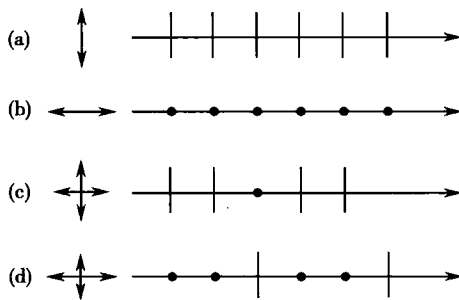


图 13-17 偏振光和部分偏振光的图示法

如果在垂直于光波传播方向的平面内, 光矢量只沿一个固定的方向振动, 这样的光称为线偏振光, 亦称为平面偏振光, 简称为偏振光(polarized light), 如图 13-17(a)、(b) 所示。偏振光的振动方向和光的传播方向构成的平面称为偏振光的振动面(plane of vibration); 与振动面垂直而且包含有传播方向的平面称为偏振面(plane of polarization)。

如果光波的光矢量 E 在某一特定方向上最强, 或者说有更多的光矢量取向于该方向, 即不同方向光振动的振幅各不相同, 这样的光称为部分偏振光(partial polarized light), 如图 13-17(c)、(d) 所示。

还有一种偏振光, 它的光矢量随时间作有规律的改变, 光矢量的末端在垂直于传播方向的平面上的轨迹呈现出椭圆或圆, 这样的光称为椭圆偏振光(elliptically polarized light)或圆偏振光(circularly polarized light)。如果迎着光线看时光矢量顺时针旋转, 则称为右旋椭圆(或圆)偏振光; 光矢量逆时针旋转, 则称为左旋椭圆(或圆)偏振光。

由于任何一个方向的振动都可以分解为两个相互垂直方向的振动, 因此自然光可以分解为方向垂直取向任意的两个相互垂直的偏振光, 且这两个偏振光振幅相等, 其强度各等于自然光强度的一半。所以, 自然光也可以用图 13-16(b)、(c) 所示的符号表示。值得注意的是, 这两个分振动是相互独立的, 没有固定的相位关系, 不能合成为一个偏振光。

二、马吕斯定律

普通光源发出的光是自然光, 自然光通过某些光学器件后会变成偏振光。将自然光变成偏振光的过程称为起偏, 而能够把自然光变成偏振光的光学器件称为起偏器(polarizer)。偏振片是常用的起偏器。

某些物质能有选择地吸收某一方向的光振动, 而只让与这个方向垂直的光振动通过, 具有这样性质的物质即可成为偏振片(polaroid)。偏振片只允许某一特定方向的光振动通过, 这个方向称为偏振片的透射轴或偏振化方向。自然光通过偏振片后即成为振动方向平行于偏振片透射轴方向的偏振光, 其强度为入射自然光强度的一半。

人眼不能分辨光波的振动方向, 也无法辨别自然光和偏振光。用于检测光波是否是偏振光并确定其振动方向的装置称为检偏器(analyzer)。起偏器与检偏器没有本质区别, 只是在偏振光仪器中作用不同而已。偏振片用于产生偏振光时起起偏器的作用, 用于检测偏振



光时起检偏器的作用。

图 13-18 中, P 和 A 分别为起偏器和检偏器。图 13-18(a) 中, 自然光通过 P 后成为偏振光。若 P 和 A 的透射轴方向一致, 则通过 P 的光振动能完全通过 A, 在 A 的后面透射光强最强, A 后的视场最亮。如果把 A 绕光波行进方向旋转, A 后的视场将由明变暗; 当旋转 90° 时, 即 P 和 A 的透射轴方向相互垂直, 如图 13-18(b) 所示, 则通过 P 的偏振光完全不能通过 A, 此时 A 后的视场将完全变暗, 这种现象称为消光现象。

若起偏器 P 和检偏器 A 的透射轴成一任意角度 θ , 而透过 P 的偏振光的振幅为 E_0 , 如图 13-19 所示。我们可以将 E_0 分解为沿检偏器 A 的透射轴方向和垂直于这一方向的两个分量 E_1 和 E_2 。显然, 只有分量 E_1 可以通过检偏器 A。这样, 在不考虑 A 的反射和吸收的情况下, 透过检偏器 A 的透射光的振幅为

$$E_1 = E_0 \cos \theta$$

因光的强度与光的振幅的平方成正比, 因此, 通过 A 的偏振光的强度 I 和通过前的强度 I_0 有如下关系

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E_1^2}{E_0^2} = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{E_0^2} = \cos^2 \theta$$

由此得

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (13-24)$$

这一公式称为马吕斯定律(Malus law)。它指出, 通过检偏器的偏振光的强度与检偏器的透射轴的方向有关, 如果透射轴方向与入射光振动方向之间的角度为 θ , 则通过它的光强与 $\cos^2 \theta$ 成正比。

由式(13-24)可见, 当 $\theta = 0^\circ$ 或 180° 时, $I = I_0$, 透射光强最大; 当 $\theta = 90^\circ$ 或 270° 时, $I = 0$, 没有光从检偏器射出, 这就是两个消光位置; 当 θ 为其他值时, 光强 I 介于 0 和 I_0 之间。

三、布儒斯特定律

自然光在两种各向同性介质的分界面发生反射和折射时, 反射光和折射光一般都是部分偏振光。在反射光中, 垂直于入射面的光振动多于平行光振动; 而在折射光中, 平行入射面的光振动多于垂直光振动, 如图 13-20 所示。

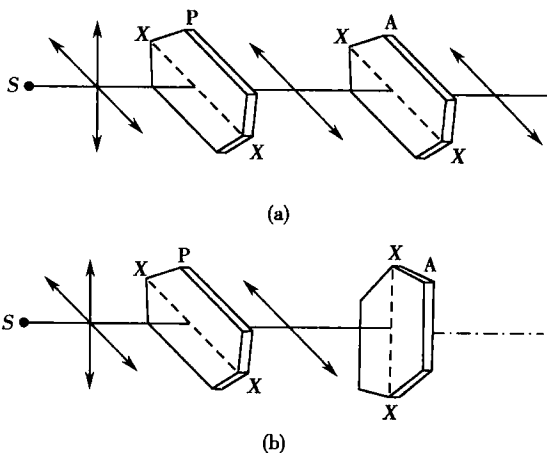


图 13-18 起偏和检偏

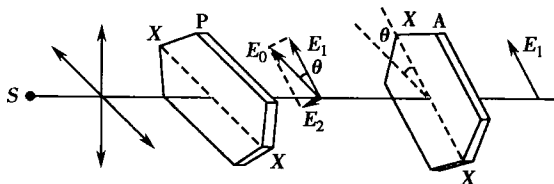


图 13-19 马吕斯定律

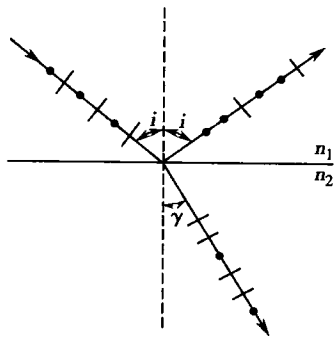


图 13-20 反射光和折射光的偏振



1812年,布儒斯特(D. Brewster)在实验中发现,反射光的偏振化程度和入射角有关。当入射角 i_0 和折射角 γ 之和等于 90° 时,即反射光和折射光垂直时,反射光即成为光振动垂直于入射面的偏振光,如图13-21所示。这时入射角称为布儒斯特角(Brewster angle)或起偏角。根据折射定律有

$$n_1 \sin i_0 = n_2 \sin \gamma = n_2 \cos i_0$$

即

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} \quad (13-25)$$

式(13-25)称为布儒斯特定律。

当自然光以布儒斯特角入射时,反射光中只有垂直于入射面的光振动,入射光中平行于入射面的光振动全部被折射,垂直于入射面的光振动也大部分被折射,而反射的仅是其中的一部分。因此,反射光虽然是完全偏振的,但光强较弱;而折射光虽然是部分偏振的,光强却很强。

当自然光以布儒斯特角从空气射向玻璃时,由玻璃反射获得的偏振光仅占入射自然光总能量的7%。如果让自然光以布儒斯特角入射到如图13-22所示的玻片堆上,则入射光中垂直于入射面的光振动在玻片堆的每一个分界面上都要被反射掉一部分,而与入射面平行的光振动在各分界面上都不被反射。当玻片数量足够多时,从玻片堆透射出的光就非常接近偏振光,其振动方向与入射面平行。因此,玻片堆可以作起偏器或检偏器。

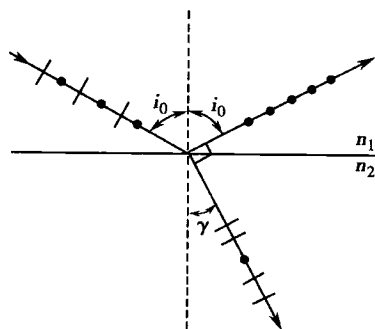


图 13-21 布儒斯特角

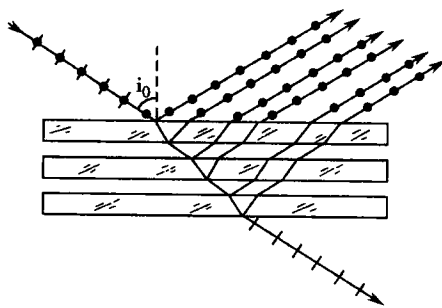


图 13-22 玻片堆

四、光的双折射

当我们透过透明的方解石晶体(CaCO_3)观察书上的字迹时,可以看到字迹的双重像,如图13-23所示。这表明一束光线射入各向异性的介质后产生了两束折射光线,这种现象称为双折射(birefringence)。

在双折射产生的两束折射光中,一束折射光总是遵守折射定律,这束折射光称为寻常光(ordinary light),简称o光。另一束折射光则不遵守折射定律,它不一定在入射面内,而且对不同的入射角 i , $\sin i / \sin \gamma$ 的量值也不是常量,这束折射光称为非常光(extraordinary light),简称e光。在入射角 $i=0$ 时,o光沿原方向传播,e光一般不沿原方向传播。此时如果把晶体绕光的入射方向慢慢转动,o光始终不动,e光则随着晶体的转动而转动,如图13-24所示。

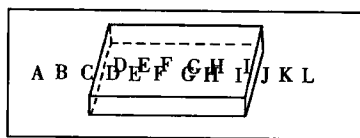


图 13-23 双折射现象

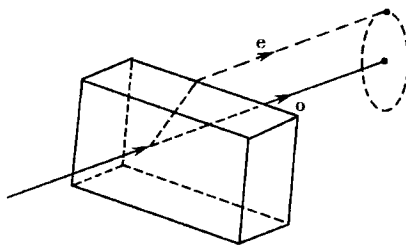


图 13-24 o光和e光



研究表明,在晶体内存在某些特殊的方向,光沿这些特殊方向传播时不发生双折射,这些特殊方向称为晶体的光轴。需要指出的是,光轴仅标志双折射晶体的一个特定方向,任何平行于这个方向的直线都是晶体的光轴(optical axis)。只有一个光轴的晶体称为单轴晶体(uniaxial crystal)。有两个光轴的晶体称为双轴晶体(biaxial crystal)。方解石、石英、红宝石、冰等是单轴晶体,云母、硫磺、蓝宝石等是双轴晶体。本节的讨论仅限于单轴晶体。

在晶体中,任一已知光线与光轴所组成的平面称为该光线的主平面(principal plane)。o光和e光都是偏振光,但是它们的振动方向不同。o光的振动方向垂直于o光的主平面;e光的振动方向在e光的主平面内。当晶体光轴在入射面内时,o光和e光的主平面重合,o光和e光的振动方向互相垂直。一般情况下,o光的主平面与e光的主平面有一个不大的夹角,因而,o光和e光的振动方向不完全垂直。

在晶体内部,o光在各个方向上传播速度相等,折射率也相等;e光在各个方向上的传播速度不同,折射率也就不同。因此在晶体中,子波源发出的o光的波阵面是球面,亦称为o波面;e光的波阵面是旋转椭球面,亦称为e波面,如图13-25所示。由于o光和e光沿光轴方向具有相同的传播速度,因此任何时刻o光和e光的波面在光轴上都是相切的。换言之,在光轴方向上,o光和e光具有相同的传播速度和折射率。然而在垂直于光轴的方向上,o光和e光的传播速度相差最大。若o光的传播速度用 u_o 表示,折射率用 n_o 表示。e光在垂直于光轴方向上的传播速度用 u_e 表示,折射率用 n_e 表示,真空中的光速用 c 表示,则有 $n_o = c/u_o$, $n_e = c/u_e$, n_o 和 n_e 称为晶体的主折射率(principal refractive index)。在有些晶体中, $u_o > u_e$,即 $n_o < n_e$,这类晶体称为正晶体(positive crystal),如石英和冰等;在另外一些晶体中, $u_o < u_e$,即 $n_o > n_e$,这类晶体称为负晶体(negative crystal),如方解石和红宝石等。

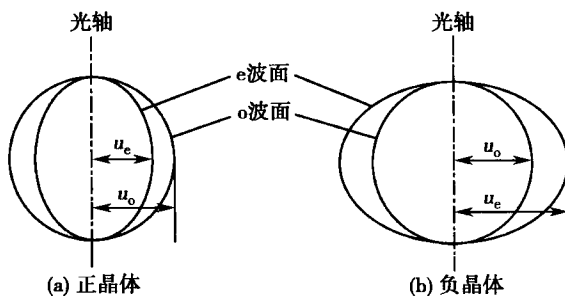


图 13-25 单轴正晶体和负晶体中的子波波阵面

双折射现象可以用惠更斯原理来说明。当自然光入射到晶体上时,波阵面上的每一点都可以作为子波源向晶体内发出球面子波和椭球面子波。作所有各点所发子波的包络面,即得晶体中o光的波面和e光的波面。从入射点引向相应于子波波阵面与光波波面的切点的连线,就是晶体中o光、e光的传播方向。图13-26分别作出了三种不同情况下单轴负晶体中o光和e光的传播方向。从图中(a)、(b)可以看出o光、e光折射后沿不同方向传播,产生了双折射。在(c)图中,尽管o光、e光的传播方向没有改变,但两者的波面并不重合,它们一快一慢沿同一方向传播,到达同一位置时,两者间有一定的相位差,仍然是有双折射的。

五、二向色性和偏振片

有些单轴晶体除了能产生双折射外,对o光和e光的吸收程度有很大的不同。例如电气石晶体,它对o光有强烈的吸收作用,而对e光则吸收很少。一般在1mm厚的电气石晶体几乎就能把o光全部吸收掉,而e光只略微被吸收。自然光通过这样的晶体片后,就变成了偏振光。晶体对互相垂直的两个光振动具有选择吸收的这种性质,称为晶体的二向色性(dichroism)。除电气石晶体外还有一些有机化合物晶体,如碘化硫酸奎宁等亦有二向色性。用具有二向色性的晶体可以制成起偏器和检偏器。

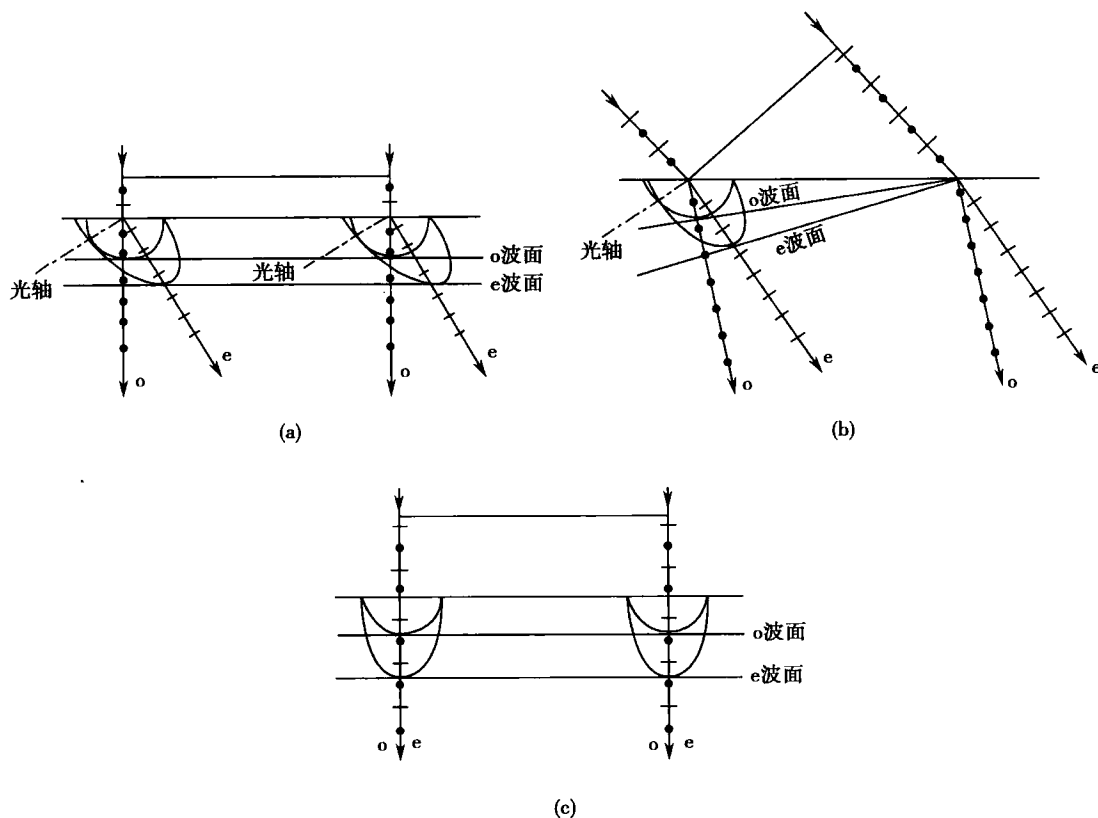


图 13-26 双折射的惠更斯波阵面

(a) 光线垂直入射时的双折射现象 (b) 光线倾斜入射时的双折射现象
(c) 正入射时晶体的双折射(晶体光轴与表面平行)

一种应用很广的新型起偏器是人造的偏振片(polaroid)。最常用的偏振片是 H 偏振片,它是先把聚乙烯醇薄膜加热,沿一定方向拉伸 3~4 倍,然后浸入含碘的溶液中,取出烘干后而制成的。在制作过程中进行拉伸时,聚乙烯醇的长形碳氢化合物分子会沿拉伸方向规则地排列起来;浸入含碘溶液后,碘原子就会附着在沿直线排列的长链分子上,形成一条条能导电的碘分子链。由于电子可以沿着碘分子链运动,因此偏振片将强烈地吸收沿碘分子链方向的电场。所以,电振动矢量平行于拉伸方向的偏振光将被吸收,不能通过偏振片,只有电振动矢量垂直于拉伸方向的偏振光才能透过。此外,常用的偏振片还有 K 偏振片。它是将聚乙烯醇薄膜放在高温炉中,通以氯化氢作为催化剂,除去聚乙烯醇分子中若干个水分子,形成聚合乙烯的细长分子,再单方向拉伸而成。

作为起偏器和检偏器,偏振片虽然还有一些缺点,例如还不能使自然光 100% 的偏振化,对不同波长的光的能量有选择性吸收等。但是由于偏振片的制造工艺简单,而且面积可以制作得很大,重量轻,价格低廉,所以在实验技术及日常生活中应用很广。

* 第四节 偏振光的应用

一、光弹效应

某些透明的各向同性的介质如玻璃、塑料等,在机械力的作用下发生形变时会变为各向



异性,从而使光产生双折射,这种现象称为光弹效应(photoelastic effect),亦称应力双折射。如果对这些介质施加的是压力或张力,它们就显示出负单轴晶体或正单轴晶体的特性,其有效光轴都在应力的方向上,所引起的双折射与应力成正比,即

$$n_o - n_e = kp \quad (13-26)$$

式中, n_o 和 n_e 为介质对 o 光和 e 光的主折射率, k 是由介质的性质决定的比例系数, p 为应力。

如果把这些介质制作成片状,插在两块正交的偏振片之间,如图 13-27 所示。当对介质 C 施加压力或张力时, C 所产生的 o 光和 e 光通过 P_2 将产生干涉,出现干涉的色彩和条纹。图中 OO' 表示有效光轴的方向。在工程技术中,用透明塑料制成各种工件的模型,然后模拟工件受力情况,观察、分析偏振光干涉的色彩和条纹分布,从而判断工件内部的应力分布,这种方法称为光弹方法。在医学研究中,光弹方法被用于骨骼应力应变的测量,具体内容详见第二章物体的弹性。

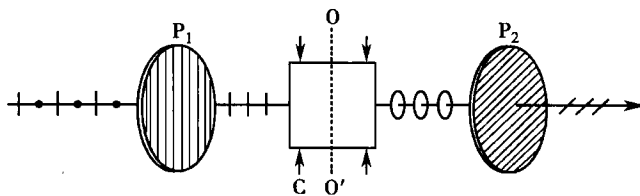


图 13-27 光弹效应装置示意图

二、克尔效应

在外加电场的作用下,某些各向同性的透明介质如玻璃、石蜡、水、硝基苯($C_6H_5NO_2$)等也会变为各向异性,表现出双折射现象,介质显示出单轴晶体的特性,并且其光轴在电场的方向上。这种现象是克尔(Kerr)于 1875 年发现的,称为克尔效应(Kerr effect),又称为电致双折射。

观察克尔效应的实验装置如图 13-28 所示。 P_1 、 P_2 是两块正交的偏振片, M 是贮有某种液体如硝基苯液体的小盒,称为克尔盒。盒的两端有平行的玻璃窗,盒内封有一对平行板电极 C、C'。当电源未接通时,视场是暗的;当电源接通时,克尔盒中的液体在电场的作用下,使进入其中的偏振光产生双折射,视场由暗转明。

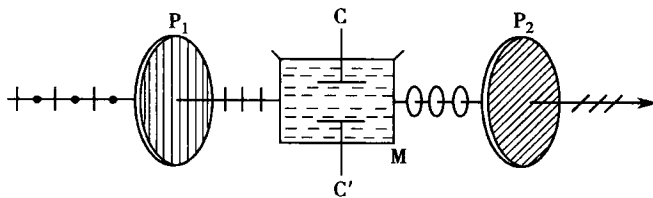


图 13-28 克尔效应实验装置示意图

实验表明,折射率差 $n_o - n_e$ 与电场强度 E 的平方成正比,即

$$n_o - n_e = kE^2 \quad (13-27)$$

式中的比例常数 k 称为克尔常数,视液体的种类而定。

克尔效应最重要的特点是几乎没有延迟时间,它随着电场的产生和消失很快地产生与消失。利用它可以制成弛豫时间极短($10^{-9}s$)的断续器或调制器,如高速光闸和电光调制器等。目前已广泛用于高速摄影、电影、电视和激光通讯等许多领域。



三、物质的旋光性

当偏振光沿光轴方向通过石英晶体时,其振动面会发生旋转,这一现象是阿喇果(Arago)于 1811 年首先发现的。后来在许多其他晶体如氯酸钠(NaClO_3)和溴酸钠(NaBrO_3)等以及某些液体如松节油、糖的水溶液和酒石酸溶液等中也发现了这种现象。偏振光通过物质时振动面发生旋转的现象称为旋光现象(rotational optical phenomena)。能使偏振光的振动面发生旋转的性质,称为旋光性(optical activity)。具有旋光性的物质称为旋光物质。

实验表明,对于单色偏振光,旋光物质使振动面旋转的角度 ψ 与偏振光通过的物质厚度 L 成正比,即

$$\psi = \alpha L \quad (13-28)$$

如果物质为溶液,振动面旋转的角度还与溶液的浓度 c 成正比,即

$$\psi = c \alpha L \quad (13-29)$$

其中,比例系数 α 称为物质的旋光率(specific rotation)。

不同物质的旋光率不同,对于同一种物质, α 的值与偏振光的波长有关,即对给定厚度的旋光物质,不同波长的偏振光将旋转不同的角度,这种现象称为旋光色散(rotatory dispersion)。固体物质的旋光率 α 在数值上等于单位长度的旋光物质所引起的偏振光的振动面旋转的角度;溶液的旋光率 α 在数值上等于单位长度的单位浓度的溶液所引起的偏振光振动面旋转的角度。旋光率一般用 $[\alpha]_\lambda^t$ 表示, t 指温度, λ 指偏振光的波长。式(13-29)也可写为

$$\psi = [\alpha]_\lambda^t \frac{c}{100} L \quad (13-30)$$

式中浓度 c 以 100ml 溶液中溶质的克数为单位, L 以 dm 为单位。一般在测量时取 $t = 20^\circ\text{C}$,采用钠光源(其波长相当于太阳光谱中的 D 线),这时的旋光率写成 $[\alpha]_D^{20}$ 。式(13-30)常用于测定旋光性溶液的浓度,在医学和制糖工业中,用来测定旋光溶液的旋光率和浓度的旋光仪或糖量计就是根据这个原理设计的。

偏振光的振动面的旋转具有方向性。迎面观察通过旋光物质的光,振动面按顺时针方向旋转的称为右旋(right-handed),按逆时针方向旋转的称为左旋(left-handed)。光的振动面究竟是左旋还是右旋与旋光物质的结构有关。石英和许多有机物质都具有左右旋两种旋光异构体,天然的蔗糖($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$)和天然的葡萄糖都是右旋的,右旋葡萄糖是人体新陈代谢中的一种重要的化合物;某些药物也有左右旋之分,且左旋药和右旋药疗效不同;一些生物物质如氨基酸和 DNA 等也有左右旋的不同等等。令人费解的是,生物总是选择右旋糖消化吸收,而对左旋糖不择优。

为解释物质的旋光性,菲涅耳作了如下假设:线偏振光在旋光晶体中沿光轴传播时,分解成了左旋和右旋圆偏振光,它们的传播速度略有不同,或者说它们的折射率不同,经过旋光晶片后产生了附加的相位差,从而使出射的合成线偏振光的振动面有了一定角度的旋转。

如果旋光物质对特定波长的入射光有吸收,而且对左旋和右旋圆偏振光的吸收能力不同,那么在这种情况下不仅左旋和右旋圆偏振光的传播速度不同,而且振幅也不同。于是,随着时间的推移,左右旋圆偏振光的合成光振动矢量的末端将循着一个椭圆的轨迹移动。这就是说,由速度不同振幅也不相同的左右旋圆偏振光叠加所产生的不再是线偏振光,而是椭圆偏振光,这种现象称为圆二色性(circular dichroism)。

在研究分子的内旋转、分子的相互作用以及微细立体结构方面,旋光法和圆二色性法有着其他方法不可替代的作用。

* 第五节 液晶的光学特性

液晶(liquid crystal)是液态晶体的简称,它是介于结晶态与液态之间的一种物质态。它



既具有晶体的各向异性,又具有液体的流动性,从而表现出许多重要的光学特性,在现代科学技术中有着广泛的应用。

一、液晶的分类和结构

液晶存在的领域相当广,目前已被发现或经人工合成的液晶已不下几千种。根据形成的条件和组成的不同,液晶可分为热致液晶(thermotropic liquid crystal)和溶致液晶(lyotropic liquid crystal)两大类。热致液晶是指单成分的纯化物或均匀混合物在温度变化下出现的液晶相,它只能在一定的温度范围内存在。溶致液晶是由符合一定结构要求的化合物与溶剂组成的液晶体系。根据分子排列方式的不同,热致液晶又可分为近晶相(或称层状相)、向列相(或称丝状相)和胆甾相(或称螺旋状相)三种类型。溶致液晶也可分为层状相、立方相、六方相等类型。

向列相液晶是由长径比很大的棒状分子组成,分子质心没有长程有序,分子不排列成层,它能上下、左右、前后滑动,只在分子长轴方向上保持相互平行或近于平行,如图 13-29(a)所示。

近晶相液晶是由棒状或条状分子组成,分子排列成层,层内分子长轴相互平行,其方向可以垂直于层面或与层面成倾斜排列,分子质心位置在层内无序,可以自由平移。分子可以前后、左右滑动,但不能在上下层之间移动,如图 13-29(b)所示。

胆甾相液晶的分子呈扁平形状,排列成层,层内分子相互平行。分子长轴平行于层平面,不同层的分子长轴方向稍有变化,沿层的法线方向排列成螺旋状结构,如图 13-29(c)所示。旋转的方向可以是左旋,也可以是右旋,当不同层的分子长轴排列沿螺旋方向经历 360° 的变化后,又回到初始取向,这个周期性的层间距称为胆甾相液晶的螺距。

存在于生物体内的液晶称为生物液晶。生物液晶就其形成方式而言都是溶致液晶。现在已经发现不但所有的生物膜都处于液晶态,而且还在不少的组织器官中都发现了液晶态的物质,组成生命的不少物质分子也都可以形成液晶态。例如,在新鲜的肾上腺皮质、卵巢、神经髓鞘、肌肉、粥样硬化的动脉,胆囊胆汁和某些结缔组织中都存在有液晶态的物质;脂类、蛋白质、多肽、核酸、多糖等生命机体内的重要的生物分子都具有液晶性质,都能形成液晶态。另外,有的学者还分别发现在鸡胚、鱼胚发育过程中,胚体的许多器官组织都先后呈现液晶态;牛眼的角膜、晶状体也能产生双折射现象,都可能是以液晶态存在。在胆石成核成石机制的研究中,国内外学者开展的模拟胆汁模型和动物模型实验研究均证实胆汁液晶是胆囊结石形成过程中的一种重要成核因子,其光性符号为单轴正性。胆汁中的液晶微泡构成了胆石形成和生长的基本结晶核,在胆石形成过程中起重要作用,甚至是关键性的作用,生物胆汁液晶及其成核作用见书后彩图 13-30。目前,对生物组织中的液晶态物质的研究仍是生物物理研究中一个引人注目的内容。

二、液晶的双折射现象

液晶具有晶体的各向异性,当光线射入液晶后也会产生双折射现象。双折射现象实质

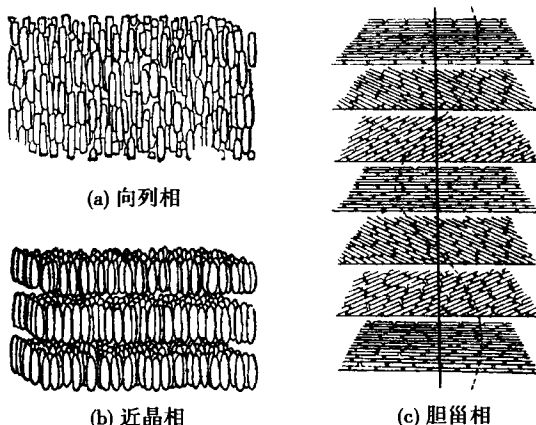


图 13-29 热致液晶的分子排列



上表示液晶中各个方向上的折射率以及介电常数是不同的。通常用符号 $\epsilon_{//}$ 和 ϵ_{\perp} 分别表示沿液晶分子长轴方向和垂直于长轴方向上的介电常数,并且把 $\epsilon_{//} > \epsilon_{\perp}$ 的液晶称为正性液晶或 P 型液晶,而把 $\epsilon_{//} < \epsilon_{\perp}$ 的液晶称为负性液晶或 N 型液晶。

多数液晶只有一个光轴方向,一般向列相液晶和近晶相液晶的光轴沿分子长轴方向,胆甾相液晶的光轴垂直于层面。

三、胆甾相液晶的选择反射

胆甾相液晶在白光照射下,会呈现美丽的色彩,这是它选择反射某些波长的光的结果。实验表明,其反射光的波长 λ 满足晶体衍射的布拉格公式,即

$$\lambda = 2np \sin \varphi \quad (13-31)$$

式中 n 是平均折射率, p 是胆甾相液晶的螺距, φ 是入射光与液晶表面间的夹角,如图 13-31 所示。式(13-31)表明,沿不同角度可以观察到不同颜色的光。当温度变化时,胆甾相液晶的螺距会发生敏锐的变化,因而反射光的颜色也随之发生变化。胆甾相液晶的这种特性被广泛用于液晶温度计和各种测量温度变化的显示装置上。

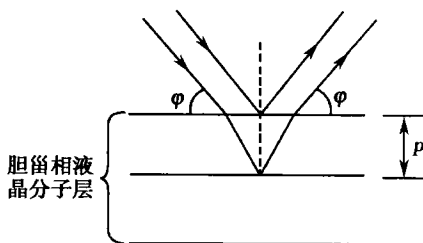


图 13-31 胆甾相液晶的选择反射

四、液晶的电光效应

在电场作用下,液晶的光学特性发生变化,称为电光效应(electrooptical effect)。下面介绍两种液晶的电光效应。

1. 电控双折射效应 在玻璃表面涂上二氧化锡(SnO_2)薄膜就形成透明电极。将液晶注入透明电极之间,形成厚度约为 $10\mu\text{m}$ 的薄膜,称为液晶盒。液晶分子长轴方向与电极表面垂直时称为垂面排列,平行表面时称为沿面排列。将垂面排列的液晶盒放在两正交的偏振片之间,如图 13-32 所示。未加电场时,通过偏振片 P_1 的光在液晶内沿光轴方向传播,不发生双折射。由于两偏振片正交,所以装置不透明。加电场并超过某一阈值时,电场使液晶分子轴方向倾斜,使在液晶中传播的光发生双折射,装置由不透明变为透明。光轴的倾斜随电场的变化而变化,因而两双折射光束间的相位差也随之变化。当入射光为复色光时,出射光的颜色也随之变化。

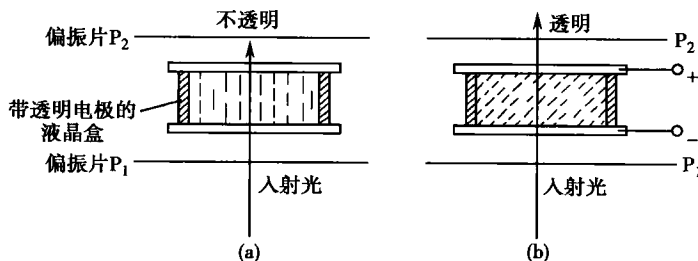


图 13-32 电控双折射

(a) 未加电场 (b) 加电场

2. 动态散射 把向列相液晶注入带有透明电极的液晶盒内,未加电场时,液晶盒透明,加电场并超过某一阈值时,液晶盒由透明变为不透明,这种现象称为动态散射。这是因为盒内离子和液晶分子在电场作用下互相碰撞,使液晶分子产生紊乱运动,使折射率随时发生变



化,因而使光发生强烈散射的结果。去掉电场后,则恢复透明状态,但是如果在向列相液晶中混以适当的胆甾相液晶,则散射现象可以保存一些时间,这种情况称为存储的动态散射。动态散射在液晶显示技术中有广泛的应用。

五、液晶的光生伏特效应

在镀有透明电极的两片玻璃板之间夹一层沿面排列的向列相或近晶相液晶,在强光照射下,电极间会出现电动势,这种现象称为液晶的光生伏特效应,如图 13-33 所示。

光生伏特效应在生物液晶中有非常重要的意义。人眼视网膜中的视色素分子正好处于液晶态,当光刺激眼睛时,由于液晶的光生伏特效应,视色素分子便产生了“早期感受器电位”,经视神经传入视觉中枢,才使我们感知了这一光信号。

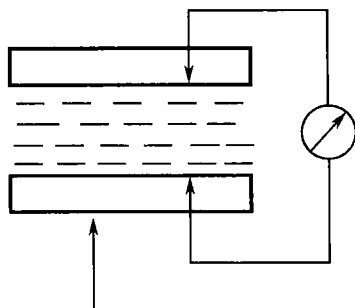


图 13-33 液晶的光生伏特效应

思考题与习题十三

13-1 在杨氏实验中,如果光源 S 到两狭缝 S_1 和 S_2 的距离不等,例如 $SS_1 > SS_2$,则对实验结果有什么影响?

13-2 为什么挡住光线容易,而挡住声音难?

13-3 在观察单缝衍射时,①如果单缝垂直于它后面的透镜的光轴向上或向下移动,屏上衍射图样是否改变?为什么?②若将光源 S 垂直于光轴向上或向下移动,屏上的衍射图样是否改变?为什么?

13-4 在杨氏实验中,两狭缝相距 0.2mm ,屏与缝相距 1m ,第 3 级明条纹距中央明条纹 7.5mm ,求光波波长。(500nm)

13-5 在杨氏实验中,两缝相距 0.3mm 。要使波长为 600nm 的光通过后在屏上产生间距为 1mm 的干涉条纹,问屏距缝应有多远?(0.5m)

13-6 波长 500nm 的光波垂直入射一层厚度 $e=1\mu\text{m}$ 的薄膜。膜的折射率为 1.375 。问:(a)光在膜中的波长是多少?(b)在膜内 $2e$ 距离含多少波长?(c)若膜两侧都是空气,在膜面上反射的光波与经膜底面反射后重出膜面的光波的相差为多少?

(363.63nm; 5.5; 10π 或 12π)

13-7 用一层透明物质涂在玻璃上,使波长 520nm 的光反射最少。若玻璃的折射率为 1.50 ,透明物质折射率为 1.30 ,求涂层最小厚度。(100nm)

13-8 一玻璃劈尖,折射率 $n=1.52$,波长 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的钠光垂直入射,测得相邻条纹间距 $L=5.0\text{mm}$,求劈尖夹角。(8")

13-9 用单色光观察牛顿环,测得某一明环的直径为 3.00mm ,它外面第 5 个明环直径为 4.60mm ,平凸透镜的曲率半径为 1.03m ,求此单色光的波长。(590nm)

13-10 钠光(589nm)通过单缝后在 1m 处的屏上产生衍射条纹,若两个第一级暗纹之间的距离为 2mm ,求单缝宽度。(0.589mm)

13-11 一单色光垂直入射一单缝,其衍射的第三级明纹的位置恰与波长为 600nm 的单色光入射该缝时衍射的第二级明纹位置重合,试求该单色光的波长。(428.6nm)

13-12 用波长为 500nm 的单色光,垂直照射到一宽度为 0.5mm 的单缝上,在缝后置一焦距为 0.8m 的凸透镜,试求屏上中央明纹和其他明纹的宽度。(1.6×10⁻³m; 8.0×10⁻⁴m)



13-13 一束单色平行光垂直入射到每毫米 500 条缝的光栅上,所成二级像与原入射方向成 30° 角,求波长。
(500nm)

13-14 一束白光垂直入射光栅,如果其中某一光波的三级像与波长 600nm 的光波的二级像重合,求这光的波长。
(400nm)

13-15 用波长为 589nm 的钠光,垂直入射到每毫米 500 条缝的光栅上,最多能看到第几级明条纹?
(3 级)

13-16 两块偏振片的透射轴互成 90° 角,在它们之间插入另一偏振片,使它的透射轴与第一片的透射轴夹角为 θ 角。射向第一偏振片的自然光强度为 I_0 ,求通过三块偏振片后的光强。(a) $\theta=45^\circ$; (b) $\theta=30^\circ$ 。
($I_0/8$; $3I_0/32$)

13-17 两块偏振片的透射轴互相垂直,在它们之间插入两块偏振片,使相邻两片偏振片透射轴都夹 30° 角。如果入射的自然光强度为 I_0 ,求通过所有偏振片后光的强度。
($0.21I_0$)

13-18 平行平面玻璃板放置在空气中,空气折射率近似为 1,玻璃折射率 $n=1.50$ 。试问当自然光以布儒斯特角入射到玻璃的上表面时,折射角是多少? 当折射光在下表面反射时,其反射光是否是偏振光?
(33.7° ; 是偏振光)

(吴 杰)

第十四章 几何光学

学习要求:

1. 掌握单球面折射成像的原理和符号规则。
2. 掌握共轴球面系统、薄透镜成像的规律。
3. 掌握光学显微镜的分辨本领和放大率;了解医学上常用的几种显微镜。
4. 了解眼睛的光学系统及非正视眼屈光不正的矫正。

几何光学研究的是波动光学的极限问题,不考虑波长、相位、振幅等问题;其理论基础是几何定律和一些基本的光学实验定律,如:①光在均匀媒质中的直线传播定律;②光通过两种媒质界面时的反射定律和折射定律;③光的独立传播定律和光路可逆定律。本章主要讨论单球面、透镜的光折射成像规律。

第一节 球面折射

一、单球面折射

当两种折射率不同的透明媒质的分界面为球面的一部分时,光所产生的折射现象称为单球面折射。单球面折射成像规律是了解各种透镜以及眼睛成像的基础。

图 14-1 有两种均匀透明媒质,折射率分别为 n_1 和 n_2 (设 $n_1 < n_2$),分界面 MN 为球面(又称为折射面、单球面),其曲率中心为 C,曲率半径为 r ,球面与主光轴的交点为折射面的顶点 P,通过曲率中心 C 的直线 OPI 为折射面的主光轴。

光线 OA 如果与主光轴的夹角比较小,如图 14-1, $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$,则此光线称为近轴光线(paraxial rays),否则称为远轴光线,下面的讨论仅限于近轴光线。

主光轴上自 O 点发出的光线经单球面折射后与主光轴交于 I 点,所以 I 点是物点 O 的像。物点 O 到顶点 P 的距离 OP 称为物距,用 u 表示,像点 I 到顶点 P 的距离 PI 称为像距,用 v 表示。 u 与 v 的关系,可以根据折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ 给出,下面予以讨论。

由于 OA 是近轴光线, i_1, i_2 很小,因此, $\sin i_1 \approx i_1, \sin i_2 \approx i_2$ 。折射定律写为:

$$n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2$$

由图知 $i_1 = \alpha + \theta, \theta = i_2 + \beta$, 即 $i_2 = \theta - \beta$, 将 i_1, i_2 的表达式代入上式,整理得

$$n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \beta = (n_2 - n_1) \theta$$

α, β, θ 均很小,它们的正切值可以用其角度的弧度值代替,即:

$$\alpha = \frac{h}{u + \delta} \approx \frac{h}{u}, \beta \approx \frac{h}{v}, \theta \approx \frac{h}{r}$$

代入 $n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \beta = (n_2 - n_1) \theta$ 式中,并消去 h , 有

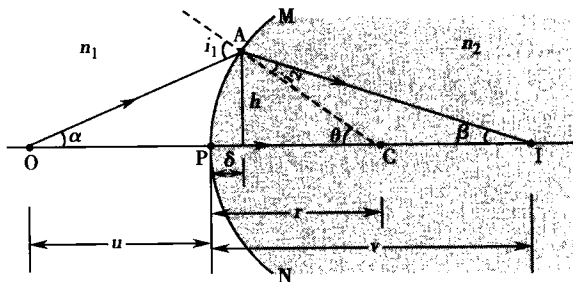


图 14-1 单球面折射



$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (14-1)$$

式(14-1)说明了 u 、 v 之间的关系,称为单球面折射公式,它适用于一切凸、凹球面,但应用时 u 、 v 、 r 须遵守如下符号规则:实物、实像时物距 u 、像距 v 均取正值;虚物、虚像时物距 u 、像距 v 均取负值;凸球面对入射光线时单球面的曲率半径 r 取正,反之取负。

在图 14-2(A)中, O_1 为实物(发散入射光束的顶点称为实物), u_1 取正值; I_1 为虚像(发散的折射光束的顶点), v_1 取负值; r_1 取负值(凸球面顺着入射光线)。在图 14-2(B)中 O_2 为虚物(会聚入射光束的顶点), u_2 取负值; I_2 为实像(会聚的折射光束的顶点), v_2 取正值; r_2 取正值(凸球面对入射光线)。

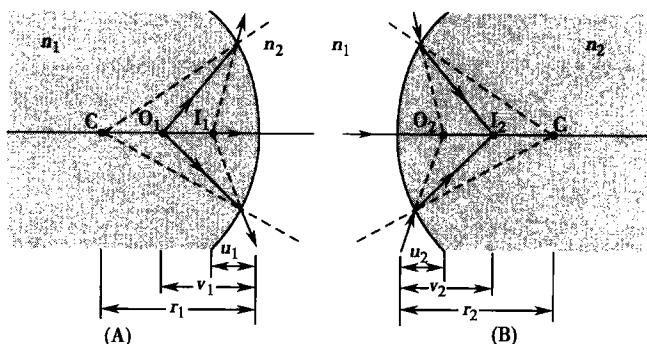


图 14-2 物和像

对于给定的物距 u ,不同的折射球面(n_1 、 n_2 、 r 不同)有不同的像距 v 与之对应,式(14-1)右端的 $(n_2 - n_1)/r$ 决定了球面折射本领的大小,因此把 $(n_2 - n_1)/r$ 称为折射面的焦度(dioptric strength),用 Φ 表示。

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (14-2)$$

若 r 以米(m)为单位, Φ 的单位为 m^{-1} ,称为屈光度(diopeter),用 D 表示。 Φ 可以取正值,例如 $n_2 = 1.5$ 、 $n_1 = 1.0$ 、 $r = -10\text{cm}$ 的单球面,其焦度等于 -5m^{-1} ,记为 $-5D$ 。

当点光源位于主光轴某点 F_1 时,由该点发出的光线经单球面折射后成为平行光线,即 $v = \infty$,则称点 F_1 为该折射面的第一焦点,从第一焦点 F_1 到折射面顶点 P 的距离称为第一焦距,以 f_1 表示。将 $v = \infty$ 代入式(14-1)可以求得:

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r \quad (14-3)$$

如果平行于主光轴的近轴光线经单球面折射后成像于主光轴 F_2 点,则称 F_2 点为折射面的第二焦点,从 F_2 到 P 的距离称为第二焦距,以 f_2 表示。将 $u = \infty$ 代入式(14-1)得

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \quad (14-4)$$

当 f_1 、 f_2 为正时, F_1 、 F_2 是实焦点,折射面有会聚光线作用;当 f_1 、 f_2 为负时, F_1 、 F_2 是虚焦点,折射面有发散光线的作用。

由式(14-3)和式(14-4)知,折射面的两个焦距之比等于折射面两侧媒质的折射率之比,即

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (14-5)$$

由式(14-2)和(14-5)可得知:

$$\Phi = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \quad (14-6)$$



可见,对同一折射面,尽管其两侧的焦距不相等,但是 n 与 f 的比值是相等的,此比值被定义为焦度 Φ , Φ 的大小由式(14-2)决定。

[例 14-1] 圆柱形玻璃棒($n=1.5$)的一端是半径为 2cm 的凸球面。(1)求棒置于空气中时,在棒的轴线上距离棒端外 8cm 的物点所成像的位置。(2)计算此凸球面的焦距和焦度。(3)若将此棒放入水($n=1.33$)中时,物距不变,像距应是多少(设棒足够长)?

解:(1) 当棒置于空气中时, $n_1=1.0$, $n_2=1.5$, $r=2\text{cm}$, $u=8\text{cm}$,代入式(14-1)

$$\frac{1}{8} + \frac{1.5}{v} = \frac{1.5-1.0}{2}$$

解得 $v=12(\text{cm})$

所成像在玻璃棒内轴线上,距棒的顶点 12cm 处,为实像。

(2) 根据 $v=\infty$,求得 $f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = \frac{1.0 \times 2}{1.5 - 1.0} = 4(\text{cm})$

根据 $u=\infty$,求得 $f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = \frac{1.5 \times 2}{1.5 - 1.0} = 6(\text{cm})$

由 $\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r}$ 或 $\Phi = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$,求得 $\Phi = 0.25D$

(3) 当棒置于水中时, $n_1=1.33$, $n_2=1.5$, $r=2\text{cm}$, $u=8\text{cm}$,代入式(14-1)

$$\frac{1.33}{8} + \frac{1.5}{v} = \frac{1.5-1.33}{2}$$

解得 $v=-18.5(\text{cm})$

说明所成像在棒外轴线上(与物点同侧),离玻璃棒顶点 18.5cm,为虚像。

二、共轴球面系统

如果两个或两个以上折射球面的曲率中心在同一直线上,它们便组成共轴球面系统(coaxial spherical system),各球心所在直线称为共轴系统的主光轴。

光通过共轴球面系统后的成像,决定于入射光依次在每一个折射面上折射的结果。在成像过程中,前一个折射面所成的像,即为相邻的后一个折射面的物,应用单球面折射公式,采用逐次成像法,即可求出最后一个折射面的像,此像即为光线通过共轴球面系统后所成的像。

[例 14-2] 玻璃球($n=1.5$)半径为 10cm,一点光源放在球前 40cm 处。求近轴光线通过玻璃球后所成的像。

解:对第一折射面而言, $n_1=1.0$, $n_2=1.5$, $r=10\text{cm}$, $u_1=40\text{cm}$,代入式(14-1)

$$\frac{1.0}{40} + \frac{1.5}{v_1} = \frac{1.5-1.0}{10} \quad \text{解得} \quad v_1=60(\text{cm})$$

如果没有第二折射面, I_1 应在 P_1 后面 60cm 处,因为有第二折射面,则成像在 v_2 处。 I_1 相对第二折射面是虚物,故 $u_2=20-60=-40\text{cm}$, $n_1=1.5$, $n_2=1.0$, $r=-10\text{cm}$,代入式(14-1):

$$-\frac{1.5}{40} + \frac{1}{v_2} = \frac{1.0-1.5}{-10} \quad \text{解得} \quad v_2=11.4(\text{cm})$$

因此,最后像成在玻璃球后,距球后表面 11.4cm 处,整个系统成像过程如图 14-3 所示。

第二节 透 镜

透镜(lens)是具有两个折射面的共轴系统,两折射面之间是均匀的透明物质。依据透镜的厚度不同,可将透镜分为薄透镜、厚透镜;又依据透镜折射面的形状不同可将透镜分为球

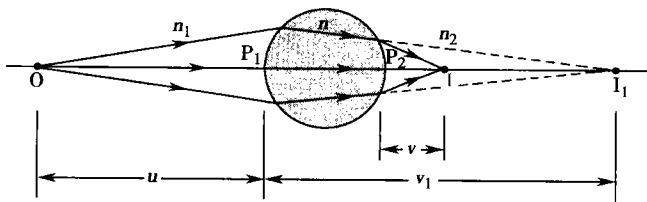


图 14-3 例 14-2

面透镜(常简称透镜)及柱面透镜等。

一、薄透镜成像公式

所谓薄透镜(thin lens),即组成透镜的两个球面顶点之间距离 P_1P_2 与透镜的焦距相比很小。下面以图 14-4 所示的弯凸薄透镜为例进行讨论。

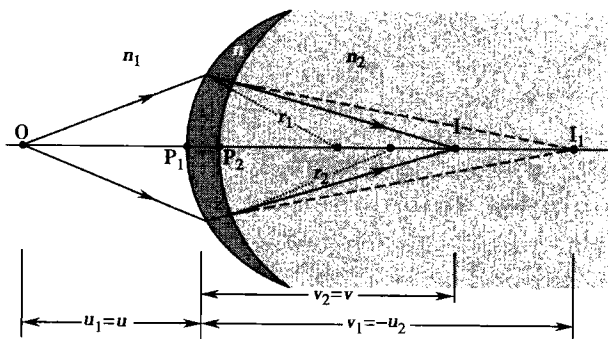


图 14-4 薄透镜成像

设折射率为 n 的弯凸薄透镜置于折射率为 n_1 和 n_2 两种媒质界面处,从主光轴物点 O 发出的光经透镜折射后成像于 I 处,如图 14-4 所示。以 u_1, v_1, r_1 和 u_2, v_2, r_2 分别表示第一折射面和第二折射面的物距、像距和曲率半径。以 u, v 分别表示透镜的物距和像距。因为是薄透镜,则 $u_1 \approx u, v_1 \approx -u_2, v_2 \approx v$ 。将它们分别代入式(14-1),得:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{u} + \frac{n}{v_1} &= \frac{n - n_1}{r_1} \\ -\frac{n}{v_1} + \frac{n_2}{v} &= \frac{n_2 - n}{r_2} \end{aligned}$$

将上述两式相加,整理后有:

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n - n_2}{r_2} \quad (14-7)$$

式(14-7)称为**薄透镜成像公式**。公式中 u, v, r_1, r_2 的正、负号仍然遵守前面叙述的符号规则。遵守符号规则后,式(14-7)适用于各种凸、凹球面薄透镜。

而且薄透镜的焦度为:

$$\Phi = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n - n_2}{r_2}$$

因薄透镜前后媒质的折射率不相同,由式(14-6)或(14-7)可以得出薄透镜的两焦距分别为:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left[\frac{1}{n_1} \left(\frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \right) \right]^{-1} \\ f_2 &= \left[\frac{1}{n_2} \left(\frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$



如果薄透镜前后媒质折射率相同,即薄透镜放在折射率为 n_0 的某种媒质中时,有 $n_1 = n_2 = n_0$, 则式(14-7)为:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{(n - n_0)}{n_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14-7a)$$

实际上,薄透镜通常都是放置在空气中,如图 14-5, $n_0 = 1$, 所以式(14-7)可写为:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14-7b)$$

即置于空气中的薄透镜的焦度为:

$$\Phi = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

其第一焦距与第二焦距相等,用 f 表示,即:

$$f = f_1 = f_2 = \left[(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (14-8)$$

将 f 代入式(14-7b),得:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (14-9)$$

此式是薄透镜成像的又一常用公式,称为**高斯形式**。

对放置在空气中的薄透镜,焦距的倒数 $1/f$ 即薄透镜的焦度,即 $\Phi = 1/f$ 。当焦距以“米”为单位时,焦度单位仍为屈光度,用 D 表示,配置眼镜时人们常将透镜的焦度以“度”为单位,其换算关系为:1 屈光度 = 100 度。

二、薄透镜组合

两个或两个以上薄透镜组成的共轴系统,称为薄透镜组合,简称**透镜组**。物体通过透镜组后所成的像,可以利用薄透镜公式,采用逐次透镜成像法求出,即先求第一透镜所成像,将此像作为第二透镜的物,求出第二个透镜所成像,依次类推,直至求出最后一个透镜所成的像,此像便是物体经过透镜组后所成像。

最简单的透镜组是由两个薄透镜紧密贴合在一起组成的。如图 14-6 所示。设两个透镜焦距分别为 f_1 与 f_2 (皆放置在空气中),透镜组物距为 u ,像距为 v ,物体经透镜 1 成像在 I_1 处,相应的物距和像距为 u_1 与 v_1 ,并且 $u_1 = u$,由透镜公式(14-9)得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

对于第二个透镜, $u_2 = -v_1$, $v_2 = v$, 则

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}$$

两式相加,得:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (14-10)$$

所以透镜组焦距 f 为:

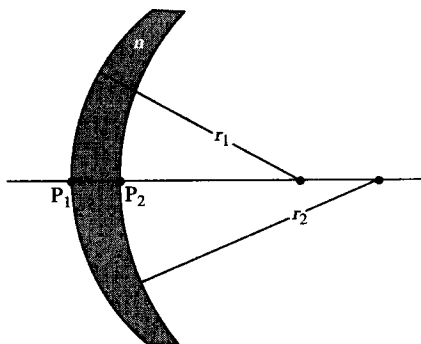


图 14-5 薄透镜放置在空气中

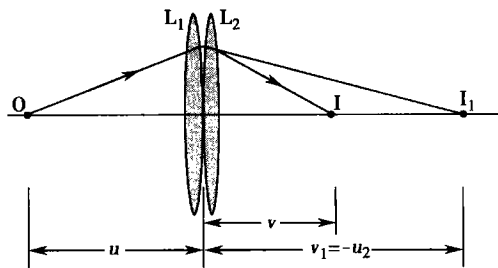


图 14-6 薄透镜的组合



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (14-11)$$

即紧密接触的透镜组的等效焦距的倒数等于组成它的各透镜焦距的倒数之和。

如果以 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ 分别表示第一透镜、第二透镜和透镜组的焦度,它们之间的关系为:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (4-12)$$

这一关系常被用来测量透镜的焦度。如测定某近视眼镜片(凹透镜)的焦度,即用已知焦度的凸透镜与它紧密接触,使组合后的焦度为零,即光线通过透镜组后既不发散也不会聚,光线的方向不改变。此时 $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$ 或 $\Phi_1 = -\Phi_2$, 即两透镜的焦度数值相等,符号相反。

[例 14-3] 凸透镜 L_1 和凹透镜 L_2 的焦距分别为 20cm 和 -40cm, L_2 在 L_1 右边 40cm 处。在透镜 L_1 左边 30cm 处放置某物体,求经透镜组后物体所成的像。

解:(1) 作图法

根据题意将两个透镜和它们的焦距以及物体的位置按比例标在图 14-7 上。

如果透镜 L_2 不存在,物体 O 经透镜 L_1 在 I_1 点形成一个实像,由于透镜 L_2 存在,没有形成此像,而成为透镜 L_2 的虚物,最后在 I 点形成实像。

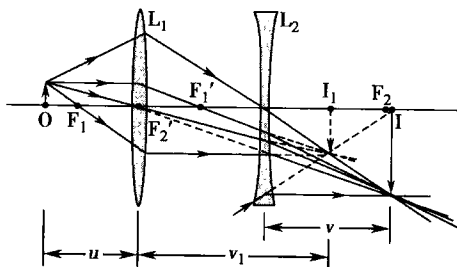


图 14-7 例 14-3

(2) 计算法

由透镜 L_1 的成像公式: $\frac{1}{30} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{20}$

解得 $v_1 = 60(\text{cm})$ (实像)

透镜 L_2 的成像:由两透镜的位置关系可知, $u_2 = 40 - 60 = -20(\text{cm})$ (此是虚物), $f_2 = -40\text{cm}$, $v_2 = v$,将这些数据代入公式,则: $-\frac{1}{20} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{40}$

解得 $v = 40(\text{cm})$ (实像)

三、厚透镜

厚透镜(thick lens)和薄透镜一样,也是包含两个折射球面的共轴系统,不同的是两折射面顶点之间的距离较大,不能忽略。厚透镜成像可以利用逐次成像法,也可以利用三对基点(cardinal points),利用三对基点不仅可以简化厚透镜的成像过程,而且可以简化任何复杂的共轴球面系统的成像过程,并有助于了解整个共轴系统的特点。三对基点包括:

1. 两焦点 将点光源放在主光轴上某点,若发出的光线经厚透镜后成为平行光线,如图 14-8 中的光线(1),则该点称为厚透镜的第一主焦点 F_1 。若平行于主光轴的光线经厚透镜交于主光轴 F_2 ,则 F_2 点称为厚透镜的第二主焦点,如图 14-8 中光线(2)。

2. 两主点 在图 14-8 中,通过 F_1 的入射光线(1)的延长线与经过整个系统折射后出射光线的反向延长线相交于 B_1 点。过 B_1 点作垂直于主光轴的平面且交于主光轴 H_1 点, H_1 点称为折射系统的第一主点, $B_1 H_1 A_1$ 平面称为第一主平面。同样,平行于主光轴的入射光线(2)的延长线与经过整个系统折射后的出射光线的反向延长线相交于 A_2 点,过 A_2 点作垂直于主

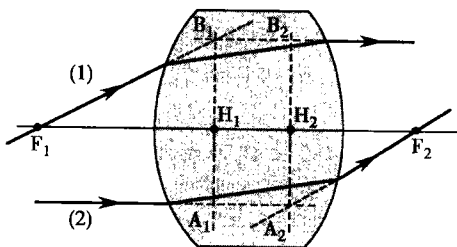


图 14-8 两焦点和两主点



光轴的平面交于主光轴 H_2 点, H_2 点称为折射系统的第二主点, $B_2 H_2 A_2$ 平面称为第二主平面。

在图 14-8 中, 无论光线在折射系统中经过怎样的曲折路径, 在效果上只等于在相应的主平面上发生一次折射。通常将第一焦点 F_1 到第一主点 H_1 的距离称为第一焦距 f_1 , 物点到第一主平面的距离称为物距。第二焦点 F_2 到第二主点 H_2 的距离称为第二焦距 f_2 , 像到第二主平面的距离称为像距。

3. 两节点 在厚透镜的主光轴上可以找到两点 N_1 和 N_2 , 如图 14-9 所示。光线通过它们时不改变方向, 仅发生平移, 即以任何角度向 N_1 点入射的光线都以相同的角度从 N_2 射出。 N_1 、 N_2 分别称为厚透镜的第一节点和第二节点。 N_1 和 N_2 的性质类似于薄透镜的光心。

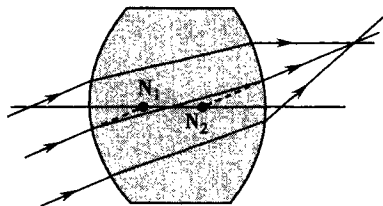


图 14-9 两节点

只要知道厚透镜三对基点在折射系统中的位置, 就可以像薄透镜那样利用三条光线中的任意两条求出经系统折射后所成的像。厚透镜的三条光线如图 14-10 所示。①平行于主光轴的光线(1)在第二主平面折射后通过第二主焦点 F_2 。②通过第一主焦点 F_1 的光线(3)在第一主平面折射后平行于主光轴射出。③通过第一节点 N_1 的光线从第二节点 N_2 平行于入射方向射出。

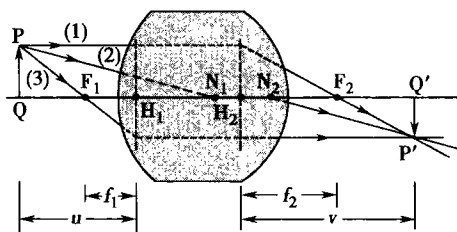


图 14-10 用作图法求物体的成像

各基点的位置决定于折射系统的具体条件。如果折射系统前后媒质的折射率相同(如折射系统置于空气中), 则 $f = f_1 = f_2$, 在这种情况下, 物距 u 、像距 v 、焦距 f 之间的关系等同于薄透镜成像公式:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

式中 u 、 v 、 f 皆以相应的主平面为起点计之。

相比较而言, 单球面和薄透镜也有三对基点, 单球面的两主点重合在单球面顶点 P 上, 其两节点重合在单球面的曲率中心 C 点上; 而薄透镜的两主点及两节点都重合在薄透镜的光心上。

四、柱面透镜

薄透镜的两个折射面如果不是球面, 而是圆柱面的一部分, 这种透镜称为柱面透镜 (cylindrical lens), 如图 14-11。柱面透镜的两个折射面可以都是圆柱面, 也可以一面为圆柱面, 另一折射面为平面; 它与透镜一样, 有凸、凹两种形式, 即凸柱面透镜、凹柱面透镜。

通常将包含主光轴各个方向的平面称为子午面, 子午面与折射面之间的交线称为子午线。

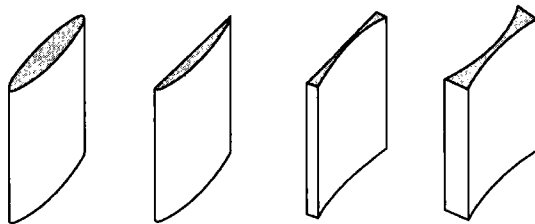


图 14-11 柱面透镜



如果折射面在各个方向上的子午线曲率半径相同,这种折射面称为对称折射面;如果折射面在各个方向上的子午线曲率半径不相同,则称为非对称折射面。由非对称折射面组成的共轴系统称为非对称折射系统。非对称折射系统对通过子午面各个方向光线的折射本领不同,因此,点光源发出的光束经此系统折射后不能形成一个清晰的点像,柱面透镜的成像就是如此。如图 14-12 所示的柱面透镜

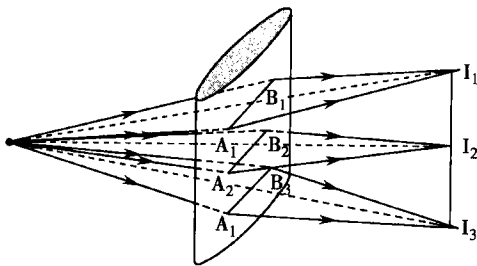


图 14-12 柱面透镜成像

五、透镜的像差

由于各种原因,由物体发出的光线经透镜折射后所成的像与原物体有偏差,这种现象称为透镜的像差(aberration)。产生像差的原因很多,此处仅简单介绍球面像差(spherical aberration)和色像差(chromatic aberration)。

1. 球面像差 主光轴上点状物体发出的远轴光线和近轴光线经透镜折射后不能会聚于主光轴上某一点,如图 14-13(a)所示,这种现象称为球面像差,简称球差。产生球差的原因是通过透镜边缘部分的远轴光线比通过透镜中央部分的近轴光线偏折得多一些,于是,通过透镜的远、近轴光线不能会聚于同一点,点状物体或点光源不能形成点像,而形成圆斑。

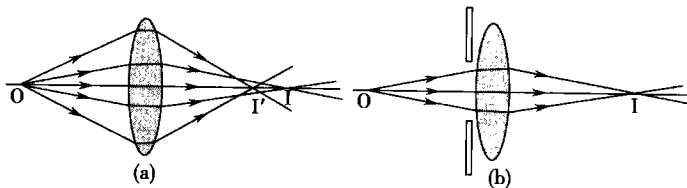


图 14-13 球面像差及其矫正

减小球面像差最简单的方法是在透镜前放置一个光阑,如图 14-13(b)所示。光阑只让近轴光线通过,因此可以形成一个清晰的点像。减小球差的另一办法是在会聚透镜之后放置发散透镜,因为发散透镜对远轴光线的发散作用强于近轴光线。这样组成的透镜组虽然降低了焦距,却减小了球差。

2. 色像差 波长不同的光在同一种光学材料中的折射率略有差异,波长越短,其折射率越大,所以白色光通过透镜后,短波的光偏折较多,如书后彩图 14-14(a)所示。不同波长的光通过透镜后不能在同一点成像,我们把这种现象称为色像差。透镜越厚,色像差越明显。

减小色像差的方法是将具有不同折射率的凸透镜和凹透镜适当配合,如书后彩图 14-14(b)所示,使一个透镜的色像差能被另一透镜所抵消。例如冕牌玻璃的色散能力较火石玻璃弱,因此,在冕牌玻璃的凸透镜上胶粘一块火石玻璃做的凹透镜,则通过凸透镜所产生的色散大部分被凹透镜所抵消,达到减小色像差的目的。



第三节 眼 睛

一、眼的光学结构

书后彩图 14-15 是眼和右眼的水平剖面图。眼球的前表面是一层透明的膜,称为角膜,外界的光线由此进入眼内。角膜后面是虹膜,虹膜中央有一圆孔称为瞳孔,瞳孔大小通过肌肉收缩而改变,以调节进入眼内的光量,瞳孔具有光阑的作用。虹膜之后是晶状体,它是透明而富有弹性的组织,形如双凸透镜,其表面的曲率半径随睫状肌的缩张而变化。眼球的内层称为视网膜,其上布满了视觉神经,是光线成像的地方。视网膜正对瞳孔处的小块黄色区域称为黄斑,黄斑中央的凹陷称为中央凹,对光线最敏感。

在角膜、虹膜与晶状体之间充满透明液体:房水。晶状体与视网膜之间充满了另一透明液体:玻璃体。眼内各种折射媒质的折射率与界面的曲率半径见表 14-1。

表 14-1 古氏平均眼常数

			折射率	在主光轴上位置(mm)	曲率半径(mm)
角膜	前面		1.376	0	7.7
	后面			0.5	6.8
房 水			1.336		
玻璃体			1.336		
晶状体	皮质	前 面	1.386	3.6	10.0
		后 面		7.2	—6.0
	核 体	前 面	1.406	4.15	7.9
		后 面		6.57	—5.8
三 对 基 点	第一主点(H ₁)		1.348		
	第二主点(H ₂)		1.602		
	第一节点(N ₁)		7.08		
	第二节点(N ₂)		7.33		
	第一焦点(F ₁)		—15.70		
	第二焦点(F ₂)		24.38		

从几何光学的角度来看,人眼是由多种媒质组成的较复杂的共轴球面系统,这个系统的像只能成在视网膜上。根据古氏(Gullstrand)对眼睛三对基点的计算,如图 14-16 所示, H_1 、 H_2 靠得很近, N_1 、 N_2 靠得也很近,三基点的位置和单球面接近,因此常常把眼睛进一步简化为单球面折射系统,称为简约眼(reduced eye),如图 14-17 所示。简约眼的单球面接近角

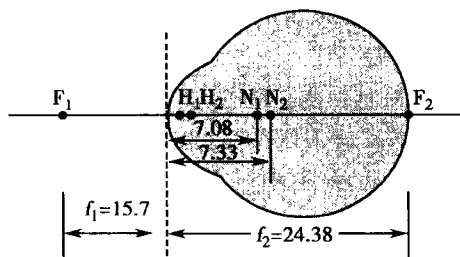


图 14-16 古氏平均眼

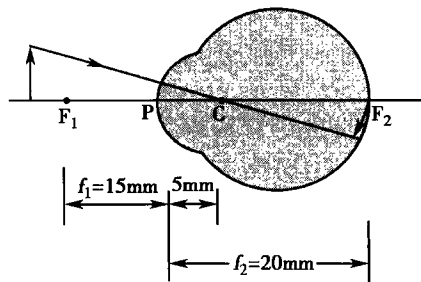


图 14-17 简约眼



膜,但不是角膜,它的曲率半径在眼睛处于完全放松状态时为 5mm,媒质折射率取相同的值 1.33,由此对应的焦距为: $f_1 = 15\text{mm}$, $f_2 = 20\text{mm}$ 。因为眼睛看近、远处物体时像距不变,所以简约眼的 r 值必须改变,并满足下式:

$$\frac{1}{u} + \frac{1.33}{v} = \frac{1.33-1}{r}$$

二、眼的调节

眼睛的焦度能在一定范围内改变,将远近不同物体成像在视网膜上,眼睛这种改变自身焦度的本领称为眼的调节(accommodation)。眼的调节主要通过睫状肌收缩改变晶状体的曲率半径。但这种调节有一定限度,当被观察物体在无穷远时,睫状肌完全放松,此时晶状体曲率半径最大,焦度最小,大约为 58.6D。观察近处物体时,晶状体曲率半径变小(睫状肌收缩),眼的焦度变大,最大可达到 70.6D。由此可见,在观察不同距离的物体时,眼的光学常数各不相同。表 14-1 给出的是眼不调节、完全放松时的数据。

眼睛肌肉完全松弛时能看清的最远点称为远点(far point),远点与眼睛之间的距离称为

当物体距离眼睛太近,小于 10cm 时,眼睛可能处于最大调节状态(晶状体曲率半径最小时)也无法看清物体,眼睛处于最大调节状态能看清的点称为近点(near point),近点与眼睛之间的距离称为近点距离,又简称为近点,视力正常的人,近点距离约为 10~12cm。

观察近距离物体时,眼睛因为需要高度调节而容易产生疲劳。在日常工作中,不易引起眼睛过度疲劳的最适宜距离约为 25cm,这个距离称为视力正常人的明视距离(comfortable visual distance)。



若最小视角为 $10'$, 相应对数视力为 4.0; 若最小视角为 $0.5'$, 相应的对数视力为 5.3, 如图 14-19。

四、眼的屈光不正及其矫正

眼睛不调节时, 若平行光进入人眼内刚好在视网膜上形成一个清晰的像, 如图 14-20 所示, 这种眼睛称为正视眼, 否则称为非正视眼或屈光不正眼。屈光不正包括近视眼 (near sight)、远视眼 (far sight) 和散光眼 (astigmatism) 三种。

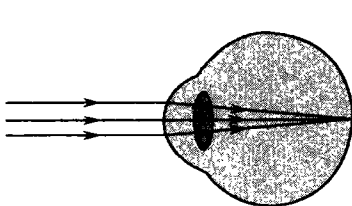
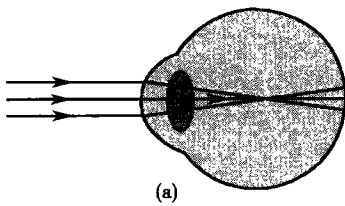
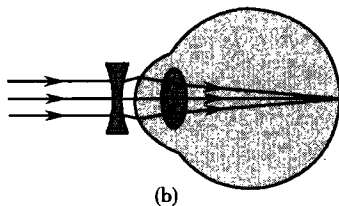


图 14-20 正视眼



(a)



(b)

图 14-21 近视眼及其矫正

1. 近视眼 若眼睛不调节时, 平行光进入眼内会聚于视网膜前面, 则称此类眼睛为近视眼, 如图 14-21(a) 所示。近视眼看不清远处的物体, 需将物体移近到眼前某一位置才能看清。可见, 近视眼的远点在有限距离处。近视产生的原因可能是角膜或晶状体的曲率半径太小, 对光线偏折太强, 或者眼球的前后直径太长。

近视眼的矫正方法是配戴一副适当焦度的凹透镜, 使光线进入眼睛之前经凹透镜适当发散, 再经眼睛折射后在视网膜上形成清晰的像, 如图 14-21(b)。近视眼所配戴的凹透镜应能使平行光线成虚像在近视眼患者的远点处, 这样近视眼在眼睛不调节的情况下即可看清无穷远处的物体。

[例 14-4] 某近视眼患者的远点 X_f 在眼前 50cm 处, 今欲使其看清无限远的物体, 则应配戴多少度的眼镜?

解: 配戴的眼镜必须使无限远的物体在眼前 50cm 处成虚像, 如图 14-22。设眼镜的焦距为 f , $u = \infty$, $v = -X_f = -0.5\text{m}$ 。代入薄透镜成像公式, 得

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

解得:

$$\Phi = \frac{1}{f} = -\frac{1}{X_f} = -\frac{1}{0.5} = -2(\text{D}) = -200(\text{度})$$

此近视眼患者应配戴焦度为 200 度的凹透镜。

2. 远视眼 若眼睛不调节时, 平行光射入眼内的光线会聚视网膜之后, 如图 14-23(a)。此类眼睛称为远视眼, 远视眼的近点距离大于正视眼。远视眼在不调节时看不清远、近处物体, 通过调节可以看清远处物体, 但近处物体仍然看不清。

远视眼产生的原因可能是角膜或晶状体折射面的曲率半径太大, 焦度太小; 或者是眼球前后直径太短, 物体的像成在视网膜之后。

远视眼矫正的方法是配戴凸透镜, 让平行光线先经凸透镜会聚, 再经眼睛折射后会聚于视网膜上, 如图 14-23(b)。由于远视眼的近点较正视眼的远, 因此, 远视眼若要和正常人眼一样看清近处物体, 所选择的凸透镜必须将此物体的虚像成在接近远视眼的近点处。

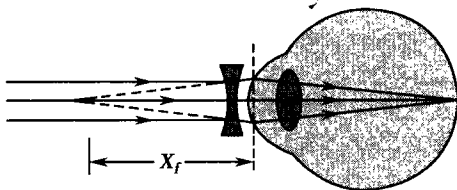


图 14-22 例 14-4

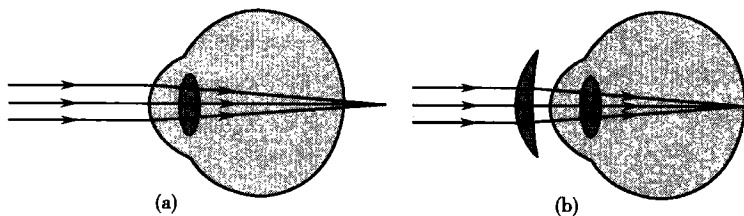


图 14-23 远视眼及其矫正

〔例 14-5〕 某远视眼患者的近点距离 X_n 为 1.2m 处,要看清眼前 12cm 处的物体,问应配戴怎样的眼镜?

解:所配戴眼镜应使眼前 12cm 处物体在眼前 1.2m 处成虚像,如图 14-24。对于透镜: $u = 0.12\text{m}$, $v = -X_n = -1.2\text{m}$,代入薄透镜成像公式,得

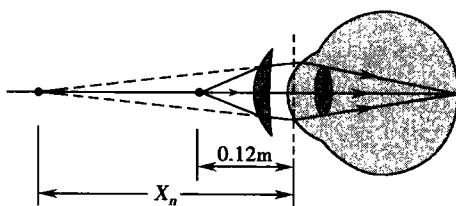


图 14-24 例 14-5

$$\Phi = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.12} - \frac{1}{X_n} = \frac{1}{0.12} - \frac{1}{1.2} = 7.5(\text{D})$$

即远视眼患者应配戴焦距为 750 度的凸透镜。

3. 散光眼 近视眼和远视眼都属于球面屈光不正,其角膜是球面,在各个方向子午线的曲率半径皆相等,属于对称折射系统;而散光眼属于非对称折射系统,其角膜在各个方向子午线的曲率半径都不相等,点物发出的光线经角膜折射后不能形成清晰的点像。图 14-25 表示了散光眼的角膜及其成像,此散光眼的眼球纵向子午线半径最短,横向子午线的半径最长,其他方向子午线半径介于两者之间。当来自远处物体的平行光线经角膜折射后纵向子午面内的光线会聚于 I_V 处,横向子午面内光线会聚于 I_H 处,其他方向子午面内光线会聚于 I_V 和 I_H 之间,在 I_V 、 I_H 之间的不同位置处形成的像各有不同。

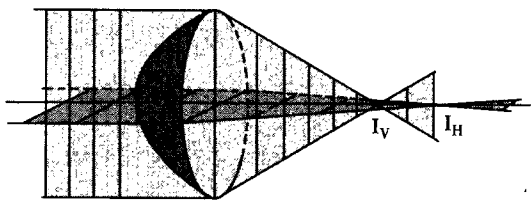


图 14-25 散光眼成像

散光眼的矫正方法是配戴适当焦度的柱面透镜,以矫正屈光不正子午线的焦度。散光有近视散光和远视散光之分,配戴的眼镜对应为凹柱面透镜和凸柱面透镜。

第四节 几种医用光学仪器

一、放大镜

为了看清楚微小物体或物体的细节,需要把物体移近眼睛,以增大物体对人眼的视角,使物体在视网膜上产生一较大的像。但是,眼睛的调节是有限的,要看清微小物体的细节,既要使物体对眼睛有足够大的视角,又要大于近点距离,这两个要求是相互矛盾的。解决此矛盾的办法是在眼前放置一个会聚透镜,以增大物体对人眼的视角。用于这一目的的会聚透镜,称为**放大镜**(magnifier)。

使用放大镜时,需将物体放在放大镜焦点内、靠近焦点处,使物体经放大镜折射后形成



正立放大虚像。

在图 14-26(a) 中, 物体放在明视距离处, 对眼睛产生的视角为 β ; 利用放大镜观察同一物体时视角增为 γ , 如图 14-26(b)。通常用这两个视角的比值 γ/β 衡量放大镜放大视角的能力, 称为角放大率 (angular magnification), 用 α 表示, 即

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta} \quad (14-13)$$

由于物体线度 y 很小, 故视角 β, γ 很小, 则

$$\tan \beta \approx \beta = \frac{y}{25}$$

$$\tan \gamma \approx \gamma \approx \frac{y}{f}$$

将上述两式代入式(14-13)中, 得

$$\alpha = \frac{y}{f} \cdot \frac{25}{y} = \frac{25}{f} \quad (14-14)$$

式中 f 为放大镜的焦距。此式表明, 放大镜的角放大率与它的焦距 f 成反比, 即放大镜焦距越小, 角放大率越大。但如果 f 太小, 透镜会很凸、很厚, 出现色像差, 所以单一透镜放大镜的放大率一般都小于 3 倍 (写成 $3\times$), 若是组合透镜, 放大率可以达到 $20\times$, 且像差小。

二、光学显微镜

1. 显微镜的光学原理 显微镜是生物学和医学中广泛使用的仪器, 其放大倍数为 $10^2 \sim 10^3$ 倍, 是我们了解微观世界的工具。普通光学显微镜由两组会聚透镜组成, 其光路如图 14-27。 L_1 称为物镜 (objective), L_2 称为目镜 (eyepiece)。实际的物镜和目镜分别由多个薄透镜组成, 其目的在于减小各种像差, 成像清晰, 便于观察。将被观察的物体 (物体的长度为 y) 倒置在靠近物镜的第一焦点外, 经 L_1 折射后物体在目镜的第一焦点内 (靠近第一焦点的位置) 形成一个放大的实像 (实像的长度用 y' 表示), 实像再经目镜放大后成正立虚像 (虚像的长度用 y'' 表示), 虚像相对人眼张开的视角为 γ 。

根据光学仪器放大率的定义, 显微镜的放大率 M 为

$$M = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}$$

由图知, $\tan \gamma = \frac{y''}{v_2 + x} \approx \frac{y'}{v_2} = \frac{y'}{u_2}$, 一般情况下 x 取为零, $\tan \beta = \frac{y}{25}$, 代入上式得

$$M = \frac{y' \cdot 25}{u_2 y} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{25}{u_2} = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{25}{u_2}$$

式中 $y'/y = v_1/u_1$ 称为物镜的线放大率 (用 m 表示); $25/u_2 \approx 25/f_2$, f_2 为目镜焦距, 是目镜的角放大率 (用 α 表示), 代入上式得

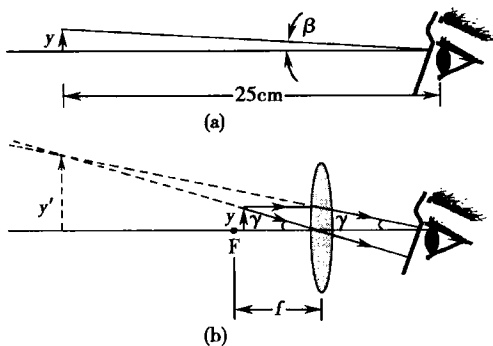


图 14-26 放大镜的原理

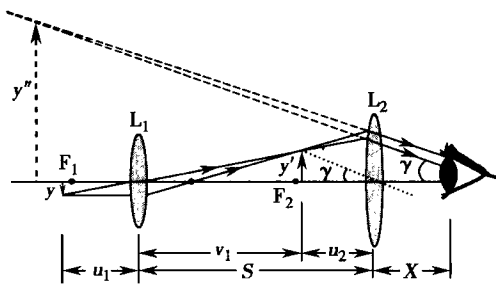


图 14-27 光学显微镜的光路图



$$M = \frac{v_1}{u_1} \frac{25}{f_2} = m_{\alpha} \quad (14-15)$$

即显微镜的放大率等于物镜的线放大率与目镜的角放大率的乘积。实际使用的显微镜配有各种放大率的物镜和目镜,适当组合可以获得所需的放大率。

由于被观察物体靠近物镜第一焦点, $u_1 \approx f_1$, 且物镜和目镜的焦距都很小, 所以物镜的线放大率 $v_1/u_1 \approx s/f_1$, s 是显微镜镜筒的长度 ($s \approx v_1 + f_2 \approx v_1$), 因此显微镜的放大率又可写成

$$M \approx \frac{s}{f_1} \cdot \frac{25}{f_2} = \frac{25s}{f_1 f_2} \quad (14-16)$$

显微镜放大率与所用物镜和目镜的焦距成反比。

2. 光学系统的分辨本领 利用光学系统观察较为复杂的物体, 其画面可以看成由许多不同亮度、不同位置物点的像所组成。每个物点所成的像实际上是具有一定大小的艾里斑, 物点靠得太近, 艾里斑彼此重叠太多, 物体的细节将变得模糊不清。因此, 衍射现象限制了光学系统分辨物体细节的能力。光学系统能分辨两物点间最短距离的倒数称为光学系统的分辨本领(resolving power)。

当物点 A_1 和 A_2 发出的光线经光学系统 L 成像后在光屏上呈现相应的衍射图样 A_1' 和 A_2' 。若 A_1 和 A_2 相距较远, 两衍射图样 A_1' 和 A_2' 亦相距较远, 光强度的合成曲线 A 表明, 两最大光强度之间有一最小光强度, 很容易分辨出是两物点所成的像, 如图 14-28(a) 所示。随着 A_1 和 A_2 逐渐靠近, 光屏上两衍射图样 A_1' 和 A_2' 也随之靠近、重叠, 当衍射图样 A_1' 的中央最大光强度处与衍射图样 A_2' 的第一最小光强度处重合时, 它们合成后的光强度曲线 A 中两最大光强度之间的极小光强度为最大光强度的 80%, 人眼正好能够分辨从合成的衍射图样中判别出是两个物点所成的像。换言之, 当一物点的衍射亮斑中心恰好与另一物点的衍射图样中的第一暗环重合时, 两物点之间的距离恰好是可以分辨的极限距离, 此即瑞利分辨判据(Rayleigh criterion), 如图 14-28(b) 所示。 A_1 和 A_2 靠得更近时, 对应的两衍射图样重叠部分增多, 两个物点将无法被分辨, 如图 14-28(c) 所示。

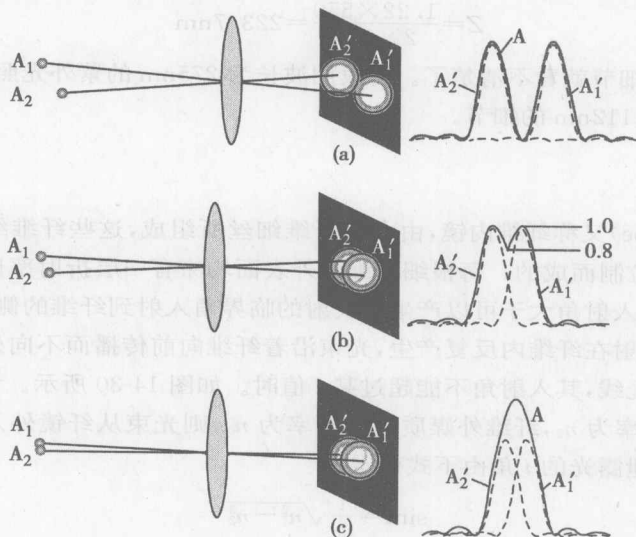


图 14-28 光学系统的分辨本领

3. 显微镜的分辨本领 显微镜能分辨两点之间的最短距离称为最小分辨距离, 最小分辨距离的倒数称为显微镜的分辨本领或分辨率。



根据显微镜的具体使用情况,阿贝(Abbe, E)指出:物镜所能分辨两点之间的最短距离为:

$$Z = \frac{1.22\lambda}{2n\sin u} \quad (14-17)$$

式中 λ 是光波的波长, n 是物镜与标本之间媒质的折射率, u 为物点发出的光线与物镜边缘所成锥角的一半。 $n\sin u$ 称为物镜的数值孔径(numerical aperture),用 $N \cdot A$ 表示,因此,上式可写成:

$$Z = \frac{0.61\lambda}{N \cdot A} \quad (14-18)$$

可见物镜孔径数越大、照射光波长越短,显微镜能分辨的最短距离越小,越能看清物体的细节,显微镜的分辨本领也越强。

提高显微镜分辨本领的方法之一是增大物镜的孔径数,如利用油浸物镜增大 n 和 u 值。通常情况下,显微镜物镜和标本之间的媒质是空气(称为干物镜),如图14-29(左)。它的孔径数 $n\sin u$ 值最大只能达到0.95,这是因为自P点发出的光束到达盖玻片与空气界面时,部分光线因为折射、全反射不能进入物镜,进入物镜的光束锥角较小。如果在物镜与盖玻片之间滴入折射率较大的透明液体,如香柏油($n \approx 1.52$),可将物镜的孔径数 $n\sin u$ 增大到1.5,此即油浸物镜,如图14-29(右)。油浸物镜不仅提高了显微镜的分辨本领,而且避免了全反射的产生,增强了像的亮度。

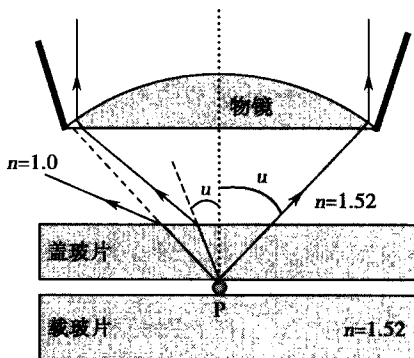


图14-29 干物镜(左)和油浸物镜(右)

提高显微镜分辨本领的另一种方法是减小照射光波的波长。例如,用 $N \cdot A$ 为1.5的高级油浸物镜,用可见光照明(平均波长为550nm),显微镜能分辨的最短距离为

$$Z = \frac{1.22 \times 550}{2 \times 1.5} = 223.7 \text{ nm}$$

比223.7nm再小的细节就看不清楚了。若改用波长为275nm的紫外光照明,可使分辨本领提高1倍,可看清楚112nm的细节。

三、纤镜

纤镜(fiber scope)又称纤维内镜,由大量纤维细丝所组成,这些纤维细丝都是由透明度高的材料(如玻璃)拉制而成的。每根细纤维丝外表面均涂有一层折射率比纤维丝折射率还小的物质,当光束以入射角大于可以产生全反射的临界角入射到纤维的侧壁时,光束在侧壁处产生全反射,全反射在纤维内反复产生,光束沿着纤维向前传播而不向外泄露。这就要求从纤镜表面入射的光线,其入射角不能超过某 i 值时。如图14-30所示。设纤维的折射率为 n_1 ,涂层物质的折射率为 n_2 ,纤维外媒质的折射率为 n_0 ,则光束从纤镜外入射到纤镜端面光线不会向纤维侧面泄露光的 i 角由下式确定:

$$\sin i = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

而“ $n_0 \sin i$ ”称为光学纤维的数值孔径($N \cdot A$)。

医学所用纤镜有两个作用:一是将外部强光导入人体器官内;二是把器官内壁图像导出体外。光学纤维可以导出黑白图像,也可以导出彩色图像。纤维束的两端必须粘结牢固,两端的纤维丝排列须完全对应,以免图像错乱、不清晰,如图14-31。纤维束两端粘结牢固后,



中间部分并不粘结,这样整个纤维束很柔软,可弯曲,并具有一定的机械强度,使用时非常方便。

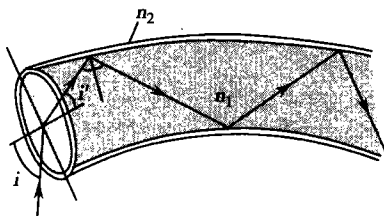


图 14-30 光学纤维导学原理

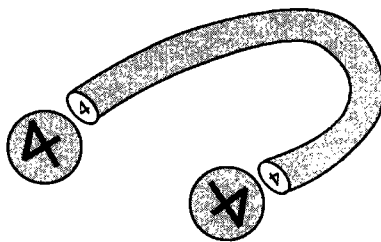


图 14-31 光学纤维导像示意图

* 四、特殊显微镜

显微镜的种类很多,除了前面介绍的光学显微镜,常用的还有荧光显微镜、偏光显微镜、相差显微镜、暗视野显微镜、电子显微镜、激光扫描共焦显微镜等等,适用的对象不同,放大倍数也有很大差别。下面简单介绍其中的几种。

1. 荧光显微镜 (fluorescence microscope) 荧光显微镜与普通显微镜的主要区别是所用的光源不同。荧光显微镜以紫外线作光源,激发标本中荧光物质产生荧光,以进行观察,荧光显微镜得到的是物体的荧光图像。很多物质在紫外线照射下可以发出荧光,但有些物质本身不发荧光,如细菌。不发荧光的物质用荧光物质染色后,在紫外线照射下也可以发荧光。

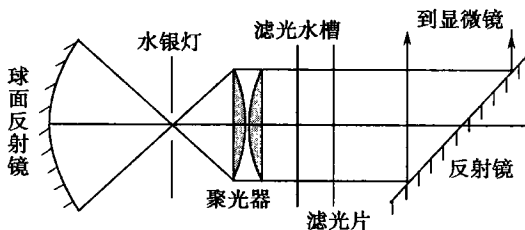


图 14-32 荧光显微镜的光源部分

荧光显微镜的光源部分如图 14-32 所示。在球面反射镜的焦点处有一水银灯,由水银灯发射的 365.0nm 紫外线,首先投射到聚光器上被聚光,经滤光水槽吸收其中可能含有的红外线,再经滤光片滤去可能存在的可见光,为荧光显微镜提供波长一定的紫外线。由于荧光显微镜所观察的是物体的荧光像,所以在物镜或目镜上有一块滤光片,滤去紫外线以保护眼睛。

荧光显微镜的最大特点是灵敏度高,用浓度很低的荧光物质对标本染色后,其对比度约为可见光显微镜的 100 倍。标本的细节在暗视野中显得明亮,好像它本身发光一样。荧光显微镜是生物、医学中的重要工具,它使荧光分析的敏感性与光学显微术的精细性有机地结合起来,借以研究生物的某些结构、形态和物性等。

2. 偏光显微镜 (polarized light microscope) 偏光显微镜主要用来观察某些具有双折射现象的物质和旋光物质,如生物体的某些组织:骨骼、牙齿、蛋白质、核酸等。

偏光显微镜的结构原理如图 14-33。由平面镜 M 反射的光线,经起偏器 P 后变为偏振光,P 可以绕显微镜轴线旋转,其上附有刻度,当 P 在零位置时,与检偏器 A 的振动面互相垂直。聚光器 C 使光线会聚于载物台 S 处的标本上,聚光器上还可以加一个凸透镜 N 以增大光锥(在观察干涉图样时才加入),O 是物镜,A 是检偏器,B

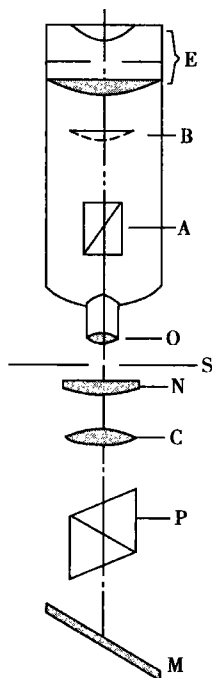


图 14-33 偏光显微镜



是伯特兰透镜(用来放大物镜的像),E 是目镜。

在使用偏光显微镜前,常常使起偏器和检偏器的透射轴互相垂直,此时显微镜中的视场呈黑暗(光强度为零)。若将具有双折射现象的标本置于载物台的圆孔处,视野将变亮,旋转载物台上的物体,每旋转 45° ,标本的像将由最亮到最暗变化一次,其原理可用图 14-34(a)来说明。

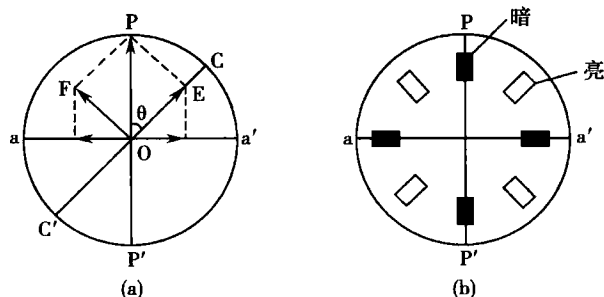


图 14-34 像的亮度变化

设 PP' 为起偏器 P 的振动面, aa' 为检偏器 A 的振动面。当标本中的寻常光和非常光的振动方向分别与 PP' 和 aa' 重合时,通过起偏器的平面偏振光将通过标本。但此偏振光不能通过检偏器(因为此偏振光的振动面垂直于检偏器的振动面 aa'),视场为黑暗。当标本中的寻常光和非常光的振动方向分别与 PP' 和 aa' 不重合时,如寻常光的振动方向 CC' 与 PP' 成一锐角 θ ,来自起偏器 P 的平面偏振光(其振幅为 OP)通过标本后变为两束振动方向相互垂直的偏振光,其振幅分别用 OE 和 OF 表示。它们都能部分地通过检偏器,即在检偏器的振动面 aa' 方向有偏振光的分量通过,因而视场内可看到标本的像,当夹角为 45° 时,像最亮,载物台每转动一周就会出现四明四暗的变化,如图 14-34(b)所示。

如果设法增加标本中各向同性细节和各向异性细节之间的对比度,则更能突出标本的特性。例如在研究神经纤维的变性时,偏振光则能显示出在自然光下观察不到的神经纤维结构。若神经纤维组织被切断 1.5 小时的时间,用偏光显微镜就能观察到变性过程;但用自然光则需要 3 天,在如此长的时间内神经纤维已完全变性。偏光显微镜还可以显示出在不同媒质中活细胞的内含物和结构细节,而这些用自然光显微镜却无法观察到,或因染色等而受到破坏。偏振光还可用来研究随意肌、神经纤维、横纹肌、头发、指甲、淀粉粒和胆固醇等的双折射性质以及细胞的分裂机制。齿和肾的磨片在普通光学显微镜下观察不到它们的区别。但在偏光显微镜下检查则有强烈的颜色对比。偏振光还可以将正常细胞和肿瘤细胞分辨开。

3. 相差显微镜 (phase contrast microscope) 普通显微镜观察标本时可看到颜色和亮度不同的图像,这是因为标本经过染色固定后各部分对光波的吸收不同。对于一个完全透明而未经染色的标本(例如细胞),由于各部分对光波的吸收大致相同,在普通显微镜下将看不到图像。实际上,由于标本不同组织的折射率不同,光波通过时的光程会有差别,因此,通过标本不同部位的光波,其相位不一样。人眼可以察觉振幅存在差别的光波,但不能察觉相位存在差别的光波。如果能把相位之差别转变为振幅的差别,人眼便可以识别,相差显微镜便是用于这一目的的显微镜。相差显微镜的工作原理如图 14-35(a)所示。波长为 λ 的平行光入射到标本上,如果标本中某处 O 的线度与光波长 λ 可比拟,则部分光波将被 O 衍射,衍射光波(虚线表示)经物镜后在其像平面上成像而另一部分未经衍射的平行光通过物镜后在其焦平面上会聚,然后又发散并落在像平面上,形成一均匀照亮的背景。设 O 处的折射率为 n ,厚度为 L ,则直射光和衍射光之间有一光程差 $\delta = nL - L = L(n - 1)$, δ 一般约为 $\lambda/4$ 。直射光与衍射光的振幅与相位关系如图 14-35(b)所示。它们将在像平面 O' 处产生干涉,为了加强干涉效果,在物镜的焦平面上加一块相位板,在这块相位板中直射光和衍射光



走过的光程不一样,目的是使它们的光程差由原来的 $\lambda/4$ 增加到 $\lambda/2$ 。同时,在直射光经过的部分(中心区)还镀上一层金属薄膜,使直射光通过金属薄膜后振幅减弱一半,图 14-35(c) 中的虚线表示直射光和衍射光在 O' 处相遇时的振幅和相位的关系。它们相互干涉的结果得到一暗像。在标本的其他点,由于折射率不同,则光程差不同,像的明暗程度也不同。由此,可把相位差转变为振幅差。

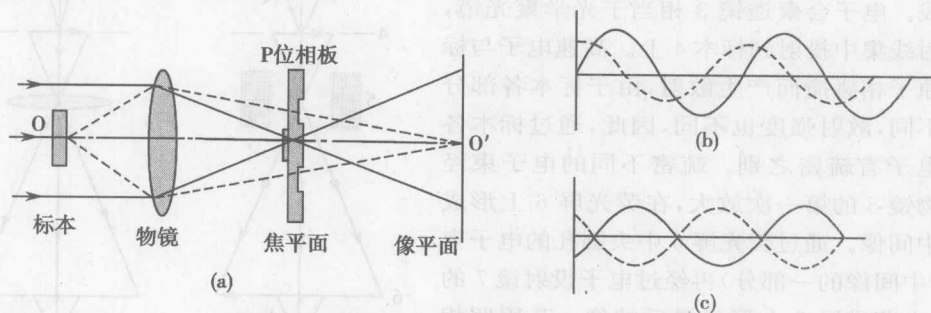


图 14-35 相差显微镜的工作原理

4. 电子显微镜(electron microscope) 光学显微镜的分辨本领受到照射光波长的限制,波长越短,分辨本领越高。但即使使用了紫外线的显微镜,其分辨的最短距离也仅为



放大倍数为 150 万倍。图 14-38 是透射式电子显微镜与光学显微镜基本结构的对照图。在电子显微镜中,由阴极 1 和阳极 2 组成电子源,相当于光学显微镜的光源。炽热的阴极发射的电子经阴极与阳极之间 30~100kV 电压加速,成为高速电子射线。电子会聚透镜 3 相当于光学聚光镜,使电子射线集中投射到标本 4 上。高速电子与标本中的原子相碰撞而产生散射,由于标本各部分的密度不同,散射强度也不同,因此,通过标本各部分的电子有疏密之别。疏密不同的电子束经过电子物镜 5 的第一次放大,在荧光屏 6 上形成标本的中间像。通过荧光屏 6 中央圆孔的电子束(相当于中间像的一部分)再经过电子投射镜 7 的放大后,在荧光屏 8 上形成最后的像。若用照相底片代替荧光屏 8,可把最后的像记录下来。在靠近荧光屏 6 和荧光屏 8 的侧旁设有观察镜,以便观察荧光屏 6 和荧光屏 8 上的中间像和最后像。

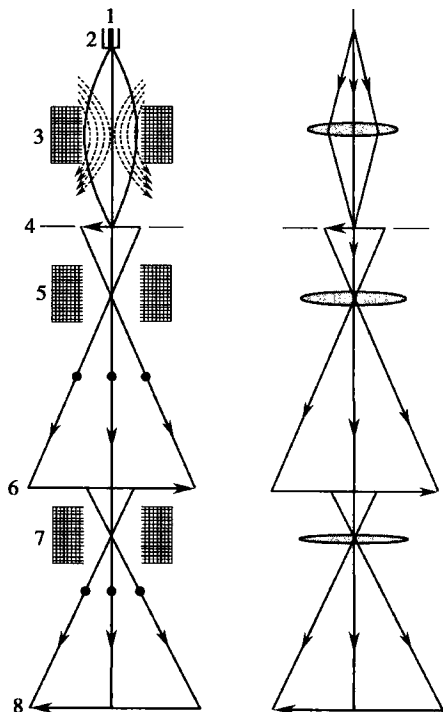


图 14-38 透射式电子显微镜与光学显微镜

图 14-39 为扫描电子显微镜的结构原理图。图中 U 形的钨丝 F(即阴极)产生大量的电子。这些电子经过电磁透镜 L_1 、 L_2 和 L_3 的连续会聚,形成一条很细的、直径约为 $0.01\mu\text{m}$ 电子束,如此细的电子束亦称为电子探针,它在两对偏转线圈的作用下,由上至下在标本 P 的表面上左右扫描(图中只示出一对线圈 A_1 、 A_2)。偏转线圈的电流由锯齿波发生器 G 获得。同样的锯齿电流也加到阴极射线示波器 T 的偏转线圈上,以使示波器的电子射线在荧光屏上产生同步扫描,但是显示出的图像范围却很大。从标本 P 射出的二次电子,在离开 P 后被探测器 C 所收集,又被放大器 A 放大,用来控制示波器的亮度。这样示波器荧光屏上的每一点都与标本 P 上的每一点相对应。由于荧光屏上每点的亮度被 P 表面上相应点所发射的二次电子数所控制,因此,荧光屏 T 上所形成的图像必然是 P 表面上的图像。放大率为荧光屏屏面上与 P 面上的标本大小之比,通过控制两套偏转线圈的电流来改变电子探针在样品表面扫描的面积,便可以控制放大倍数。

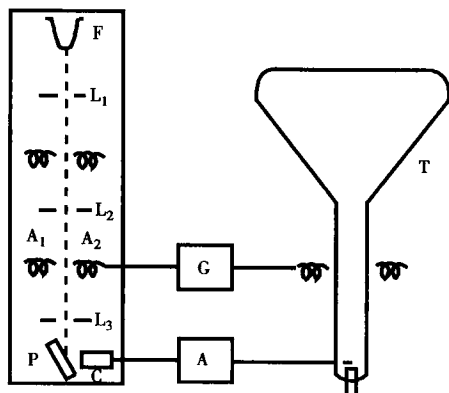


图 14-39 扫描电子显微镜结构示意图

电子显微镜在科学技术方面应用比较广泛,尤其对医学、生物的发展起着极其重大的推动作用,电镜技术促使基础医学研究从细胞水平进入了分子水平。如脱氧核糖核酸(DNA)的详细结构,过滤性病毒,细菌内部结构等均可利用电镜进行观察。

5. 激光扫描共焦显微镜(laser scanning confocal microscope, LSCM) 激光扫描共焦显微镜是 20 世纪 80 年代发展起来的新型显微细胞仪,它利用共焦光路,以激光作为扫描光源,逐点、逐行、逐面快速实时扫描样品并获得不同层面的实时图像。激光扫描共焦显微镜系列仪器成为了生物医学研究领域不可缺少的有力手段。



INSIGHT_{PLUS}—IQ™型是激光扫描共焦显微镜之一,是直接观察样品图像的快速实时扫描显微镜。它主要由显微镜、光度计和计算机图像处理系统组成。在图 14-40 中,观察装置有目镜、冷 CCD 摄录机和 35mm 照相机;在目镜下方的接收光路中使用空间滤波器(可变缝隙),严格限制某点的光信号进入接收器(光电倍增管或 CCD),排除杂散光的干扰,从而提高激光扫描共焦显微镜的分辨率;在目镜和物镜之间,经光源发出的激光由光束整形镜调控,通过光束整形镜的激光束入射到双面反射扫描镜上,双面反射扫描镜的移动由微量计调节。双面反射镜是激光扫描共焦显微镜的重要部件之一,通过微量计移动它,可大大提高扫描速度,最多能获得每秒 120 幅的图像。

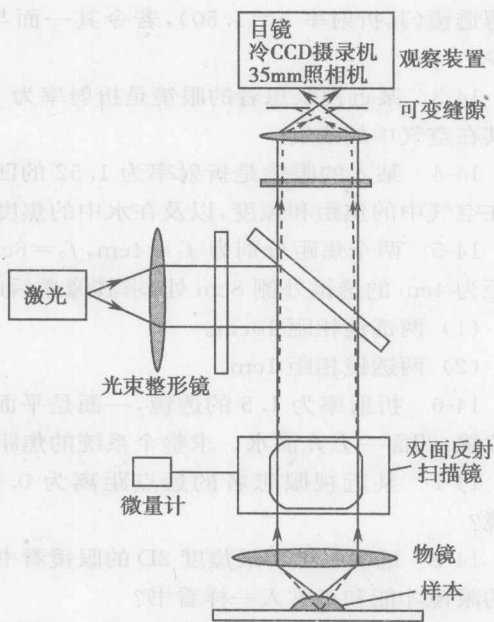


图 14-40 激光扫描共焦显微镜

激光扫描共焦显微镜的扫描激光与荧光搜集共用一个物镜,物镜的焦点即为扫描激光的焦点,同时也是实时成像的物点。激光扫描共焦显微镜一次调焦后将扫描限制在样品的一个平面内,调焦深度不一样时,就可以获得不同深度层次的图像。这些图像信息再经计算机处理系统进行三维重新组合,就能显示出细胞样品的三维立体结构图像,获得细胞内各部分之间的定量关系,以及各种结构的线度。

激光扫描共焦显微镜能拍摄到细胞内瞬间变化的真实彩色图像,并具有众多的图像分析功能,这些功能均通过计算机进行控制。其功能包括数据档案库;文字储存、复制、删除和转移;图像尺寸、形态、数量、面积的测量和分析;图像中荧光含量的分布等。

由于激光扫描共焦显微镜的扫描速度可达每秒 120 幅画面,因而能拍摄到细胞瞬间变化的图像。还可设定参数,按任意的时间间隔在任意区间扫描,并且在扫描过程中进行调整和记录时间标记,得到实时动态数据图像。显微图像也可用目镜直接观察或者用 ZEISS, NIKON 和 OLYMPUS 显微镜观察。激光扫描共焦显微镜可直接观察活细胞,对其每一断层或一系列某瞬间细胞的形态结构的变化进行实时拍摄,获得动态变化的实时彩色图像,再用计算机系统快速记录和分析,并进行三维重组等,使对细胞的超微结构及其功能的研究达到更理想的境界。

激光扫描共焦显微镜广泛用于细胞生物学、分子生物学、免疫学、遗传学、医学和神经生理学等各个研究领域。

思考题和习题十四

14-1 玻璃棒($n=1.5$)长 20cm,两端是双凸球面,球面半径皆为 4cm。若一束近轴平行光线沿棒轴方向入射,求像的位置,如图 14-41。

(-16cm)

14-2 在空气($n_1=1.0$)中焦距为 0.1m 的双



图 14-41 习题 14-1



凸薄透镜(其折射率 $n=1.50$),若令其一面与水($n_2=1.33$)相接,则此系统的焦度改变了多少? (3.3D)

14-3 某近视眼患者的眼镜是折射率为 1.52 的平凹薄透镜,凹面的曲率半径为 10cm,求其在空气中的焦度。 (-520 度)

14-4 某人的眼镜是折射率为 1.52 的凹凸薄透镜,曲率半径分别为 0.08m、0.13m,求其在空气中的焦距和焦度,以及在水中的焦度。 (0.4m, 2.50D, 0.913D)

14-5 两个焦距分别为 $f_1=4\text{cm}$, $f_2=6\text{cm}$ 的薄透镜在水平方向先后放置,某物体放在焦距为 4cm 的透镜外侧 8cm 处,求其像最后成在何处。

(1) 两透镜相距 10cm。 (-3cm)

(2) 两透镜相距 1cm。 (3.2cm)

14-6 折射率为 1.5 的透镜,一面是平面,另一面是半径为 0.20m 的凹面,将此透镜水平放置,凹面一方充满水。求整个系统的焦距。 (-1.2m)

14-7 某近视眼患者的远点距离为 0.1m,它看无穷远处物体时应配戴多少度何种眼镜? (-1000 度)

14-8 远视眼患者戴焦度 2D 的眼镜看书时须把书拿到眼前 40cm 处,此人应配戴多少度的眼镜才能和正常人一样看书? (3.5D)

14-9 显微镜目镜的焦距为 2.5cm,物镜的焦距为 1.6cm,物镜和目镜相距 22.1cm,最后成像于无穷远处。问:

(1) 标本应放在物镜前什么地方? (1.74cm)

(2) 物镜的线放大率是多少? (11 倍)

(3) 显微镜的总放大倍数是多少? (110 倍)

14-10 用孔径数为 0.75 的显微镜去观察 $0.3\mu\text{m}$ 的细节能否看清?若改用孔径数为 1.3 的物镜去观察又如何?设所用光波波长为 600nm。

14-11 明视距离处人眼可分辨的最短距离为 0.1mm,欲观察 $0.25\mu\text{m}$ 的细胞细节,显微镜的总放大倍数及 $N \cdot A$ 应为多少(所用的光波波长为 600nm)? (400 倍、 $N \cdot A: 1.46$)

(魏 杰)

第十五章 量子力学基础

学习要求:

1. 掌握描述光的波粒二象性的有关理论, 包括黑体辐射规律、普朗克的能量量子化假设、爱因斯坦的光子理论和玻尔理论等。
2. 掌握描述实物微观粒子的波粒二象性的德布罗意物质波假设、不确定关系、波函数和薛定谔方程等基本概念和规律。
3. 理解原子结构的量子力学描述。
4. 了解薛定谔方程的应用和原子、分子光谱的特点及产生机制。

1900 年普朗克 (Planck) 提出的能量量子化假设, 开创了量子物理的新纪元。在普朗克假设的启发下, 1905 年爱因斯坦 (Einstein) 提出光子假设, 揭示了光的波粒二象性。1913 年玻尔 (Bohr) 把量子概念引入原子领域, 提出量子态的概念, 并得到实验的有力支持。但由于当时对微观粒子的基本属性缺乏认识, 玻尔理论仍有不可克服的困难。

1923 年康普顿 (Compton) 用 X 射线做散射实验, 进一步证实了光子理论的正确性。1924 年德布罗意 (de Broglie) 提出微观粒子也具有波粒二象性的假设, 并为后来的电子衍射实验所证实。在这些假设的基础上, 薛定谔 (Schrödinger)、海森伯 (Heisenberg) 等人建立起了量子力学的理论体系, 这是人类对微观世界认识上的重大突破。量子力学首先在阐明原子结构上取得突出成就, 为元素周期律建立了严格的科学基础。后来在量子力学指引下研究原子核, 为人类全面利用核能铺平道路。在量子力学指引下研究固体材料, 开创了半导体技术的新时代。激光也是在量子力学指导下发明的。当今, 量子力学理论已成为近代物理的基础, 也成为许多交叉学科如量子化学、材料物理及量子生物学的基础。量子力学理论还被广泛应用于高新技术及工、农、医等领域。一切和物质微观结构有关的现代科学技术, 都离不开量子力学的指导。如果说相对论为我们提供了新的时空观, 那么量子力学则为我们提供了对物质世界的新的思维方式和表达方式, 并为一系列学科奠定了理论基础。

本章着重介绍量子力学的基本概念、规律和方法。量子力学的研究方法有以下几种: 波动力学法、矩阵法、作用量法、算符法等。由于波动规律是我们已熟悉的, 本章沿用薛定谔波动力学法。在学习本章内容时, 需特别注意学习物理学家的独创思维方式和奇特的研究方法。

第一节 黑体辐射

一、黑体辐射

物体内部的原子和分子都在不停地做热运动。在剧烈的碰撞中, 总是不断有原子吸收动能进入激发状态, 然后又以电磁波的形式将多余能量辐射出去。这种由热运动引起的辐射现象称为热辐射 (thermal radiation)。太阳发光、火炉燃烧都是热辐射。在室温下, 甚至更低的温度下, 一切物体都在不断地辐射着电磁波。室温下大多数物体辐射的电磁波分布在红外区域。一个物体辐射出去的电磁波的能量 (称为辐射能) 等于它同时间内吸收的辐射能时, 物体的温度保持不变, 这就是热平衡辐射。物体对入射的电磁波, 一般能部分反射, 部



分吸收,部分折射。如果一个物体对入射的各种波长的电磁波能量能全部吸收,我们就称它为黑体(black body)。显然,在相同温度下,黑体的吸收本领最大,因而其辐射本领也最大。除宇宙中的黑洞之外,一般的物体都不可能是黑体。由此看来,黑体是一种理想模型。

用不透明的材料制成一大空腔,外面开一个小孔,可以看作是黑体模型,如图 15-1 所示。由小孔射入黑体空腔中的电磁波,经多次反射和吸收,最后能量在腔内几乎完全被吸收掉。由于小孔的面积远比空腔壁为小,故由小孔穿出的辐射能可以忽略不计。这样,小孔就和黑洞相同,它把射入的辐射能全部吸收了。于是,这个小孔就可以被看作是一块黑体表面,当给空腔加热时,由小孔发出的辐射就是黑体辐射(black body radiation)。在日常生活中,白天人们用眼遥望远处楼房的窗口,发现窗口特别黑暗,这是因为光线进入窗口后,经过墙壁多次反射吸收,很少再能从窗口射出的缘故,所以这里被提及的窗口就类似于黑体。在金属冶炼时,在冶炼炉上开一个小孔,通过小孔可以测量炉内温度,这一小孔也近似为黑体。

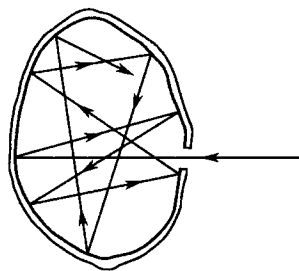


图 15-1 黑体模型

单位时间内从黑体单位面积上所发射的各种波长电磁波能量的总和,即黑体表面单位面积的辐射功率,称为辐射出射度(radiant exitance),简称辐出度,对某一单色光的辐出度称为单色辐出度,用 $M_\lambda(T)$ 表示,对于波长在 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ 范围的电磁辐射的辐出度用 $dM_\lambda(T)$ 表示,则 $dM_\lambda(T) = M_\lambda(T) d\lambda$ 。某一温度下对所有波长的总辐出度 $M(T) = \int_0^\infty dM_\lambda(T) =$

$\int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda$ 。辐出度的单位是 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。用分光技术测出黑体辐射出的电磁波的能量按波长的分布,就可得出图 15-2 所示的黑体辐射的单色辐出度与波长的关系的实验曲线。由此曲线可总结出黑体辐射的两条实验规律。

1. 斯特藩-玻耳兹曼定律 图 15-2 所示的每一条曲线,反映了在一定温度下黑体的单色辐出度 $M_\lambda(T)$ 随波长 λ 的分布情况。每一条曲线下面的面积等于黑体在一定温度下的总辐出度 $M(T)$, $M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda$ 。经实验确定, $M(T)$ 和绝对温度 T 的四次方成正比。

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (15-1)$$

式中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, 称为斯特藩常数。这一结果又由玻耳兹曼从热力学理论导出,故此定律又称为斯特藩-玻耳兹曼定律(Stefan-Boltzmann's Law)。

2. 维恩位移定律 从图 15-2 中可以看出,每一条曲线上 $M_\lambda(T)$ 都有一最大值(即峰值)就是最大的单色辐出度。相应于这一最大值的波长用 λ_m 表示,称为峰值波长。随着温度 T 的增高, λ_m 向短波方向移动。两者的关系经实验确定为

$$T\lambda_m = b \quad (15-2)$$

式中 b 为常数, $b = 2.898 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$ 。这一结果也可从热力学理论导出,称为维恩位移定律(Wien's displacement law)。该定律反映出热辐射的峰值波长随着温度升高而向短波方向移动。例如低温的火炉发出的辐射能,较多分布在波长较长的红光中,而高温的白炽灯发出的辐射能则较多地分布在波长较短的蓝光中。

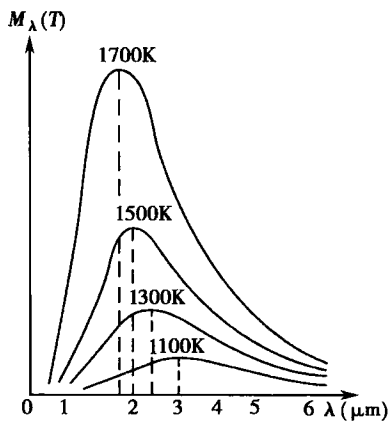


图 15-2 黑体辐射能谱曲线



热辐射规律在现代科学技术上的应用极为广泛,它是高温遥测、红外追踪、遥感等技术的物理基础,太阳表面的温度就是用维恩位移定律测出的。

在医学上用的热像仪,也是热辐射应用的一种。人体温度在 310K 附近,所发出的热辐射在远红外区,波长范围约在 $9\sim 12\mu\text{m}$ 。近年来发展了灵敏度极高的红外遥测器,可以遥测体温,热像仪就是根据这一原理制成的。使用时可检测某一部位各点的热辐射,并记录其强度,于是得出该部位体表的温度分布,再通过电子计算机处理后显示在彩色荧光屏上,称为热像图,它能分辨 1cm^2 范围内 0.03°C 的温度差异。人体体表部位的病变能使该处温度发生异常,例如癌变可使温度升高 0.5°C 。热像图目前应用于乳腺癌、脉管炎等的诊断、判断断肢再植的功能恢复情况,以及各种尖端科学研究中。

【例 15-1】已知在红外线范围($\lambda=1\sim 14\mu\text{m}$)内,人体可近似看作黑体。假设成人体表面积的平均值为 1.73m^2 ,表面温度为 $33^\circ\text{C}=306\text{K}$,求人体辐射的总功率。

解:根据(式 15-1),人体单位表面积的辐射功率为:

$$M(T)=\sigma T^4=5.67\times 10^{-8}\times 306^4=497(\text{W}\cdot\text{m}^{-2})$$

人体辐射的总功率为:

$$P_{\text{总}}=1.73\times 497=860(\text{W})$$

根据这一功率值算出的人体每天辐射的总能量,约为每人每天平均从食物摄入的热量 3000 卡的 6 倍,这是难以理解的。原因在于,当人体周围的物体温度不是绝对零度时,这些物体也要向人体辐射能量。热力学的理论证明,当黑体的温度 T 和周围环境温度 T_0 不相等时,黑体的辐射功率应为:

$$M(T)=\sigma(T^4-T_0^4) \quad (15-3)$$

用这一公式对上面的结果进行修正,就可得符合实际的结果。

$$P_{\text{总}}=1.73\times 5.67\times 10^{-8}(306^4-293^4)=137(\text{W})$$

天文学家根据维恩位移定律测定恒星的温度。首先利用测得的太阳光谱找出其峰值波长 λ_m ,代入式(15-2)可得到太阳表面的温度。而利用斯特藩-玻耳兹曼定律,可算出太阳表面的辐出度。

二、普朗克能量量子化假设

人们发现黑体辐射的实验规律与制造黑体腔壁的材料以及腔壁的形状无关,具有很大的普遍性。用图 15-2 所示的实验曲线表示了黑体的单色辐出度与 λ 和 T 的关系,这些曲线都是实验结果。如何从理论上导出与实验曲线完全符合的黑体辐射公式,引起了物理学界的极大兴趣。人们根据当时获得巨大功绩的经典物理学理论来推导黑体辐射公式,但一直没有成功。其中最典型的是瑞利-金斯公式和维恩公式。瑞利-金斯(Rayleigh and Jeans)在 1890 年用经典电磁理论和能量均分定律导出下列公式:

$$M_{\lambda}(T)=C_1\lambda^{-4}T \quad (15-4)$$

式中 C_1 是常数,此公式只在波长相当长的部分才与实验曲线相符。随着波长减小,能量逐渐加大,在紫外光区域,辐射能量将趋于无穷大,这与实验完全不符,历史上称它为“紫外区的灾难”。

随后,维恩在 1896 年由热力学的讨论得出黑体能量的分布公式

$$M_{\lambda}(T)=C_2\lambda^{-5}e^{-\frac{C_3}{\lambda T}} \quad (15-5)$$

式中 C_2 、 C_3 是常数,此式只能与实验曲线的短波部分相符,不能说明长波段。

上述两种理论均不能很好地与实验曲线符合,明显地暴露了经典物理学的缺陷。因此,1900 年,英国物理学家开尔文(L. kelvin)把黑体辐射实验所遇到的问题称之为物理学晴朗



天空上一朵乌云。正是这朵乌云导致量子理论的诞生。

为了解决上述困难,德国物理学家普朗克(Max Planck)在1900年提出了一个全新的黑体辐射公式,这公式与实验曲线很好符合,是在维恩公式基础上稍加修改而成的。公式如下:

$$M_{\lambda}(T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} / (e^{hc/(\lambda kT)} - 1) \quad (15-6)$$

式中 c 是光速, k 是玻耳兹曼常数, e 是自然对数的底, h 称为普朗克常数,普朗克称 h 为作用量子(quantum action),其值为 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$ 。这个公式在全部波长范围内都与实验曲线完全相符。从这个式子出发,当 λT 很小时,指数项的值远大于1,略去分母中的1就可化成维恩公式(15-5)。当 λT 很大时,指数项的值接近于1,按 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$

展开后取前两项就可化成瑞利-金斯公式(15-4)。对式(15-6)按波长积分或求极值,还可分别得出斯特藩-玻耳兹曼定律(15-1)和维恩位移定律(15-2)。

为了从理论上把黑体辐射公式(15-6)推导出来,普朗克大胆地提出了不同于传统物理学的新概念,即能量量子化假设。

普朗克的能量量子化假设是:① 组成黑体腔壁的分子、原子可看做是带电的线性谐振子,可以吸收和辐射电磁波;② 谐振子只能处于某些特定的能量状态,每一状态的能量只能是最小能量 ϵ_0 的整数倍。而 ϵ_0 是谐振子处于最低能量状态的能量,它与谐振子的振动频率 ν 成正比,即 $\epsilon_0 = h\nu$,因此,谐振子的能量为 $E = n\epsilon_0 = nh\nu$,式中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 为正整数,称为量子数(quantum number), ϵ_0 这个最小能量称为量子(quantum)。

普朗克利用这一假设推导出了与实验结果完全符合的黑体辐射公式(15-6)。

普朗克能量量子化假设的重要意义在于它第一次指出经典物理学理论不能应用于原子现象(如原子振子)。物理学以后的发展证明,量子概念在说明微观(原子的)现象时占有十分重要的地位。这个假设的提出,标志着人类对自然规律的认识从宏观领域进入到微观领域。它不仅对热辐射理论做出了贡献,更重要的是冲破了经典观念的长期束缚,鼓励人们建立新概念、探索新理论。在普朗克假设的推动下,各种微观现象逐步得到正确解释,并建立起量子力学理论体系。普朗克因此项成就获1918年诺贝尔物理学奖。

第二节 光电效应

普朗克能量量子化假设指出,物质的能量只能以量子单位转化为辐射。在普朗克的启发下,爱因斯坦提出的光子假设指出:辐射就是由能量为 $\epsilon = h\nu$ 的光子组成的,光子有能量、质量和动量。光子假设成功地解释了光电效应的实验规律,并被后来的康普顿散射实验进一步证实。这一假设揭示了光的波粒二象性。

一、光电效应

1888年,霍瓦(Hallwachs)发现一充负电的金属板被紫外光照射会放电。1897年汤姆孙(Thomson)发现电子后,人们才认识到那就是金属表面射出的电子,这种在光照射下金属及其化合物发射电子的现象称为光电效应(photo electric effect),所射出的电子称为光电子(photoelectron)。当阴极和阳极间加上一个电势差时将形成电流,这一电流称为光电流(photoelectric current)。

研究光电效应的实验装置是在一个抽成真空的玻璃管内装两个金属电极:阴极(K)和阳极(A),当用适当频率的光从石英窗射入,并照射在阴极上时,便有光电子从阴极表面逸出,经电场加速后被阳极所收集,形成光电流 i ,改变电势差 U ,测量光电流 i ,可得光电效应



的伏安特性曲线,如图 15-3 所示。实验研究表明,光电效应有如下规律:

1. 饱和光电流与照射光强成正比 从图 15-3 可以看出,光电流 i 开始时随 U 增大而增大,而后就趋于一个饱和值,此后再增大 U ,光电流不再增大,这表明在单位时间内从阴极发射的所有光电子已全部到达阳极。实验表明,饱和光电流与照射光强成正比。

2. 光电子的最大初动能与遏止电压 U_s 间有如下关系:

$$\frac{1}{2}m\nu^2 = eU_s \quad (15-7)$$

在保持照射光强不变的情况下,改变电势差 U ,发现 $U=0$ 时,仍有光电流,这是因为光电子逸出时具有一定的初动能,改变电势差 U 的极性,使 $U<0$,当反向电势差增大到某一定值时,光电流降为零,如图 15-3 所示。此时的反向电势差称为遏止电压(stopping potential),用 U_s 表示。不难理解, $eU_s = \frac{1}{2}m\nu^2$, 式中 m 和 e 分别是电子的静止质量和电量, ν 是光电子逸出时的最大速率。

3. 不同的金属有不同的红限和逸出功 实验表明,对一定的金属阴极,当照射光频率 ν 小于某个最小值 ν_0 时,没有光电流产生,这个最小频率 ν_0 称为该金属的光电效应阈频率(threshold frequency),也称红限。红限也常用对应的波长 λ_0 表示。红限决定于阴极材料,与照射光强无关。多数金属的红限在紫外光区。

电子逸出金属表面要克服逸出电势做功,这个功称逸出功,用 A 表示。不同金属有不同的逸出功。电子动能 $E_k \geq A$ 时,才能产生光电效应。 A 和 ν_0 有着——对应的关系,表 15-1 给出了几种金属的 A 和 ν_0 。

表 15-1 几种金属的逸出功和红限

金属	钾(K)	钠(Na)	钙(Ca)	锌(Zn)	钨(W)	银(Ag)
逸出功(eV)	2.25	2.29	3.20	3.38	4.54	4.63
红限(10^{14} Hz)	5.44	5.53	7.73	8.06	10.95	11.19

4. 遏止电压 U_s 与光强无关,而与照射光的频率 ν 成线性关系。

图 15-4 给出了几种金属的 $U_s-\nu$ 关系曲线,其函数关系可表示为

$$U_s = k(\nu - \nu_0) \quad (\nu \geq \nu_0) \quad (15-8)$$

式中 k 为 $U_s-\nu$ 曲线的斜率,从图中可以看出,对各种不同金属,曲线斜率相同,即 k 是一个与金属材料无关的常量, ν_0 是曲线在横轴上的截距,它等于该种金属的红限。

由式(15-7)和(15-8)可知,光电子的最大初动能与照射光的频率 ν 成线性关系。

5. 实验测定出,金属表面从接受光照到逸出电子,所需时间不超过 10^{-9} s。表明光电子是即时发射的。

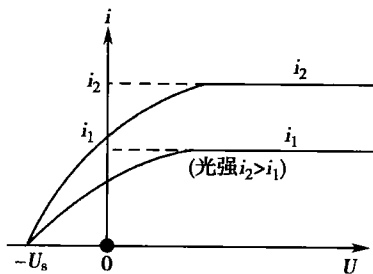


图 15-3 光电效应伏-安曲线

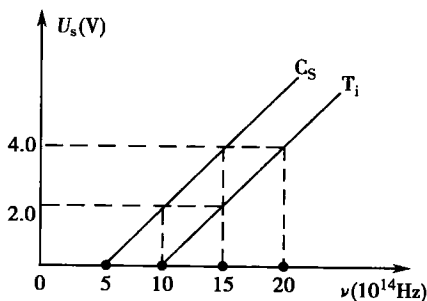


图 15-4 遏止电压与入射光频率的关系
($U_s-\nu$ 实验曲线)



二、爱因斯坦光子假设

光的电磁波理论无法解释光电效应。按照电磁波理论,金属中的电子是在光照射下作受迫振动,其振动频率就是入射频率。由于光强 $I \propto \omega^2 A^2$ ($\omega = 2\pi\nu$),与入射光振幅 A 的平方成正比,无论入射光的频率多么低,只要光强足够大或光照时间足够长,电子从入射光中能获得足够能量足以挣脱原子核的束缚并逸出金属表面,就可以产生光电效应,即光电效应只与入射光强和光照时间有关,与入射光的频率无关,因而不应存在红限。

1905年,时年26岁的爱因斯坦为了解释光电效应,在普朗克能量量子化假设的基础上提出了光子假设。他认为,光不仅在发射和吸收时具有粒子性,而且在空间传播时也具有粒子性。光在真空中是以光速 c 传播的粒子流,这些粒子称为光量子或光子(photon),每个光子的能量 $\epsilon = h\nu$ 。

按照爱因斯坦的光子假设,一个电子一次吸收一个光子,电子吸收一个光子就能获得这个光子的全部能量并转化为动能。如果光子的能量大于电子脱离金属所需的逸出功,电子就能逸出金属表面并具有初动能。根据能量守恒定律,金属中一个电子吸收一个光子的能量 $h\nu$,一部分用来克服电子的逸出功 A ,另一部分转化为光电子的初动能,即

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A \quad A = h\nu_0 \quad (15-9)$$

式(15-9)称为爱因斯坦光电效应方程(Einstein's photoelectric equation), ν_0 是阈频率。

根据光电效应方程可以全面解释光电效应的实验规律。按照这个方程,光电子的 $\frac{1}{2}mv^2$ 与照射光频率 ν 成线性关系;照射光的红限 ν_0 应由金属的逸出功 A 决定,即 $A = h\nu_0$,不同金属的逸出功不同,因而红限 ν_0 也不相同;光照射到金属上,一个光子的能量立即整个地被一个电子吸收,因而光电子的发射是即时的,照射光强 I 是由单位时间内到达单位面积的光子数 N 决定,即 $I = Nh\nu$,因而,光强越大,光子数越多,逸出的光电子也越多。最后,为便于和实验比较,将式(15-9)中的 $\frac{1}{2}mv^2$ 换成 eU_s ,即可得

$$U_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e} \quad (15-10)$$

将此式和式(15-8)比较,即可知 $K = \frac{h}{e}$, $\nu_0 = \frac{A}{h}$ 或 $h = ek$, $A = ek\nu_0$ 。根据此关系通过实验测定 K 和 ν_0 ,可算出普朗克常数 h 和逸出功 A 。

1916年,密立根(R. A. Millikan)因爱因斯坦没有直接采用普朗克的 $\epsilon = nh\nu$ 的假设,而将光子能量定义为 $\epsilon = h\nu$,对此处的 h 与普朗克量子假设中的 h 是否一致持怀疑态度,于是设计了测定 U_s 与 ν 的关系实验。实验发现,如图15-4所示,不同金属有不同的红限频率 ν_0 ,不同的金属的 $U_s-\nu$ 曲线是斜率相同的平行直线,斜率 k 与电子电量 e 的乘积恰为普朗克恒量 h ,从而证明了爱因斯坦光子假设的正确性。爱因斯坦因此项成果获得1921年的诺贝尔物理学奖,而密立根则获得了1923年的诺贝尔物理学奖。

爱因斯坦在其光子理论中还指出,按照相对论,能量总是和质量相联系着,它们在量值上的关系是 $\epsilon = mc^2$ 。式中 m 表示光子的质量,光子的能量是 $h\nu$,则

$$m = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (15-11)$$

没有速度为零的光子,因此光子没有静止质量。光子具有质量的最好证明是:来自遥远星球的光线经过太阳附近出现弯曲现象。这一现象已为多次精密的观测所证实。这是由于太阳质量很大,光子在它附近所受的引力足以使它偏离原来进行的方向。

光子既有质量,又有速度,因此也有动量。光子的动量是



$$p = mc = \frac{h\nu}{c} \cdot c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (15-12)$$

光子具有动量已为光压实验等许多实验所证实。

在讨论光的现象时,如果只涉及光的传播过程(如干涉和衍射),用波动理论就可以完全解释;如果涉及光和物质之间的相互作用(如光电效应等),则必须把光看作是粒子流。因此,光具有波粒二象性。波的特征量是波长 λ 和频率 ν ,粒子的特征量是质量 m 和动量 p ,爱因斯坦的相对论通过普朗克常数 h 把两者联系在一起,很好地表示了光的波粒二象性。

光电效应不仅具有重要的理论意义,而且在科学技术许多领域都有着广泛的应用,利用光电效应制成的光电管和光电倍增管及光电成像器件广泛地用于电子、机械、化工、地质、医疗、天文及化学、物理、生物等学科领域。

最后应指出的是与光电效应有关的“多光子光电效应”这一学科前沿。1960 年激光器的发明,解决了人造强光源的问题。实验发现金属表面在强光照射下可以实现多光子吸收,即一个电子一次可以吸收多个光子。设光子的频率为 ν ,电子吸收的光子数为 N ,则光电效应方程为 $Nh\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$ 。多光子吸收的主要学术意义在于,可用低频光子解决只能用高频光子的问题,如用红外光子解决紫外光子才能解决的问题。多光子光电效应在研究分子、原子能级的超精细结构,高分子的离解和合成,同位素分离以及激光核聚变等领域都有重要的应用。

第三节 康普顿效应

通常黑体辐射指的是从红外到可见光波段,光电效应中的照射光则是从可见光到紫外波段。康普顿效应所涉及的是从 X 射线到 γ 射线波段的辐射。

一、康普顿效应

X 射线通过物质散射后波长变长的现象,称为康普顿效应(Compton's effect),是康普顿于 1923 年发现的。康普顿效应的理论解释完全证明了光的波粒二象性理论的正确性。

康普顿的实验装置如图 15-5 所示。从 X 射线源发出的一束波长为 λ_0 的 X 射线投射到一块散射体石墨上,选择具有确定散射角 φ 的一束散射线,用光谱仪测定其波长及相对强度;然后改变散射角 φ ,再进行同样的测量。测量与入射光线成各种角度的散射光线时发现:

1. 散射光线中除了有入射波长为 λ_0 的 X 射线之外,还有波长 $\lambda > \lambda_0$ 的成分,这就是“双峰散射”现象。

2. 波长改变量 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随着散射角 φ 的增大而增大,与散射物质的性质无关。

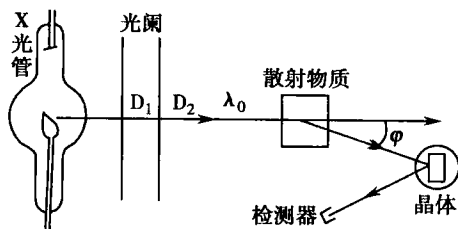


图 15-5 康普顿散射装置

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (15-13)$$

此式称为康普顿效应公式。实验测定 $\lambda_c = 0.00243\text{nm}$,是与散射物质无关的常数,称为康普顿波长(Compton's Wavelength)。

3. 散射光强度与散射物质的性质有关,原子量小的物质康普顿散射较强,原子量大的物质康普顿散射较弱。

按照光的电磁波理论,入射 X 光照射物质时,物质中带电粒子将从入射 X 光中吸收能



量,做同频率的受迫振动。振动的带电粒子又向各个方向发射同一频率的电磁波,这就是散射光。散射光的频率应等于入射光的频率,而不应发生频率或波长的变化。而且,由于电磁波的横波性,在散射角为 $\pi/2$ 方向上应该没有散射光。由此可见,经典理论只能说明波长或频率不变的散射(常称为瑞利散射),而不能解释康普顿效应。而用光子理论解释康普效应却获得了极大的成功。

二、光子理论对康普顿效应的解释

光子理论认为康普顿效应是光子与散射体原子中外层电子弹性碰撞的结果。由于原子对外层电子的束缚较弱,同时电子热运动能量与入射 X 光子的能量相比可以忽略不计,所以可将散射体原子中的外层电子当作静止的自由电子。当入射 X 光子与自由电子做弹性碰撞时,入射光子能量的一部分转化为电子的动能,使得散射光子能量小于入射光子的能量,因而频率减小,波长增大。当入射 X 光子与散射体原子中束缚紧密的内层电子碰撞时,由于内层电子被原子束缚紧密,这种碰撞实际上是入射 X 光子与整个原子的碰撞,原子质量远大于光子的质量,所以弹性碰撞时光子的能量几乎没有损失,因而频率不变,波长也不变,从而散射光中仍有原波长 λ_0 的成分。轻原子中电子束缚较弱,重原子中内层电子束缚很紧,发生第一种碰撞的概率比第二种大,因此,原子序数越小的散射物质其康普顿散射强度越大。

下面由能量和动量守恒定律推导康普顿效应公式(15-13)。设碰撞以前,入射 X 光子的能量为 $h\nu_0$, 动量为 $(h\nu_0/c)\mathbf{n}_0$, 电子的能量为 m_0c^2 , 动量为零。碰撞以后, X 光子沿与入射光方向成 φ 角的方向散射, 能量为 $h\nu$, 动量为 $(h\nu/c)\mathbf{n}$, 反冲电子的能量为 mc^2 , 动量为 $m\mathbf{v}$, 如图 15-6 所示。

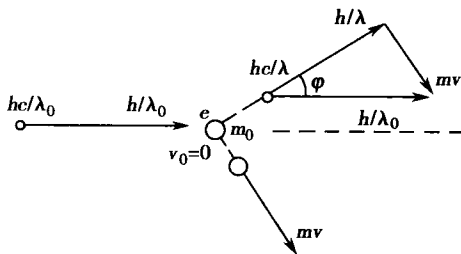


图 15-6 康普顿散射的分析

由能量和动量守恒定律得

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

$$\frac{h\nu_0}{c}\mathbf{n}_0 = \frac{h\nu}{c}\mathbf{n} + m\mathbf{v}$$

考虑到 $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, $\nu = c/\lambda$, $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, 和应用余弦定理, 上二式改写为

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2 \quad \text{即} \quad mc = m_0c + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

$$(m\mathbf{v})^2 = \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\varphi \quad (2)$$

由相对论中能量和动量关系式 $E^2 = (cp)^2 + E_0^2$ 可得

$$(mc^2)^2 = (cmv)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$\text{即} \quad (m\mathbf{v})^2 = (mc)^2 - (m_0c)^2 \quad (3)$$

将(3)式代入到(2)式中共得

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\varphi \quad (4)$$

式(1)平方减去(4)式得

$$0 = 2m_0c\left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right) - \frac{h^2}{\lambda_0\lambda}(1 - \cos\varphi)$$

$$\text{整理即得} \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi) = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c\sin^2\frac{\varphi}{2} \quad (5)$$



将此式和式(15-13)比较得

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3.0 \times 10^8} = 2.43 \times 10^{-12} (\text{m})$$

理论值与实验值符合得很好。当在与入射光成 $\pi/2$ 角方向测散射光时,测得的 $\Delta\lambda$ 就等于康普顿波长 λ_c 。

康普顿效应的理论计算与实验值完全一致性,不仅充分地证明了光子理论的正确性,而且还证明了能量守恒定律和动量守恒定律对微观粒子间的相互作用过程也成立。这两条守恒定律来源于时空平移对称性,在微观领域中,惯性系时空的这种特性仍保持不变。

在天体物理中,常常提及反康普顿效应,它是高速粒子将能量和动量转移到空间的射线过程。这一效应的数学处理方法,与本节的推导方法相同。

由于发现康普顿效应,并对其作了成功的解释,康普顿获得了 1927 年的诺贝尔物理学奖。

康普顿效应在粒子物理、核物理、天体物理等许多学科领域都有重要应用,在医学领域中,康普顿效应被用来诊断骨质疏松等病症。

光电效应和康普顿的发现和成功解释,其重大意义在于它们确认了光具有波粒二向性。

第四节 氢原子光谱 玻尔的氢原子理论

经典理论不仅不能说明黑体辐射、光电效应和康普顿散射实验所遇到的问题,而且在说明原子光谱的线状结构及原子本身的稳定性时也遇到了不可克服的困难,丹麦物理学家玻尔(Bohr)在普朗克的能量量子化假设和爱因斯坦的光子理论的基础上,创立了关于氢原子结构的半经典量子理论,较成功地解释了氢原子光谱的实验规律。

实验表明,原子光谱是一系列分立的线状光谱。由于不同元素的原子具有各自不同的特征谱线,原子光谱是考察物质组分和结构的重要依据。

一、氢原子光谱

用光栅光谱仪观察低压氢气放电管发出的光,可以得到氢原子光谱。图 15-7 所示的是氢原子光谱的一个谱线系。其中 H_α 是明亮的红线, H_β 、 H_γ 、 H_δ 分别是青蓝线、蓝线和紫线,其余谱线在紫外区。

1885 年,巴耳末(J. J. Balmer)用一个简单公式概括了这谱线系中各条谱线的波长 λ ,后称巴耳末公式。

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=3,4,5, \dots$$

式中 R_∞ 是里德伯(Rydberg)常数,其实验值 $R_\infty = 1.0973731 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 。除了巴耳末系之外,后来又在氢原子光谱的紫外区发现了赖曼系,在红外区发现了帕邢系、布喇开系等,各系都可能用类似公式计算谱线的波长。这些公式可综合成一个广义巴耳末公式。此公式为

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), n=k+1, k+2, k+3, \dots \quad (15-14)$$

当 k 分别取值为 1、2、3、4、5、6、7 时,就对应着赖曼系、巴耳末系、帕邢系、布喇开系、普丰德系、汉弗莱系和汉森与斯特朗系。

氢原子光谱的各个谱系中的每一条谱线的波长都可以用这样一个简单公式概括起来,这说明广义巴耳末公式深刻反映了氢原子内部的规律性。这公式的特点是:每条谱线的波长都可由两项之差求出,而每一项的值仅由一个整数决定。这个结果在当时并不理解,称为

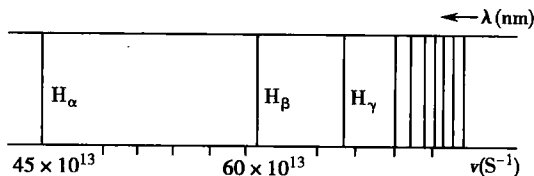


图 15-7 氢原子光谱中的巴耳末系谱线



巴耳末公式之谜。在各个谱线中取 $n=\infty$, 可得到该谱系的最短波长, 称为该谱系的线系限 (series limit)。

对于巴耳末系, 线系限在 $\lambda=364.5\text{nm}$ 。特别强的谱线是赖曼系的 α 线, $\lambda=121.6\text{nm}$, 它是迄今所知太阳所发射的最强的线, 在空气中会被完全吸收, 它也为 DNA (脱氧核糖核酸) 所吸收, 在其他行星上由于没有保护性的大气层, 所以在强射线照射下生物不能存活。

二、玻尔的氢原子理论

按照经典理论, 原子中的电子像行星绕日旋转那样绕原子核沿圆或椭圆轨道运动。由于这是一种加速运动, 必然不断发射电磁波, 能量不断损失, 轨道半径不断缩小, 电子会以螺旋轨道落向原子核, 最后导致原子崩溃。显然, 这是错误的推论, 另外, 由于轨道半径越来越小, 旋转频率 ($v/2\pi r$) 越来越高, 从大量原子平均来看, 它们发射电磁波的频率应该连续变化, 原子光谱应该是连续谱, 这也和实验不符合。

为了克服经典理论所遇到的困难, 1913 年, 丹麦物理学家玻尔提出了一个有关氢原子模型, 把量子学说引入这个模型, 他的主要思想如下:

1. 定态假设 原子只能处于一系列具有分立能量的状态, 在这些状态下, 电子绕核运动但不辐射能量, 称为定态 (stationary state)。定态存在的量子条件是电子轨道角动量 mvr 等于 $h/2\pi$ 的整数倍, 即

$$L=mvr=n\hbar \left(\hbar=\frac{h}{2\pi}, n=1, 2, 3, \dots \right) \quad (15-15)$$

式中 $\hbar=h/2\pi$, 称为约化普朗克常数, n 称为量子数 (quantum number), 式 (15-15) 称为轨道角动量量子化条件。

2. 跃迁假设 原子只有从一个定态向另一个定态跃迁时, 才发射或吸收电磁波, 其发射或吸收的辐射频率, 由两定态的能量差决定, 即:

$$\begin{aligned} h\nu &= E_n - E_k \\ \nu &= (E_n - E_k)/h \end{aligned} \quad (15-16)$$

式 (15-16) 称为频率条件或辐射频率公式。

3. 对应原理 在建立氢原子理论的过程中, 玻尔提出一个阐明新、旧理论间关系的方法论原理, 即新理论应包容在一定经验范围内证明是正确的旧理论中, 旧理论应是新理论的极限形式或局部情况。也就是说, 在极限条件下, 返回原来的经验范围内时, 新理论应与旧理论形式一致。玻尔把这个原则称为对应原理 (correspondence principle)。玻尔指出, 对于电子的绕核运动, 若量子数 n 比较小, 各定态的轨道半径、轨道角动量和能量都是不连续的, 而当量子数 n 很大时, 这些不连续性就不明显了。

例如, 当量子数 n 由 5000 变为 4999 时, 电子的轨道角动量由 $5000\hbar$ 变为 $4999\hbar$, 仅相差 $1/5000$, 此时角动量、能量和轨道的改变都可以看成连续的了, 电子的行为也就接近经典粒子了。当 n 很大时, 玻尔理论的结果与经典理论一致。

对应原理是一个普遍原理, 是具有指导意义的原则, 爱因斯坦在建立相对论时已经应用了该原理, 但并未明确提出该原则, 是玻尔在 1913 年首先提出该原则。



由此二式可以得出各分立定态上电子的轨道半径 r_n 和轨道速度 v_n 分别为

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e^2} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (15-17)$$

不计原子核的运动时,氢原子系统的总能量应等于电子的动能与电势能之和,即

$$E_n = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v_n^2 + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{-m_e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (15-18)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

式(15-17)和式(15-18)表明,氢原子核外电子的轨道半径、轨道速率、氢原子系统的能量都只能取一系列分立的值,即氢原子系统是量子化的。

$n=1$ 的定态称为氢原子的基态(ground state),其余的定态叫受激态(excited state)。按照式(15-17)和式(15-18)可计算出

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e^2} = 5.2917706 \times 10^{-11} \text{ m} \approx 0.53 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.053 \text{ nm}$$

$$v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.18 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$E_1 = -\frac{m_e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$$

于是 r_n 和 E_n 的表达式可改写为

$$r_n = n^2 r_1, \quad E_n = \frac{1}{n^2} E_1, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (15-19)$$

$r_1 = 0.053 \text{ nm}$ 是第一玻尔轨道半径,称为玻尔半径,用 a_0 表示, $a_0 = r_1$ 。 E_1 是氢原子的基态能量, $E_1 = -13.6 \text{ eV}$, 与实验测出的氢原子的电离能在数值上相等。式(15-18)给出的是一系列氢原子定态能量称为氢原子的能级(energy level)。

按照玻尔假设中的频率条件式(15-16),可以推导出广义巴耳末公式,当氢原子从高能级 n 跃迁到低能级 k 时,所发射的光谱线的频率为:

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} = \frac{m_e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > k$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{m_e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > k \quad (15-20)$$

与广义的巴耳末公式在形式上完全一致,通过比较,得出里德伯常数的理论值为:

$$R_\infty = \frac{m_e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.0973730 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

这一理论值与实验值符合得很好。这就彻底解开了长达 30 年的巴耳末公式之谜。图 15-8 是根据玻尔氢原子理论作出的能级和光谱系图。

玻尔理论成功地计算了氢原子的能级和光谱频率,上述结果还能推广到类氢原子中去,这些原子中只有一个电子在核外运动。但对稍微复杂的体系,例如含有两个电子的氦原子、氢分子,玻尔理论都不成功。玻尔已经认识到经典电磁学不适用于原子内部,引入了量子假设,却又用经典力学方法计算电子轨道。玻尔理论是一个充满矛盾的过渡性理论,直到 1924 年德布罗意提出电子具有波粒二象性之后,一个较完善的

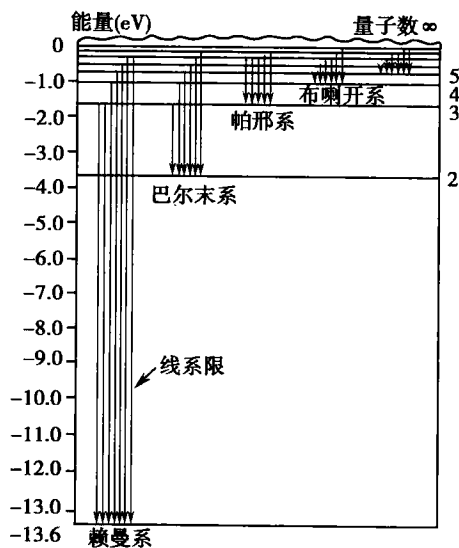


图 15-8 氢原子的能级和光谱系



描述微观粒子运动规律的理论——量子力学(quantum mechanics)才建立起来。

玻尔的氢原子理论和普朗克能量量子化假设、爱因斯坦光子理论一起组成旧量子论,为量子力学的诞生和发展打下基础。在量子力学中,玻尔理论中关于定态、能级、跃迁等概念仍然是正确的。

第五节 物质的波动性质

光具有波粒二象性,人们是先认识到它的波动性,而后才认识到它的粒子性。实物粒子(天体、物体、分子、原子、中子、电子等),人们常认识到它的粒子性,然而它是否具有波动性呢?德布罗意回答了此问题:

一、德布罗意物质波假设

由于普朗克、爱因斯坦等人有关光的粒子性理论取得成功,又由于纯粹用经典粒子的观点解决原子结构问题遇到困难,1924年法国的青年学者德布罗意(L. de Broglie)提出:在光学研究中,曾经只想到光的波动性,忽视了它的粒子性,而在实物粒子的问题中是否会发生相反的错误,即过分看重了它的粒子性而忽视了波动性。他认为,由于自然界常常是对称的,从对称性思想考虑,实物粒子也应该有波粒二象性。在光学中,表达式 $E=h\nu$ 和 $P=\frac{h}{\lambda}$ 把标志波动性的 ν 、 λ 与标志粒子性的 E 、 p 通过普朗克常数 h 定量地联系起来。德布罗意假设实物粒子也应该服从上述关系。按照德布罗意假设,质量为 m 的粒子以速度 v 匀速运动时,既有能量和动量,又有波长和频率,这些量的关系应该是:

$$E=mc^2=h\nu \quad (15-21)$$

$$P=mv=\frac{h}{\lambda} \quad (15-22)$$

式(15-21)和(15-22)称为德布罗意关系式,式中的 λ 称为德布罗意波长(de Broglie wavelength),这种和实物粒子相联系的波称为德布罗意波或物质波。表 15-2 列出了由式(15-22)算出的一些实物粒子的物质波长。由表 15-2 可见,宏观物体的物质波长很小,所以其波动性显示不出来,而电子、质子和中子等微观粒子的物质波长可以与原子大小相比拟,因此在原子范围内将明显表现其波动性。能量达到 $10^2 \sim 10^4$ eV 的电子,其波长就可以和 X 射线比拟了。

表 15-2 粒子的德布罗意波长

粒子与其能量		质量(kg)	速度(m·s ⁻¹)	波长(nm)
电子	1eV	9.1×10^{-31}	5.9×10^5	1.2
电子	100eV	9.1×10^{-31}	5.9×10^6	1.2×10^{-1}
电子	10 000eV	9.1×10^{-31}	5.9×10^7	1.2×10^{-2}
质子	100eV	1.67×10^{-27}	1.4×10^5	2.9×10^{-3}
镭的 α 粒子		6.6×10^{-27}	1.5×10^7	6.7×10^{-4}
子弹		0.01	3×10^2	2.21×10^{-25}

德布罗意用物质波概念解释了玻尔氢原子理论中的轨道角动量量子化条件,他认为电子在轨道上运动与电子的物质波沿轨道传播相对应,当圆轨道周长等于电子的物质波波长的整数倍时,可以形成稳定驻波,这就对应于原子的定态。设 r 为电子稳定圆轨道的半径,则有

$$2\pi r = n\lambda, n=1,2,3\dots \quad (15-23)$$



将德布罗意波长 $\lambda = h/mv$ 代入式(15-23), 即得

$$mvr = h \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n=1, 2, 3, \dots$$

此即玻尔理论中的轨道角动量子化条件。由此, 还可推导氢原子定态能量也是量子化的关系式。

[例 15-2] 设光子波长和电子的德布罗意波长相等, 它们的动量和能量是否相等?

解: 波长为 λ 的光子的动量和能量分别为

$$P_p = mc = h/\lambda \quad E_p = mc^2 = h\nu = hc/\lambda$$

波长为 λ 的电子的动量和能量分别为

$$P_e = m_e v = h/\lambda$$

$$E_e = m_e c^2 = \frac{m_e v}{v} c^2 = \frac{P_e}{v} c^2 = \frac{c}{v} \frac{hc}{\lambda} = \frac{c}{v} E_p$$

由上计算可知, 当电子和光子波长相等时, 它们的动量相等, 能量不等。电子的能量大于光子。注意电子的运动速度 v 并不等于与电子相联系的物质波波速 u , 电子的物质波波速(即相速度)为

$$u = \lambda \cdot \nu = \frac{h}{m_e v} \cdot \frac{m_e c^2}{h} = c^2/v$$

可见相速大于光速, 而电子的运动速度是不能大于光速的。

二、电子衍射

德布罗意物质波假设很快就被电子束衍射实验证实。图 15-9 是一束电子射线穿过金属箔后生成的衍射图样。按照衍射圆环的距离、金属晶格的大小, 算出的波长 λ 和按式 15-22 求出的理论值一致。

1927 年, 戴维孙(Davisson)和革末(Germer)做了电子束射向镍单晶表面的散射实验, 观察到了类似 X 射线衍射的电子衍射, 证实了电子的波动性, 其波长的实验值与德布罗意公式的计算值完全一致。同一年汤姆孙(Thomson)进行了另外的电子衍射实验, 以 600eV 的高速平行电子束垂直于单晶表面入射厚度约为 10^{-7}m 的金箔薄膜, 得到了与光的小圆孔衍射相似的电子衍射图样, 其衍射波长也与德布罗意公式相符。有趣的是, 汤姆孙验证了电子波动性, 而他的父亲正是电子的发明人(获 1906 年诺贝尔物理学奖), 由于汤姆孙和戴维孙的贡献, 他们分享了 1937 年诺贝尔物理学奖。

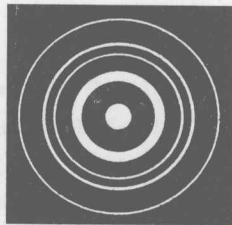


图 15-9 电子衍射

此外, 用电子束或中子束也可以产生单缝衍射和双缝衍射实验, 所得图像与可见光的衍射图像完全相似, 其他物质粒子如原子、分子等的波动性以及德布罗意关系对这些粒子的适用性也得了实验的证实。

微观粒子波动性, 不仅具有理论上的意义, 而且在科学技术上也得到了广泛的应用。例如, 电子显微镜就是利用电子的德布罗意波长接近 X 射线波长, 而用于观察材料的表面和样品内部结构, 其分辨率可达到 0.1nm 的量级。又如, 核反应堆产生的中子的德布罗意波长为 0.1nm , 可以作为晶体的探测工具。

德布罗意的物质波假设为一系列实验所证实, 充分证明其正确性, 这一假设为波动力学(量子力学的一种描述)奠定了基础。为此, 他获得了 1929 年诺贝尔物理学奖。

三、不确定关系

在经典物理学中, 宏观物体的运动有确定的轨迹, 可以同时用坐标和动量表示一个粒子



的运动状态。微观粒子具有波动性,使它们不能同时具有确定的坐标和动量,1927年海森伯(W. C. Heisenberg)从云雾室中观测到电子轨迹粗大发现了坐标不确定性,借用电子单缝衍射实验找到了不确定关系(uncertainty relation)。

1. 坐标和动量的不确定关系 在电子单缝衍射实验中,如图 15-10 所示,设电子沿 y 轴匀速运动,设缝宽为 a ,则电子在 x 方向坐标的不确定量 $\Delta x = a$ 。按照波动性,电子穿过狭缝时要发生衍射。按照粒子性,此时沿 x 方向电子的动量将不再为零。若电子落在衍射图样的中央亮带内,则电子在 x 方向动量的不确定量应该是:

$$\Delta P_x = P \sin \theta_1$$

将 $\sin \theta_1 = \lambda/a$, $a = \Delta x$, $P = h/\lambda$ 代入,则得

$$\Delta x \cdot \Delta P_x = h$$

电子也可以出现在各级明条纹中,因此,一般有

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h \quad (15-24)$$

上面的推导只是借用一个特例的粗略估算,更一般的推导给出

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h/2 = h/4\pi \quad (15-24a)$$

由于此公式主要用于数量级的估计,所以常简写为(15-24)式。将上述关系推广到其他坐标方向上,可得类似关系。

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h/2 \quad (15-24b)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h/2 \quad (15-24c)$$

式(15-24)和式(15-24a)至式(15-24c)称为坐标和动量的不确定关系。它表明微观粒子的坐标与动量的不确定量成反比。狭缝越窄,粒子坐标 x 的不确定量 Δx 越小,动量 P_x 的不确定量 Δp_x 就越大。坐标和动量不可能同时具有确定值。不确定关系规定了用经典力学描述微观粒子运动的适用范围。

[例 15-3] 按照玻尔理论,氢原子基态的电子轨道直径为 10^{-10}m ,电子速率约为 $2.18 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。设电子在氢原子内坐标的不确定量为 10^{-10}m ,试求电子速率的不确定量。

$$\text{解:} \quad \Delta v \geq \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 10^{-10}} = 7.2 \times 10^6 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

这个不确定量是速率本身的几倍。由此可见,认为电子在原子内沿确定轨道运动没有意义。

[例 15-4] 人的红细胞直径 $8\mu\text{m}$,厚 $2 \sim 3\mu\text{m}$,质量 10^{-13}kg 。设测量红细胞位置的不确定量为 $0.1\mu\text{m}$,试计算其速率的不确定量。

$$\text{解:} \quad \Delta v \geq \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{10^{-13} \times 10^{-7}} = 6.626 \times 10^{-14} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

显然,任何现代测速方法都不能达到这样准确。由此可见,细胞和比它更大的宏观物体的坐标和速率都可同时精确测定,可用经典力学精确描述其运动。

2. 能量和时间的不确定关系 不确定关系不仅存在于坐标和动量之间,也存在于能量和时间之间,如果微观粒子处于某一状态的时间为 Δt ,则其能量必有一个不确定量 ΔE 。现在来导出这一关系。粒子的动能是速度的函数,势能是坐标的函数。由于速度和坐标都有不确定量,微观粒子的能量也有不确定量。由能量 $E = \frac{p_x^2}{2m} + E_p$ 对 p_x 求导数可得

$$\Delta E = v_x \cdot \Delta p_x$$

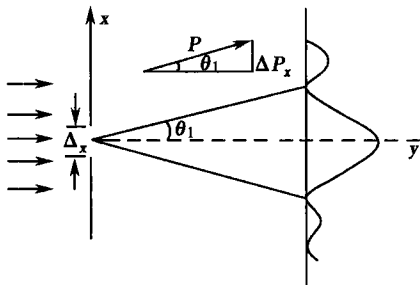


图 15-10 电子单缝衍射实验



用 Δt 分别乘上式两边得

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta p_x \cdot v_x \cdot \Delta t = \Delta p_x \cdot \Delta x \geq h \quad (15-25a)$$

这就是能量和时间的不确定关系。由量子力学推导得出两者更精确的关系式为

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2 \quad (15-25b)$$

由于常用于作数量估计,有时常写成式(15-25a)形式。

上述不确定关系,常用于讨论原子各受激态能级宽度 ΔE 和该能级平均寿命 Δt 之间的关系。每个受激态的能量都有不确定量 ΔE ,称为能级宽度。大量同类原子处于同一高能级上的时间长短不一,但平均停留时间为一定值,称为该能级的平均寿命 Δt 。原子不能无限期地停留在一个受激态。或早或迟要跃迁到能量更低的状态。原子停留在一个受激态能级的平均寿命越短,其能级宽度就越大。长寿命的受激态叫亚稳态,亚稳态能级宽度很小。基态有确定的能量,原子不受外界影响可以长期停留在基态。

不确定关系是微观粒子具有波粒二象性的反映,是一个重要的基本规律,在微观问题中,它被用于作数量级的估计。海森伯对确立不确定关系和建立矩阵力学(量子力学的另一种描述)有重要贡献,为此他获得了 1932 年诺贝尔物理学奖。

第六节 波函数 薛定谔方程

波函数可以理解微观粒子的波动方程,薛定谔方程可认为是微观粒子的波动微分方程,薛定谔方程可以从波函数导出来。以薛定谔(Schrödinger)方程为基础建立起来的理论体系,称为量子力学(quantum mechanics)。在量子力学中用得最多的是定态薛定谔方程。

一、波函数及其统计解释

物质波是什么样的波?如何定量描述它呢?关于这些基本问题存在不同观点。

考虑到微观粒子具有波动性,1924 年德布罗意首先提出用物质波函数(wave function)描述微观粒子的运动状态,如同用电磁波波函数描述光子的运动一样。物质波波函数是时间和空间坐标的函数,用 $\psi(r \cdot t)$ 表示。从德布罗意开始,就把物质波波函数定义为微观粒子的波函数的复数形式,一直至今。

例如,一个沿 X 轴正方向运动的不受外力作用的自由粒子,由于速度 v ,动量 p 和能量 E 均保持不变,由德布罗意关系式可知,与该粒子相联系的物质波的频率 $\nu = E/h$ 和波长 $\lambda = h/p$ 也不随时间变化,因此与自由粒子相联系的物质波是单色平面波,其波动方程为:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos 2\pi(\nu t - x/\lambda) \quad (15-26)$$

把此波函数写成复数形式得

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i2\pi(\nu t - x/\lambda)} = \psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(E - px)} \quad (15-27)$$

式(15-26)是式(15-27)的实数部分。式(15-27)就是沿 X 方向运动,动量为 p 能量为 E 的自由粒子的波函数的复数形式。

由波函数的表达式可以看到,它既有反映波动性的波函数,又包含体现粒子性的物理量 E 和 p ,所以它描述了微观粒子的波粒二象性特征。不同条件下,处于不同运动状态的粒子,它们的波函数各不相同,但都是时间和空间位置的函数,都可以表示为复指数的形式。波函数的具体形式应该由求解下面就要介绍的薛定谔方程(Schrödinger's equation)得出。

在经典力学中,机械波的波函数表示质点位移的变化规律,电磁波的波函数表示场电 E 和磁场 B 变化规律,而物质波波函数,它本身并不代表任何可观测的物理量,那么,波函数究竟代表什么呢?

1926 年,德国物理学家玻恩(Born)对波函数提出了一个统计解释,回答了上述问题。



他认为物质波是概率波,可用波函数 $\psi(r, t)$ 来描述(德布罗意本人已这样做了),波函数兼有波和概率的双重特性, t 时刻粒子在空间 r 处附近体积元 dV 中出现的概率应与该处波函数绝对值的平方成正比,与 dV 成正比,由于在一个很小的体积元 dV 中, ψ 可以认为不变,因此粒子在 dV 中出现的概率可表示为

$$d\omega = |\psi|^2 dV = \psi \cdot \psi^* \cdot dV = \rho \cdot dV \quad (15-28)$$

式中 $\rho = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$ 表示粒子在 r 处单位体积中出现的概率,称为概率密度(probability density)。由此式可见,某时刻空间某处粒子的波函数绝对值的平方描述了该时刻粒子在该处出现的概率密度。这就是波函数的统计解释。

用电子束双缝干涉实验,可以得到类似于光的双缝干涉条纹,从电子干涉条纹的形成过程清楚地看出,单个电子在屏上何处出现是随机的,但屏上某处出现电子的概率却具有确定的分布,电子在屏上的分布是分布概率的积累,这一实验证实了波函数的统计解释的正确性。

由于波恩在量子力学中所做的贡献,特别是波函数的统计解释,他分享了 1954 年诺贝尔物理学奖。波恩的理解赋予波函数以下基本性质:① $\rho = \psi_0^2 = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$,即波函数振幅的平方表示粒子在空间某点出现的概率密度。②波函数满足单值、连续、有限的标准条件。某时刻粒子在空间某点出现的概率是惟一的、有限的(小于 1),粒子在空间出现的概率分布是连续的。③波函数满足归一化条件。根据概率的总和等于 1,有 $\int_v |\psi|^2 dv = 1$ 。④波函数适用叠加原理,如果 ψ_1 、 ψ_2 是粒子可能的状态,则其线性组合 $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ 也是粒子的可能状态。

二、薛定谔方程

量子力学中的薛定谔方程相当于经典力学中的牛顿方程。它是波函数 ψ 遵循的微分方程,是微观粒子运动状态变化的基本规律。在此介绍建立该方程的基本思想。

1. 自由粒子的薛定谔方程 由波函数可以导出薛定谔方程。对自由粒子而言,如沿 X 轴正方向运动,与其相联系的物质波是单色平面波,其波函数 $\psi(x, t)$ 为式(15-27)的表示的形式,为:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E - px)} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

此式可改写成

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \psi(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (15-29)$$

式中 $\psi(x) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}px}$ 称为振幅函数,它是波函数只与坐标有关、而与时间无关的部分。由于

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \cdot \psi^*(x) e^{+\frac{i}{\hbar}Et} = \psi(x) \cdot \psi^*(x) = |\psi(x)|^2$$

所以,我们只需求出振幅函数 $\psi(x)$,就可由 $|\psi(x)|^2$ 得知粒子在空间的概率密度了。 $\psi(x)$ 是与粒子在空间的定态分布概率相关的部分,因而也称为波函数。现将 $\psi(x)$ 对 x 取二阶导数得

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi(x)$$

又因 $p^2 = 2mE_k$,代入上式并整理得

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE_k}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (15-30)$$

上式称为一维空间自由粒子的振幅方程。

2. 定态薛定谔方程 若粒子不是自由的,而是在某力场运动,粒子的势能 $E_p = U$ 不随时间变化,这时粒子处于定态,相应的薛定谔方程称为定态薛定谔方程。在 U 不变的情况



下,波函数仍然可写成式(15-29)的形式,也只需建立其振幅方程。这时代入式(15-30)得

$$E = E_k + E_p = E_k + U = \frac{p^2}{2m} + U, \quad p^2 = 2m(E - U)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi(x) = 0 \quad (15-31)$$

因 $\psi(x)$ 只是坐标的函数,与时间无关。故上式即为一维定态薛定谔方程。

如果粒子在三维空间中运动,在三维的情况下,上式(15-31)可推广为

$$\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi(r) = 0 \quad (15-32)$$

此式就是三维定态薛定谔方程。

引入拉普拉斯算符:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(15-32)可以简写为

$$\nabla^2 \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi(r) = 0 \quad (15-33)$$

式(15-33)称为三维定态薛定谔方程的一般式。

定态薛定谔方程是质量为 m 的实物粒子在力场中的非相对论方程。

通过定态薛定谔方程建立的过程可以看出,薛定谔方程不是实验事实的直接概括,也不是从某些理论导出的定理,它是量子力学中的一个基本假设,它的正确性全靠实践的检验。只要给出粒子在系统中的势能函数 $U(x, y, z)$ 的具体表达式,按照对波函数单值、连续、有限的要求去解此方程,定态波函数和定态能量都可求出来,目前有关原子、分子结构的知识大多是解薛定谔方程得到的。

德布罗意假设、玻恩的统计解释和薛定谔方程是量子力学中的基本假设。此外还有电子自旋、泡利不相容原理等基本假设。量子力学的理论体系就是在这几条基本假设基础上建立起来的。

薛定谔创立了非相对论量子力学,狄拉克创立了相对论量子力学,此二人分享了 1933 年诺贝尔物理学奖。

[例 15-5] 由 $\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - p_0 x)}$ 和相对论中能量和动量关系 $E^2 = c^2 P^2 + m_0^2 c^4$ 出发,建立自由粒子波函数满足的方程。

解:将 $\psi(x, t)$ 分别对 t 和 x 求二阶导数得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2} \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{P^2}{\hbar^2} \psi$$

将上述关系代入到 $E^2 = c^2 P^2 + m_0^2 c^4$ 得

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - m_0^2 c^4 \psi$$

上式称为克莱因-戈登方程,它是一维自由粒子的相对论波动方程。可以用来描述某些高速微观粒子的运动。

三、一维无限深势阱

现在以一维势阱(potential well)中的粒子为例,介绍应用量子力学基本方程——薛定谔方程处理实际问题的思路和方法。

一维无限深势阱是从实际问题中抽象出来的一种理想模型。例如,金属中的自由电子,只考虑它的边界上受到突然升高的势能“墙”阻挡,不能逸出金属表面,那么电子的运动被局



限在金属体内。又如原子核中的质子在其它核子的引力场、库仑场和强相互作用的势场中运动,其总效应可以简化为质子被局限在原子核范围内自由运动。这样一些微观粒子被局限在某局部区域,并在该区域作自由运动的问题都可以简化为一维无限深势阱问题。

现以一维深势阱中的粒子为例,根据势能函数具体形式求解薛定谔方程。在这个例子中着重介绍量子力学处理问题的方法,可以看到由于波函数的单值、连续、有限,只有当方程中的能量 E 取某些特定值时,方程才有解。

设粒子沿 x 轴在一个宽度为 a 的匣中往复运动,其势能曲线可简化成一维无限深势阱,如图 15-11 所示。在阱内势能为 0, $U(x)=0(0<x<a)$ 。在阱外势能为无穷大, $U(x)=\infty(x<0, x>a)$ 。粒子要从阱里跳到阱外,必须具有无穷大的能量,所以在阱外发现粒子的概率为零。在阱内,粒子的定态薛定谔方程是

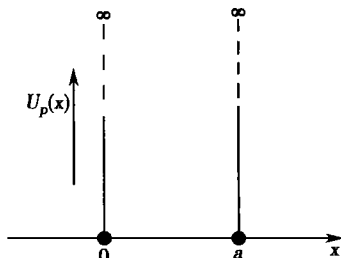


图 15-11 一维无限深势阱

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-0)\psi(x)=0 \quad (0<x<a)$$

下面求解此方程,令 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$,得

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x)=0$$

这个方程的通解是

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx$$

式中 A 、 B 是待定的任意常数,下面根据对波函数的要求确定其值。

在阱外发现粒子的概率为零, $\psi(x)=0(x<0, x>a)$,波函数的连续性要求在阱壁上 $x=0, x=a$, 两处 ψ 也必须为零。其中 $\psi(0)=0$, 要求 $B=0$, 于是方程的解变为 $\psi(x)=A\sin kx$ 。 $\psi(a)=0$, 要求 $kL = n\pi, n=1, 2, 3, \dots$ 。请注意 n 不能等于零, 否则在阱内 $\psi(x)=0$, 波函数不能归一化了。由 $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$ 可以看出, E 只能取分立值

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} n^2, (n=1, 2, 3, \dots) \quad (15-34)$$

波函数 ψ 中的 A 可按归一化条件求出

$$1 = \int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = A^2 \frac{a}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) d\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = A^2 \frac{a}{2}$$

即

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

一维势阱中粒子的定态波函数是

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (15-35)$$

对于一维势阱中粒子的能量和定态波函数,我们作进一步讨论。

阱中粒子的定态能量 E 只取分立值。量子数 n 越小,能级越低。阱中粒子的最低能量 $\frac{\hbar^2}{8ma^2}$ 称为**零点能**。其含义是:当温度达到绝对零度,一切热运动都停止了,束缚在阱中的粒子仍然不能静止下来。从零点能的计算式可知,只有当 ma^2 小到接近于 \hbar^2 时,零点能才有显著的值。阱越窄,零点能越大,如果阱宽扩大到宏观尺寸,零点能就小到可以忽略不计了。量子数越大,能级越高,但随着量子数 n 的增大,能级间隔和能级本身相比越来越小。其比值如下式所示:

$$\frac{E_{n+1}-E_n}{E_n} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2} = \left(\frac{2}{n}\right)$$



在室温下,金属中电子热运动平均动能 $\frac{3}{2}kT$ 大约是金属中自由电子零点能的 10^{14} 倍,相当于 $n=10^7$,这时相对的能级间隔 $\frac{2}{n}$ 可以忽略不计,这些电子可以看作是能量连续分布的电子气体。

一维势阱中粒子的波函数的概率密度分布如图 15-12 所示。当 $n=1$ 时,在阱的中间发现粒子概率最大;当 $n=2$ 时,在势阱的中间发现粒子的概率等于零,这和经典力学的预测完全不同。但随着量子数 n 的增大,概率极大值数目增多,间隔缩小,逐渐趋于连续分布。一般说来,处于束缚态的粒子,量子数越小,量子效应越显著;量子数很大时,量子效应逐渐消失。这种性质深刻地反映着量子力学与经典力学的对应关系。

所谓量子现象,从粒子的观点看是微观世界中发生的某些不可理解的现象;但从波的观点看,有时并不难理解。比较一维势阱中粒子的波函数和弦上驻波,它们的波形完全相同。从这里也可看到定态与驻波相当。为了在长度为 a 两端固定的弦上形成驻波, a 必须等于半个波长的整数倍。在 $a=n\frac{\lambda}{2}$ 中代入 $\lambda=\frac{h}{mv}$,立刻得出 $E_n=\frac{p^2}{2m}=\frac{h^2 n^2}{8ma^2}$ 的量子化能级。能量最低的定态相当于波长最长的驻波,它的能量就是零点能。如果要使粒子完全静止下来,这意味着它的动能是零,那么它相当的驻波波长应该无穷大。在有限长的弦上不可能形成这样的驻波。

四、势垒 隧道效应

两种不同的金属材料联在一起,在其接触面处形成电势差,此电势差就是一个势垒 (potential barrier),实验证明,能量低于势垒高度的自由粒子也能穿过势垒进入另一金属区,这就是隧道效应 (tunnel effect)。隧道效应是一种常见的量子效应,如 α 衰变、场致电子发射等。设质量为 m 的微观粒子在图 15-13 所示的势场中沿 x 方向运动,其势能为:

$$U(x)=\begin{cases} U & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, x > a) \end{cases}$$

这样的势能分布称为一维势垒。将势能值代入定态薛定谔方程(15-31)中,得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi &= 0 \quad (0 \leq x \leq a) \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi &= 0 \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (x < 0, x > a) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ k_2^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(E-U) \end{aligned}$$

则势垒问题的薛定谔方程可写为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2\psi = 0 \quad (x < 0, x > a)$$

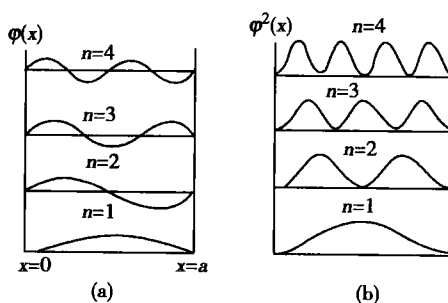


图 15-12 粒子在势阱内的波形和概率密度
(a)波形;(b)概率

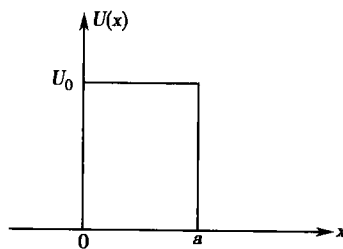


图 15-13 一维势垒



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

由此得出各区域的波函数

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \quad (x < 0) \quad (1)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1x} + B_3 e^{-ik_1x} \quad (x > a) \quad (3)$$

如果记住定态波数是这些波函数 $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$ 、 $\psi_3(x)$,

再乘上一个时间因子 $e^{-iEt/\hbar}$, 就很容易看出式(1)和式(2)

右边第一项是沿 x 方向传播的平面波, 第二项是沿 x 反方向传播的平面波。也就是说, 在式(1)中, 右边第一项为入射波, 第二项为反射波; 在式(2)中, 第一项为透射波, 第二项为反射波; 在式(3)中, 第一项为透射波, 在 $x > a$ 区域不存在反射波, 所以必须令 $B_3 = 0$ 。如图 15-14 所示。

我们可以将入射波强度作为比较的标准, 即令 $A_1 = 1$, 同时由波函数的单值、有限、连续的标准条件得

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) \\ \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} &= \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0} \\ \psi_2(a) &= \psi_3(a) \\ \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} &= \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式(4)可以解出 A_2 、 A_3 、 B_1 、 B_2 , 从而得出各区域的定态波函数。由于计算比较繁杂, 我们略去求解过程直接讨论解的物理意义。

1. $E > U$ 按经典力学观点, 能量 E 大于势垒高度 U 的粒子应该畅通无阻地全部越过势垒, 而不会在势垒壁上发生反射。但解薛定谔方程的结果, $B_1 \neq 0$ 且为实数, 即这种情况下粒子也可能反射。

2. $E < U$ 按经典力学观点, 这种情况下粒子不能越过势垒进入 $x > 0$ 区域。但解薛定谔方程的结果得出在势垒内部 ($0 \leq x \leq a$) 存在按指数规律衰减的波函数, 即在势垒中找出粒子的概率不为零。同时 $A_3 \neq 0$, 即粒子仍有可能穿过势垒到达 $x > a$ 区域。我们把总能量低于势垒高度的粒子也穿过势垒到达势垒另侧的现象称为隧道效应。定义贯穿系数 (transmission coefficient) 为透射波概率密度与入射波概率密度之比, 用 T 表示。则可得

$$T = \frac{|\psi_3|_{x=a}^2}{|\psi_1|_{x=0}^2} = \frac{|\psi_2|_{x=a}^2}{|\psi_2|_{x=0}^2} = e^{\frac{-2a\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

我们看到, 势垒高度 U 越低、势垒宽度 a 越小时, 粒子穿过势垒的概率越大。

隧道效应已完全被实验证实, 并在现代技术中得到广泛使用。 α 粒子从放射性核中逸出是隧道效应。图 15-15 是扫描隧穿显微镜 (STM, scanning tunneling microscopy) 原理示意图。它是通过扫描探针与样品表面间隧道效应形成的隧穿电流的变化来得到样品表面状况图像的。当探针在样品表面上方全面横向扫描时, 根据隧穿电流的变化, 利用反馈装置控制针尖与表面间保持一定距离, 把针尖扫描和起伏运动的数据送入计算机, 就可在荧光屏上显示出样品表面的三维图像。和实物尺寸比, 这一图像可放大到 1 亿倍。其横向分辨率为 $0.6 \sim 1.2 \text{ nm}$, 纵向分辨率为 0.001 nm , 最突出的优点是不损坏样品。

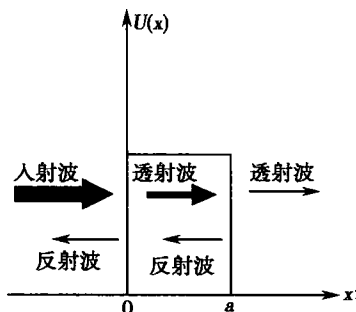
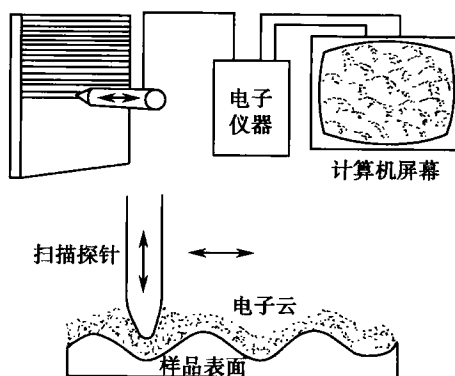


图 15-14 隧道效应



扫描隧穿显微镜的发明,开辟了表面物理研究的新领域,单个原子的成像已成为可能,也为量子力学的研究提供了极好的工具,为医学成像增添了新的仪器,发明者宾尼希(Binning)和罗勒(Rohrer)由于此卓越贡献与电子显微镜的发明者鲁斯卡(Ruska)分享了1986年诺贝尔物理学奖。

隧道效应在固体物理、放射性衰变和高新技术领域均有着重要作用。例如,半导体隧道二极管就是利用电子隧道效应制成的微电子器





常称 $l=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ 的运动状态为 s、p、d、f、g、h、... 等状态。

3. 空间量子化——磁量子数 m 角动量是矢量, 在经典力学中, 角动量矢量在空间的取向是任意的, 相当于玻尔轨道平面在空间的取向是任意的。在量子力学中, 解薛定谔方程得出的结果是: 角动量在空间中的取向不是任意的, 它在空间某一特殊方向, 例如沿 Z 轴方向的分量 L_z 只能取一系列分立值, 这种现象叫空间量子化。这些值为:

$$L_z = m \frac{h}{2\pi}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

式中 m 叫磁量子数(magnetic quantum number)它决定了电子轨道角动量在外磁场中的取向。 L_z 不同, 电子角动量在空间取向不同, 电子的运动状态也不同。角动量相同的电子, 可以分别处于 $2l+1$ 种不同的状态。

4. 自旋量子化——自旋量子数 s s 态电子的轨道角动量虽然等于零, 但旋武恩(Stern)和盖拉赫(Gertach)实验证明, 电子在这种状态时仍具有角动量。电子除了绕核运动外, 还在绕自身轴线旋转, 称为自旋(spin)。依照轨道角动量及其分量的量子条件, 电子自旋角动量的量值为

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (15-37)$$

式中 s 称为自旋量子数(spin quantum number), 质子、中子的 s 是 $\frac{1}{2}$, 电子的 $s=\frac{1}{2}$, 光子的 $s=1$ 。

自旋角动量沿 Z 轴方向的分量 L_{zs} 的量值是

$$L_{zs} = m_s \frac{h}{2\pi} \quad m_s = -s, -s+1, \dots, +s$$

式中 m_s 称为自旋磁量子数(spin magnetic quantum number)。由于电子的 $s=\frac{1}{2}$, 所以 m_s 的可能取值是 $-\frac{1}{2}$ 和 $+\frac{1}{2}$, 即是说对应于每一个由 (n, l, m) 所确定的函数, 电子可能有两种不同的运动状态, 这两种状态的 m_s 取值分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $+\frac{1}{2}$ 。

综上所述, 根据量子力学理论, 类氢原子的电子运动状态, 要由四个量子数来确定, 不同的运动状态有不同的量子数, 当给定主量子数 n 时, l 的取值为 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, 共有 n 个值。当 l 给定时, m 的可能值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, 共有 $2l+1$ 个值。电子的 m_s 的可能值只有 2 个, 即 $+\frac{1}{2}$ 与 $-\frac{1}{2}$ 。因此, 对于给定的主量子数 n , 电子可能的运动状态为 Z_n 个, Z_n 为

$$Z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

二、多电子原子

一个原子序数为 Z 的原子, 原子核外有 Z 个电子, 每个电子除了受到原子核的引力外, 还受到其他电子的斥力。一个电子在原子核外的电势能为原子核引力产生的势能和其他电子的斥力产生的势能之和。因此对于多电子原子, 用薛定谔方程求解是困难的, 而只能采用近似方法来解决。常用的有电子独立运动模型、哈特利自洽场模型、中心力场模型等。算的结果表明: 一般情况下, n 值越小, 能级越低, n 值相同而 l 值不同的状态, 能量略有不同, 即给定主量子数 n , 由于 l 有 n 个可能值, 因而有 n 个相近的能级。

核外电子与宏观物体一样, 最稳定的状态就是能量最低的状态。核外电子都有占据最低能级的趋向, 这就是能量最小原理(principle of least energy)。但是, 电子在核外的分布, 还必须遵从泡利不相容原理(Pauli's exclusion principle)。1925 年泡利从实验中总结出一



个原理:在一个原子内不可能有两个处于同一量子状态的电子,这个原理称为泡利不相容原理。根据这一原理,一个原子内每个电子都有它独自的四个量子数,换言之,任何两个电子都不可能具有完全相同的四个量子数。

前面已经讨论过,对于给定的主量子数 n ,电子可能的运动状态有 $2n^2$ 个,对于 $n=1$ 电子只有两个可能的运动状态,如果原子的原子序数 Z 大于 2,那么,根据泡利不相容原理,核外的 Z 个电子就不可能都处于 $n=1$ 的能级,而要处于 $n=2$ 、 $n=3$ 等较高的能级。一般说来,非激发态的原子,核外 Z 个电子按照从低能级到高能级的规律,从 $n=1, l=0$ 开始分布在若干个能级上。

分布在各个能级上的电子, n 值相同的电子属于同一壳层。各个壳层常用代号表示,分别以 K、L、M、N、O、P 代表 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 各个壳层。同一壳层中具有同一角量子数 l 的电子,则称为处于同一支壳层。各个支壳层也有代表符号,分别以 s、p、d、f、g、h 代表 $l=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 各支壳层。利用 l 的代表符号,可以把原子的电子状态表示为 $2p, 3s, 4d$ 等,其中数字表示主量子数。例如 $4d$ 表示电子处于 $n=4, l=2$ 的状态。表 15-3 列出每一壳层及支壳层所能容纳的电子数。

表 15-3 电子在原子中逐层分布数

n	壳层符号	电子数 l							Z_n
		0 s	1 p	2 d	3 f	4 g	5 h	6 i	
1	K	2							2
2	L	2	6						8
3	M	2	6	10					18
4	N	2	6	10	14				32
5	O	2	6	10	14	18			50
6	P	2	6	10	14	18	22		72
7	Q	2	6	10	14	18	22	26	98

多电子原子中由于电子的分布是逐层远离原子核,内壳层通常被填满,电子云是闭合对称的,这样就对外层电子起着屏蔽作用,使最外层的价电子所受到核电荷的引力减小,并且内层电子靠近原子核,外层电子的作用几乎可以忽略不计。

原子处于正常状态时,每个电子都趋向占据可能的最低能级,能量越低的能级首先被电子填满,其余电子依次向未被占据的最低能级填充,直到所有核外电子分别填入可能占据的最低能级为止。由于能量还和角量子数 l 有关,所以在某些情况下, n 较小的低能级壳层尚未填满时,下一个壳层上就开始有电子填入了。这就造成电子在原子中逐层分布的实际情况不完全像表 15-2 列的那样。例如:第三壳层只包括 $3s$ 和 $3p$ 的态,共 8 个电子,电子不是先填 $3d$ 然后再填第四壳层,而是先填 $4s$ 再填 $3d$ 。这是因为平均说来,角动量大的电子比角动量小的电子离核远些,受到内层电子的屏蔽作用较大,电子受到核的引力较小,因此势能较高, $3d$ 态的电子角动量大于 $4s$ 态,总能量比 $3d$ 态高,所以,先填 $4s$,再填 $3d$,同样原因,还发生先填 $5s$ 后填 $4d$,先 $6s$ 后 $5d$ 等。

按量子力学求得的各元素原子中电子逐层排列情况,已被物理、化学中元素的周期性得到完全证实。我国科学家总结出确定原子壳层能级高低的经验公式: $(n+0.7l)$ 的值越大,能级越高。



第八节 原子光谱与分子光谱

一、原子光谱

原子光谱(atomic spectrum)是线状光谱,它的产生与原子状态改变有关。原子中电子从一个状态跃迁到另一能级较低的状态时,发射单色光,大量原子同时发射的单色光在黑暗背景中形成若干明亮的、分立的谱线。这种光谱称为明线光谱或发射光谱。每种元素的光谱线数目和强度与元素受激条件有关。利用气体放电或在电极间产生电弧、电火花等方法可使原子受到激发。

原子状态的改变在玻尔的量子跃迁假设中是有限制的,即电子跃迁能在任何能级间进行。从光谱的观察和分析研究中发现,跃迁并不是任意的,只能在一定的能级间进行。原子可能发生的状态改变,通常以量子数的变化值描述,故称为选择定则。单电子原子的选择定则是主量子数 n 的改变不受限制,自旋量子数是不变的,角量子数 l 由于光子有一个单位的角动量,辐射或吸收过程中仍然遵循角动量守恒定律, l 只能增加或减少 1,即 $\Delta l = \pm 1$,总角动量子数 $j(j = l + s \text{ 或 } l - s)$ 可不变或增减 1,即 $\Delta j = 0, \pm 1$ 。其他跃迁都是不可能的。

原子的价电子由于内壳层电子的屏蔽作用,受到核的引力较小,在外界因素的影响下,容易被激发到更高的壳层,在外壳层能级间跃迁而发射单色光,这种光的频率一般在可见光及其附近的红外和紫外区,称为光学光谱。一价元素的光谱比较简单,价电子较多或内壳层未填满的元素,其光谱较为复杂。各种元素原子壳层的能级结构不同,价电子跃迁产生的光谱线分布也不一样,所以每种元素都有自己特定的发射光谱。

原子序数较高的原子,内壳层一般是填满的,如果原子中内壳层电子在外界能量的激发下,跃迁到空着的外壳层或电离,内壳层出现“空位”,原子处于受激态。受激态原子中,其他壳层的电子跃迁的能级差值大,频率高,通常在 X 射线的频率范围内,因此称为线状 X 射线光谱,内壳层电子离核较近,受到核的静电引力大,外壳层电子对它的影响小,所以这种电子的分布都很相似,但是原子的能量与 Z^2 成正比,所以各种元素的 X 射线频率都不相同,可以作为它的特征。因此,这种由于原子内壳层出现“空位”而产生的谱线,可作为原子的标识,因而又称为标识 X 射线,将在 16 章中详细讨论。

原子受到光照射时,如果照射光的波长在一定范围内是连续的,原子中电子将从照射光中获得一份适当的能量,跃迁到某一较高能级,其结果将使得照射光的光谱中出现暗线,这种光谱叫暗线光谱,也叫吸收光谱(absorption spectrum)。同一元素的吸收光谱中,暗线的频率与它的发射光谱明线的频率相同,因为它是电子在相同能级间的跃迁,区别仅在于一为辐射跃迁(发射光子),另一为激发跃迁(吸收光子),但吸收光谱中的暗线数目通常少于发射光谱中的明线的数目。这是因为原子通常处于基态,所以吸收过程中只有从基态跃迁到激发态,而没有各个激发态之间跃迁的谱线。

每种元素都有自己特定的明线光谱和吸收光谱,分析光谱线的数目和强度可以确定物质中的元素成分及量。这就是光谱分析技术的原理。光谱分析法具有很高的灵敏度,可以鉴定 10^{-9}g 的痕量元素。医学中应用较多的分析方法是把生物样品干燥、灰化、汽化成气态来产生明线光谱。利用吸收光谱可鉴定液态样品中某些金属元素。例如,检查有无铅中毒时,用患者的血或尿作为样品进行观测。

二、分子光谱

1. 分子光谱 前面介绍了原子光谱是线状光谱,光谱中各谱线之间的距离比较大,只



是在线系的末端谱线才密集起来,如果最外层电子不是太多,则原子光谱中线系也不多。分子光谱(molecular spectrum)的形状与原子光谱不一样,它有许多线系,每一线系中,有许多光谱线,这些谱线在线系的一端分布较稀,在另一端则非常密集,在光谱图中看上去好像是连成一片的带,所以分子光谱又称为带状光谱。一个线系就是一个带,若干带形成一带系,通常分子光谱中有若干个带系。图 15-16 为分子光谱的示意图。图中 a、b、c、d 表示四个线系,四个线系又构成一个带系,图中 A、B 表示两个带系。从波长范围来说,分子光谱有波长为厘米或毫米数量级的远红外光谱,有波长为微米数量级的近红外光谱以及可见光和紫外光谱。

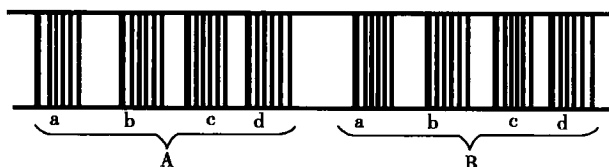


图 15-16 分子光谱

分子光谱的复杂性,反映分子内部复杂的运动状态,而复杂的运动状态与分子的结构有关。

2. 分子能级 分子由原子组成,分子的运动比原子复杂,包括三个方面:分子中电子的跃迁;分子作为一个整体的转动;以及分子中原子的振动。像原子运动一样,分子中的每一种运动都遵循一定的量子条件,它们的能量都是量子化的,相对于每一种运动的量子状态,都有相应的分子能级,这些能级反映每一种分子的特征。分子在能级之间跃迁,产生特征性的分子光谱。

(1) 电子能级:分子中有两个或两个以上的原子核,核周围内层电子的情况与独立的原子中的电子相差不多,外层电子则在几个核及其周围电子的共同作用下运动。分子中电子的运动遵循一定的量子条件,形成不同的量子状态,每一状态具有一定的能量 E_e 。分子中电子从一个能级跃迁到另一个能级时,发射或吸收一个光子,光子的频率 ν ,满足 $\nu = \Delta E_e / h$, ΔE_e 为两个电子能级的能量差值。分子中外层电子在各能级间跃迁所发射或吸收的光子,其频率由于分子中电子能级间的差值一般在 $1 \sim 20 \text{ eV}$,所以处在紫外区及可见光区,这种光谱称为分子的电子光谱(electron spectrum)。电子光谱一般包括若干谱带系,不同的谱带系相应于电子在不同能级间的跃迁。

(2) 分子中原子振动能级:构成分子的原子不停地在其平衡位置附近作振动,原子的振动实际上是原子核带动周围电子的振动。双原子分子的振动,在能量不很大时,可以近似作为简谐振动,振动能量以 E_v 表示。由量子力学计算为

$$E_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

式中 n 称为振动量子数, ν 为振动频率,从上式可看出振动能级是等距离的。但双原子分子实际不是简谐振子,实际能级不是等距离的, n 越大,能级距离越小,能级越密集。分子振动的能量 E_v 是一系列不连续的分立值,分子振动状态改变也是不连续的跃变。当分子从一个能级跃迁到另一能级时,发射或吸收一个光子,光子频率 $\nu_v = \Delta E_v / h$, ΔE_v 为跃迁能级的能量差。振动能级的间隔一般在 $0.05 \sim 1 \text{ eV}$ 之间, ν_v 在近红外区和中红外区,这种光谱称为分子的振动光谱(vibration spectrum)。

(3) 分子转动能级:分子作为一个整体可以绕一定的轴线转动,分子转动能量 E_r 也是一系列不连续的分立值,分子转动状态的改变也是不连续的跃变。分子从某一转动能级跃迁到另一能级时,发射或吸收一个光子,光子的频率 $\nu_r = \Delta E_r / h$, ΔE_r 为跃迁能级的能量差,



ΔE_r 一般小于 0.005eV , ν_r 在远红外区和微波区。这种光谱称为分子的转动光谱(rotation spectrum)。由于 ΔE_r 很小, 所以分子的转动光谱的谱线很密集, 如果分光仪的分辨本领不高, 所得的光谱是连成一片的“光带”, 而不是分开的光谱线。

双原子分子如作为刚性分子处理, 其转动能量为 E_r , 量子力学计算的结果为

$$E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 J} j(j+1) \quad j=0, 1, 2, 3, \dots$$

式中 J 为分子的转动惯量, j 为转动量子数。由上式可看出, j 越大, 转动能级间距离越大, 能级越分开。实际上, 分子不是刚性转子, 因为转动时有离心力作用, 原子间距离要增大, 转动愈快, 距离增加愈多。

辐射理论指出, 转子要有电矩才能有辐射, 所以对称的非极性分子如 H_2 、 O_2 、 CO_2 、 CH_4 、苯(C_6H_6)等都不应有转动光谱。这一点已被实验所证实。图 15-17 为双原子分子能级示意图。

分子运动的上述三个方面是相互影响的, 一种运动状态的改变能引起其他运动状态也发生改变, 振动能级的跃迁总是和转动能级的跃迁连在一起的; 电子能级跃迁时总

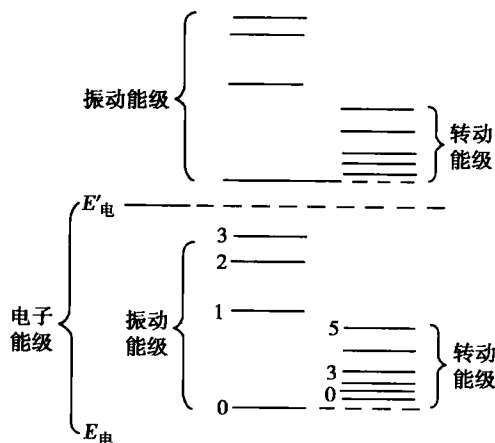


图 15-17 双原子分子能级示意图

是伴随着振动和转动能级的改变。为了便于讨论光谱的结构规律, 可近似认为分子定态的总能量 E 为三部分能量的总和, 即 $E = E_e + E_v + E_r$, 当分子振动状态跃变时, 由于伴随着转动状态的跃变, 分子能量的跃变 $\Delta E'$ 为振动能级的跃变 ΔE_v 与转动能级跃变 ΔE_r 之和, 即

$$\Delta E' = \Delta E_v + \Delta E_r$$

所发射或吸收的光子频率 ν' , 为

$$\nu' = \frac{\Delta E'}{h} = \frac{\Delta E_v}{h} + \frac{\Delta E_r}{h}$$

大量分子作相同振动能级跃迁时 (ΔE_v 相同), 由于各自的转动能级初态与末态各不相同 (ΔE_r 不同), 而 ΔE_r 很小, 所以各个分子发射的光子频率 ν' 相差很小, 因此, 谱线密集, 形成光谱带。这种光谱称为分子振转光谱; 不同的振动能级跃迁, 形成不同的谱带, 分子振转光谱在近红外区。

分子中电子作能级跃迁时, 由于伴随着振动能级和转动能级的改变, 分子能量的跃变 ΔE 为

$$\Delta E = \Delta E_e + \Delta E_v + \Delta E_r \quad (15-38)$$

所发射或吸收的光子频率为

$$\nu = \frac{\Delta E_e}{h} + \frac{\Delta E_v}{h} + \frac{\Delta E_r}{h}$$

大量分子作相同电子能级跃迁时, ΔE_e 相同, 各自的振动初态和末态各不相同, 各自的转动初态和末态各不相同, 但其中有一部分分子的振动初态和末态相同, 另一部分分子有着另一相同的振动初态和末态, 而相同的振动能级跃迁, 相应有一个光谱带, 因此, 分子作相同的电子能级跃迁时, 有着若干个光谱带, 这若干个光谱带形成一个光谱带系。从式(15-38)可看出这些光谱带由于电子能级差大, 整个光谱带的频率都比单纯的振转光谱高, 通常出现在紫外区、可见光区和近红外区。电子作不同能级跃迁时, 形成若干个光谱带系。

式(15-38)中, 三种能量的差值, 一般说来 $\Delta E_e > \Delta E_v > \Delta E_r$, 如果分子光谱由三种运动



状态变化共同引起,则发射的光子频率 ν 更大,且 ΔE_v 决定了光谱带系所在的区域, ΔE_v 则决定每个带系内的光谱带个数,而 ΔE_v 决定光谱带的精细结构。

红外吸收光谱主要是由分子振动或振动转动能级的跃迁产生的,红外吸收光谱可以鉴别各种化合物,可直接反映分子中各种原子团的存在。由化合物的吸收光谱中的特征谱带可判断该化合物中有何种原子团。另外,分子中部分结构或构型的改变,也可在特征谱带位置和强度的变化中反映出来。有机化合物分子的红外吸收光谱可分为两部分:一部分是波长 $7.40\mu\text{m}$ 到 $16.67\mu\text{m}$ 区域,在这个区域中的很多谱线可以用来鉴别化合物,所以称为指纹区。另一部分是 $6.63\sim 7.40\mu\text{m}$ 的区域,此区域中的吸收谱带主要是由分子中的原子团所产生的,根据这部分吸收光谱的波长和强度,可以鉴定化合物中所含的原子团等。

红外吸收光谱用于物质的定性定量分析,对于生物高分子和有机化合物分子结构和构型研究都是十分重要的。

思考题与习题十五

- 15-1 实物粒子的德布罗意波与电磁波、机械波有什么区别?
 15-2 何谓不确定关系?为什么说不确定关系与实验技术或仪器的改进无关?
 15-3 说明波函数的统计意义,波函数应满足什么物理条件?
 15-4 将波函数在空间各点的振幅同时增加 k 倍,则粒子在空间分布概率将()
 A. 增加 k^2 倍 B. 增为 $2k$ 倍
 C. 增为 k 倍 D. 不变 (A)

15-5 什么叫隧道效应?在什么条件下隧道效应就不显著了?

15-6 根据量子力学理论,氢原子中电子的运动状态可以用 n, l, m, m_s 四个量子数来描述,试说明它们各自确定什么物理量?

15-7 测量星球表面温度的方法是将星球看成绝对黑体,按维恩位移定律测量 λ_m 便可求出 T 。如测得北极星的 $\lambda_m = 350\text{nm}$,天狼星的 $\lambda_m = 290\text{nm}$,试求这些星球的表面温度各是多少?
 (8802K, 9993K)

15-8 假设太阳表面温度为 5800K ,直径为 $13.9 \times 10^8\text{m}$,太阳一年中由于辐射而损失的能量是多少焦耳?按质能联系公式 $\Delta E = \Delta mc^2$,太阳每年损失的质量多少千克?
 ($1.23 \times 10^{34}\text{J}$, $1.37 \times 10^{17}\text{kg}$)

15-9 求证:(1)当波长较长,温度较低时,普朗克公式可简化为维恩公式;(2)当波长较短,温度较高时,普朗克公式可简化为瑞利-金斯公式。

15-10 由实验可知,在一定条件下,人眼视网膜上接收 5 个蓝绿色($\lambda = 500\text{nm}$)光子就能产生光的感觉,此时视网膜上接收的能量有多少?如果每秒都接收 5 个这种光子,问投射到视网膜上的光功率是多少?
 ($1.99 \times 10^{-16}\text{J}$, $1.99 \times 10^{-16}\text{W}$)

15-11 在入射光波长 $\lambda_0 = 400\text{nm}$, $\lambda'_0 = 0.05\text{nm}$ 两种情况下分别计算散射角 $\varphi = \pi$ 时康普顿效应波长偏移 $\Delta\lambda$ 和 $\Delta\lambda/\lambda$ 。
 (0.00485nm , $1.2 \times 10^{-3}\%$, 9.7%)

15-12 电视显像管中加速电压为 9kV ,电子枪的枪口直径为 0.1mm ,求电子射出电子枪时横向速度的不确定量,能否将这些电子视为经典粒子?
 (可视为经典粒子)

15-13 粒子在磁感应强度为 $B = 0.025\text{T}$ 的均匀磁场中沿半径为 $R = 0.83\text{cm}$ 的圆形轨道运动。求(1)其德布罗意波长;(2)若使质量 $m = 0.1\text{g}$ 的小球以与 α 粒子相同的速率运动,其德布罗意波长多大?
 ($9.98 \times 10^{-12}\text{m}$, $6.626 \times 10^{-24}\text{nm}$)

15-14 氢原子光谱的巴耳末线系中,有一谱线的波长为 430nm 。

(1) 求与这一谱线相应的光子的能量; (2.89eV)



(2) 设该谱线是氢原子由能级 E_n 跃迁到 E_k 产生的, n 和 k 各为多少? ($k=2, n=5$)

15-15 计算氢原子光谱巴耳末系中波长最长的谱线所对应的光子的波长和能量。

($\lambda_{\max}=656.3\text{nm}; E=1.89\text{eV}$)

15-16 设电子在一维无限深势阱中运动, 求势阱宽度 $a=10^{-2}\text{m}$ 和 $a'=10^{10}\text{m}$ 两种情况下电子的能量。

($3.8\times 10^{-15}\text{eV}; 38n^2\text{eV}$)

15-17 已知粒子在无限深势阱中运动, 其波函数 $\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ ($0<x<a$), 求发现粒子的概率的最大的位置?

($x=\frac{a}{2}$)

15-18 粒子在一维无限深势阱中运动, 其波函数 $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ ($0<x<a$), 若粒子处于 $n=1$ 状态, 在 $0\sim a/4$ 区间发现粒子的概率是多少?

(0.091)

15-19 一细胞的线度为 10^{-5}m , 其中一个粒子的质量 $m=10^{-14}\text{g}$, 按一维无限深势阱计算, 这粒子 $n_1=100$ 和 $n_2=101$ 的能级能量和两能级差各为多少?

($5.49\times 10^{-37}\text{J}; 5.60\times 10^{-37}\text{J}, 1.1\times 10^{-38}\text{J}$)

15-20 在原子内部, 可用四个量子数 n, l, m, m_s 共同确定一个电子运动状态。按泡利不相容原理, 在主量子数为 n 的壳层上, 最多可容纳多少个电子?

($2n^2$)

(胡新珉)

第十六章 X 射线

学习要求:

1. 掌握 X 射线强度和硬度的概念、X 射线谱及 X 射线产生的微观机制、短波极限公式的应用、X 射线的衰减规律及应用。
2. 理解 X 射线的基本性质、X 射线衍射和 X-CT 成像原理。
3. 了解 X 射线机的基本组成部分、同步辐射 X 射线的特点、X 射线在医学上的应用。

1895 年, 伦琴 (W. K. Roentgen) 在研究稀薄气体放电时发现了 X 射线。劳厄 (M. von Laue) 用晶体衍射实验证明了 X 射线是一种波长较短的电磁波。一百多年的实践证明, X 射线在对物质微观结构理论的深入研究和科学技术的发展方面都具有巨大的推动作用。X 射线在医学诊疗中也有着广泛的应用, 它与近代科技相结合, 已成为现代医学不可缺少的工具。本章将介绍 X 射线的产生、X 射线谱、X 射线的性质和衰减规律、X-CT 基本原理及 X 射线在医学上的应用。

第一节 X 射线的产生

一、X 射线的产生装置

1. 产生 X 射线的方法 从理论上讲, 产生 X 射线的方法有多种。常用的方法是: 让高速运动的电子受障碍物阻止, 由于它们的相互作用产生 X 射线。此方法产生 X 射线的基本条件是: ①有高速运动的电子流; ②有适当的障碍物——靶, 用来阻止电子的运动, 把电子的动能转变为 X 射线的能量。产生 X 射线的另一种方法是: 由加速的高能带电粒子直接辐射 X 射线, 同步辐射 (synchronous radiation) 即属此方法。此外, 用受激辐射产生激光的方法也可产生 X 射线。目前, 主要采用高速电子 (几十兆电子伏特) 受阻辐射产生 X 射线。

2. X 射线产生装置 一般情况下, 产生 X 射线的装置主要包括四个组成部分, 即 X 射线管、低压电源、高压电源和整流电路。同步辐射 X 射线的产生装置非常复杂, 这里不作介绍。下面仅介绍常用 X 射线产生装置的组成部分。

X 射线管是一个高度真空的硬质玻璃管, 管内封入阴极 (cathode) 和阳极 (anode)。阴极由钨丝卷绕成螺旋形, 单独由低压电源 (一般为 $5 \sim 10\text{V}$) 供给电流, 使其炽热而发射电子。电流愈大, 灯丝温度愈高, 单位时间内发射的电子愈多。阳极在管的另一端且正对着阴极, 通常是铜制的圆柱体, 在柱端斜面上嵌一小块钨板, 作为接受高速电子冲击的靶。阴阳两极间所加的几十千伏到几百千伏的直流高压, 叫做管电压 (tube voltage), 阴极发射的热电子在电场作用下高速奔向阳极, 形成管电流 (tube current), 这些高速电子突然被钨靶阻止时, 就有 X 射线向四周辐射。

医用 X 射线产生装置 (X 射线机), 都采用交流供电, 结构比较复杂。图 16-1 是较典型的全波整流 X 射线机基本线路示意图, 图中升压变压器 T_1 用来获得所需的管电压, 4 个二极管联成全波整流器, 把 T_1 输出的交流高压改变为直流。降压变压器 T_2 供给灯丝加热电流, 变阻器 R 用来调节灯丝电流以改变发出的热电子的数量, 从而控制管电流。

高速电子轰击阳极时, 电子动能转变为 X 射线的能量不到 1%, 99% 以上都转变为热,

从而使阳极温度升高。因此,阳极上直接受到电子轰击的区域——靶,应当选用熔点高的物质。此外,理论和实验都表明,在同样速度和数目的电子轰击下,原子序数 Z 不同的各种物质做成的靶所辐射X射线的光子总数或光子总能量是不同的,光子总能量近似与 Z^2 成正比,所以 Z 愈大则发生X射线的效率愈高。因此,在兼顾熔点高、原子序数大和其他一些技术要求时,钨($Z=74$)和它的合金是最适当的材料。在需要波长较长的X射线的情况下,如乳房透视,采用的管电压较低,这时用钼($Z=$

42)作为靶更好一些。由于靶的发热量很大,所以阳极整体用导热系数较大的铜做成,受电子轰击的钨或钼靶则镶嵌在阳极上,以便更好地导出和散发热量。按照X射线管的功率大小,采用不同的散热方法以降低阳极的温度。

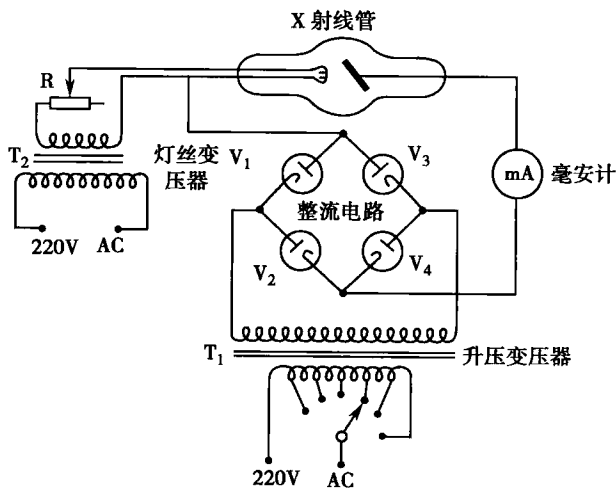


图 16-1 X射线机的基本线路

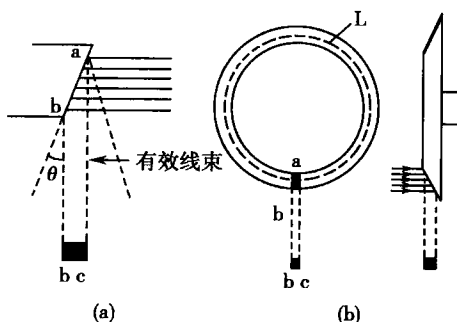


图 16-2 有效焦点和旋转阳极

3. 实际焦点与有效焦点 电子流在靶面上的撞击面积称为实际焦点,实际焦点的大小和灯丝的形状有关。长灯丝所形成的焦点叫大焦点,短灯丝形成的焦点叫小焦点,可根据需要选择使用。一般X射线管的阳极靶面均做成斜面,钨靶为一矩形,如图16-2(a)所示。图中实际焦点为 $ab \times cd$, θ 角是靶面与垂直于电子流方向的夹角。实际焦点的投影面积叫做有效焦点,其面积近似等于 $bc \times ab \sin \theta$,有效焦点与靶的倾斜度有关,大约只有实际焦点的 $1/2$ 到 $1/4$,近似正方形。虽然电子撞击在靶上的面积较

大,但X射线却像是从较小的面积上发射出来。焦点愈小,X射线透视或照相时在荧光屏或照相底片上所成的像愈清晰。一般诊断用的X射线管采用小焦点,而治疗用X射线管则采用大焦点。另一方面,为了降低阳极靶面的温度,大功率的X射线管多采用旋转阳极,使受撞击面不断改变,将热量分散到较大的面积上,如图16-2(b)所示。

二、X射线的强度和硬度

1. X射线的强度 X射线的强度是指单位时间内通过与射线方向垂直的单位面积的辐射能量,单位为 $W \cdot m^{-2}$,这与波的强度概念相一致。若用 I 表示X射线的强度,则有

$$I = \sum_{i=1}^n N_i h \nu_i = N_1 h \nu_1 + N_2 h \nu_2 + \cdots + N_n h \nu_n \quad (16-1)$$

式中 N_1, N_2, \cdots, N_n 分别表示单位时间通过单位面积(垂直于射线方向)的能量为 $h \nu_1, h \nu_2, \cdots, h \nu_n$ 的光子数。由式(16-1)可知,有两种办法可使X射线强度增加:①增加管电流,使单位时间内轰击阳极靶的高速电子数目增多,从而增加所产生的光子数目 N ;②增加管电压,可使每个光子的能量 $h \nu$ 增加。由于光子数不易测出,故通常采用管电流的毫安数(mA)来间接



表示 X 射线的强度大小,称为毫安率。

在管电压一定的情况下,X 射线管灯丝电流越大,灯丝温度越高,则发射的热电子数目越多,管电流就越大。因此,常用调节灯丝电流的方法改变管电流,以达到控制 X 射线强度的目的。

由于 X 射线通过任一截面积的总辐射能量不仅与管电流成正比,而且还与照射时间成正比,因此常用管电流的毫安数(mA)与辐射时间(s)的乘积表示 X 射线的总辐射能量,其单位为 mA · s。

2. X 射线的硬度 X 射线的硬度是指 X 射线的贯穿本领,它只决定于 X 射线的波长(即单个光子的能量),而与光子数目无关。对于一定的吸收物质,X 射线被吸收愈少则贯穿的量愈多,X 射线就愈硬,或者说硬度愈大。X 射线管的管电压愈高,则轰击靶面的电子动能愈大,发射光子的能量也愈大,而光子能量愈大愈不易被物质吸收,即管电压愈高产生的 X 射线愈硬。同样,由于单个 X 光子的能量不易测出,所以,在医学上通常用管电压的千伏数(kV)来表示 X 射线的硬度,称为千伏率,并通过调节管电压来控制 X 射线的硬度。在医学上,根据用途把 X 射线按硬度分为极软、软、硬和极硬四类,它们的管电压、波长及用途见表 16-1。

表 16-1 X 射线按硬度的分类

名 称	管电压(kV)	最短波长(nm)	主要用途
极软 X 射线	5~20	0.25~0.062	软组织摄影,表皮治疗
软 X 射线	20~100	0.062~0.012	透视和摄影
硬 X 射线	100~250	0.012~0.005	较深组织治疗
极硬 X 射线	250 以上	0.005 以下	深部组织治疗

第二节 X 射线谱

采用 X 射线管发出的 X 射线,包含各种不同的波长成分,将其强度按照波长的顺序排列开来的图谱,称为 X 射线谱(X-ray spectrum)。钨靶 X 射线管所发射的 X 射线谱如图 16-3 所示,上部是谱强度与波长关系的曲线,下部是照在胶片上的射线谱。从该图可以看出,X 射线谱包含两个部分:曲线下面划斜线的部分对应于照片上的背景,它包括各种不同波长的射线,称为连续 X 射线(continuous X-rays)或连续谱;另一部分是曲线上凸出的尖峰,具有较大的强度,对应于照片上的明显谱线,这相当于可见光中的明线光谱,称为标识 X 射线(characteristic X-rays)或标识谱。连续谱与靶物质无关,但不同的靶物质有不同的标识谱。下面分别讨论这两部分谱线。

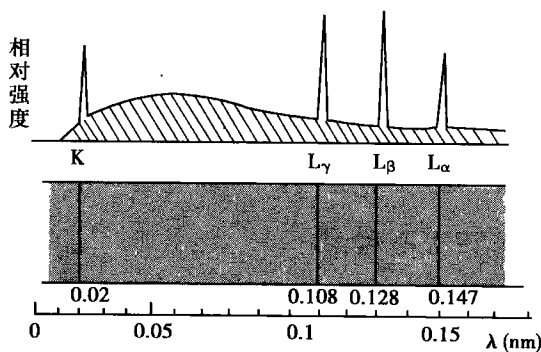


图 16-3 X 射线谱示意图

一、连续 X 射线谱

1. 产生机制 连续 X 射线的发生是轫致辐射(bremsstrahlung)过程,轫致辐射一词来自德语制动辐射,它是对这种过程的最好描述。当高速电子流撞击在阳极靶上受到制动时,



电子在原子核的强电场作用下,速度的量值和方向都发生急剧变化,一部分动能转化为光子的能量 $h\nu$ 而辐射出去,这就是轫致辐射。由于各个电子到原子核的距离不同,速度变化情况也各不一样,所以每个电子损失的动能将不同,辐射出来的光子能量具有各种各样的数值,从而形成具有各种频率的连续 X 射线谱。

2. 连续谱特性 实验指出,当 X 射线管在管电压较低时只出现连续 X 射线谱。图 16-4 是钨靶 X 射线管在四种较低管电压下的 X 射线谱。由图可见,在不同管电压作用下连续谱的位置并不一样,谱线的强度从长波开始逐渐上升,达到最大值后很快下降为零。强度为零的相应波长是连续谱中的最短波长,称为短波极限。在图中还可以看到,当管电压增大时,各波长的强度都增大,而且强度最大的波长和短波极限都向短波方向移动。

设管电压为 U ,电子电量为 e ,则电子具有的最大能为 eU ,这也是光子可能具有的最大能量 $h\nu_{\max}$, ν_{\max} 是与短波极限 λ_{\min} 对应的最高频率,由此得到

$$h\nu_{\max} = h \frac{c}{\lambda_{\min}} = eU$$

即

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} \quad (16-2)$$

上式表明,连续 X 射线谱的最短波长与管电压成反比。管电压愈高,则 λ_{\min} 愈短。这个结论与图 16-4 的实验结果完全一致。把 h 、 c 、 e 的值代入上式,并取 kV 为电压单位, nm 为波长单位,可得

$$\lambda_{\min} = \frac{1.242}{U(\text{kV})} \text{nm} \quad (16-3)$$

连续 X 射线谱的强度同时受到靶原子序数、管电流及管电压影响。在管电流、管电压一定的情况下,靶原子序数愈高连续谱强度愈大,这是因为每一种靶原子核的核电荷数等于它的原子序数,原子序数大的原子核电场对电子作用强,电子损失能量多,辐射出来的光子能量大, X 射线的强度就大。

二、标识 X 射线谱

以上讨论的是钨靶 X 射线管在 50kV 以下工作的情况,此时波长在 0.025nm 以上,只出现连续 X 射线。当管电压升高到 70kV 以上时,连续谱在 0.02nm 附近叠加了 4 条谱线,在曲线上出现了 4 个高峰。当电压继续升高时,连续谱发生很大改变,但这 4 条标识谱线在图中的位置却始终不变,即它们的波长不变,如图 16-5 所示,图中的 4 条谱线就是图 16-3 中未曾分开的 K 线。

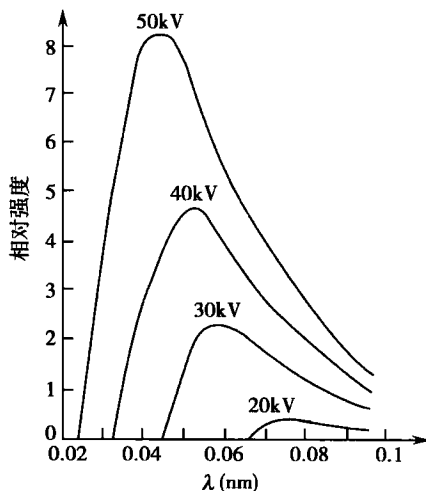


图 16-4 钨的连续 X 射线谱

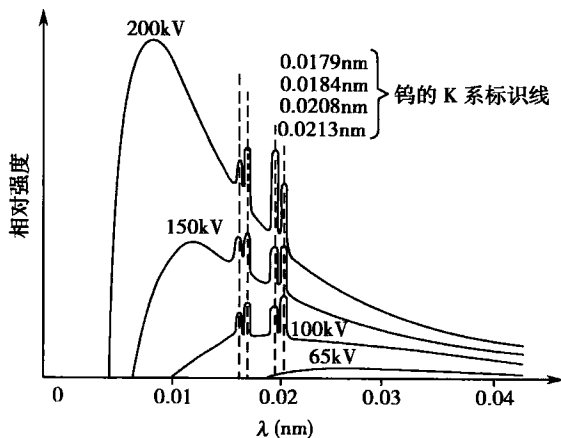


图 16-5 钨在较高管电压下的 X 射线谱

0.0213nm 和 0.0208nm 的谱线由 L 层下不同能级的电子跃迁到 K 层空位时发生; 0.0184nm 的谱线来自 M 层电子; 0.0179nm 的谱线来自 N 层和 M 层电子向 K 层空位的跃迁



1. 产生机制 标识 X 射线的产生和原子光学光谱的产生相类似,两者的区别在于原子光学光谱是原子外层电子跃迁产生的,而标识 X 射线是由较高各能级的电子跃迁到内壳层的空位产生的。由于壳层间能量差较大,因而发出的光子频率较高,波长较短。当高速电子进入靶内时,如果它与某个原子的内层电子发生强烈相互作用,就有可能把一部分动能传递给这个电子,使它从原子中脱出,从而在原子的内层电子中出现一个空位。如果被打出去的是 K 层电子,则空出来的位置就会被 L、M 或更外层的电子跃迁填充,并在跃迁过程中发出一个光子,而光子能量等于两个能级的能量差。这样发出的几条谱线,通常以符号 K_α 、 K_β 、 K_γ ...表示,称为 K 线系。如果空位出现在 L 层(这个空位可能是由于高速电子直接把一个 L 层电子击出去,也可能是由于 L 层电子跃迁到了 K 层留下的空位),那么这个空位就可能由 M、N、O 层的电子来补充,并在跃迁过程中发出一个 X 光子,形成 L 线系。由于离核愈远,能级差愈小,所以 L 线系各谱线的波长比 K 系的大些。同理, M 系的波长又更大些。图 16-3 画出了钨的 K 和 L 线系,而图 16-5 中没有出现 L 线系,因为它已在图中的波长范围以外。图 16-6 画出了这种跃迁的示意图,当然这些跃迁并不是同时在一个原子中发生的。

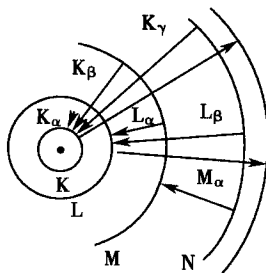


图 16-6 标识 X 射线发生原理示意图

2. 标识谱特性 标识 X 射线谱是原子内层电子跃迁所发出的,因此各元素的标识谱有相似的结构。在标识 X 射线谱中,电子由不同能级达到同一壳层的空位时发生的谱线组成一个线系,每个线系都有一个最短波长边界,这就是一个自由电子(或近似地认为最外层价电子)进入这个空位时发出的光子的波长。由于原子中各个内层轨道的能量相对于真空能量的差别是随着原子序数增加的,因此,原子序数愈高的元素,它的各个标识 X 射线系的波长也愈短。标识谱线的波长决定于阳极靶的材料,不同元素制成的靶具有不同的线状 X 射线谱,并可以作为这些元素的标识,这就是“标识 X 射线”名称的由来。需要指出,X 射线管需要加几十千伏的电压才能激发出某些标识 X 射线系。

医用 X 射线管发出的主要是连续 X 射线,标识 X 射线在全部 X 射线中所占的分量很少。但是,标识 X 射线的研究,对于认识原子的壳层结构和化学元素分析都是非常有用的,例如从 1940 年以来发展起来的微区分析技术就是用很细的电子束打在样品上,根据样品发出的标识 X 射线来鉴定各个微区中的元素成分。在医学和生物学方面,应用 X 射线微区分析法做超微观察和超微分析。

第三节 X 射线的基本性质

一、X 射线的基本性质

X 射线和从原子核中发射出来的 γ 射线一样,都是波长很短的电磁波,也是能量很大的光子流,所以,X 射线除具有电磁波的一系列性质外,还有如下特性。

1. 电离作用 X 射线能使原子和分子电离,因此对有机体可诱发各种生物效应。在 X 射线照射下,气体也能够被电离而导电,利用电离作用这一特性可制作测量 X 射线强度的仪器,常用于辐射剂量的测试。

2. 荧光作用 X 射线照射某些物质,如磷、铂、氰化钡、硫化锌等,能使它们的原子或分子处于激发态,当它们回到基态时发出荧光。有些激发态是亚稳态,在停止照射后,能在一段时间内继续发出磷光。医疗上的 X 射线透视,就是利用 X 射线对屏上物质的荧光作用显



示 X 射线透过人体后所成的影像。

3. 光化学作用 X 射线能使多种物质发生光化学反应,例如,X 射线能使照相胶片感光。医学上利用这一特性来进行 X 射线摄影。

4. 生物效应 X 射线照射生物体,能使生物体产生各种生物效应,如使细胞损伤、生长受到抑制甚至坏死等。由于人体各种组织细胞对 X 射线的敏感性不同,受到的损伤程度也就有差异。利用这种性质可用 X 射线来杀死某些敏感性强、分裂旺盛的癌细胞等,以达到治疗的目的。X 射线对正常组织也有损害作用,所以射线工作者要特别注意防护。

5. 贯穿本领 X 射线对各种物质都具有一定程度的穿透作用。研究表明,物质对 X 射线的吸收程度与 X 射线的波长有关,也与物质的原子序数或密度有关。X 射线波长越短,物质对它的吸收越小,它的贯穿本领就越大。医学上利用 X 射线的贯穿本领和不同物质对它吸收程度的不同进行 X 射线透视、摄影和防护。X 射线对人体组织的穿透作用可分为三类:一是属于可透性组织,如体内气体、脂肪、一些脏器和肌肉等;二是属于中等可透性组织,如结缔组织、软骨等;三是不易透过性组织,如骨骼、盐类等。

同步辐射 X 射线有如下特性:①能获得单色 X 射线,且波长连续可调,从几微米到几百皮米;②是线偏振光,可研究生物分子的旋光性;③有很好的准直性,即同步辐射 X 射线的发散角较小;④有强的辐射功率,普通 X 射线管所输出的功率最大约 10 瓦,同步辐射 X 射线功率可达几万瓦。

二、X 射线的衍射

普通 X 射线的波长范围约为 $0.001 \sim 10\text{nm}$,晶体中相邻微粒(原子、分子、离子)间距的数量级与此相仿,所以晶体微粒有规则排列起来的结构是三维衍射光栅。1912 年劳厄用晶体衍射方法证明 X 射线具有波动性,从而揭示了 X 射线的本质。下面是 X 射线晶体衍射的基本原理。

当 X 射线照射晶体时,组成晶体的每一个微粒,都相当于发射子波的中心,并向各个方向发出子波,称为散射。经晶体微粒散射的 X 射线会叠加干涉而使得某些方向的光束加强,形成衍射束。图 16-7 表示晶体空间点阵的一个平面,图中黑点代表晶体中的微粒,它们按等间距 d 整齐地排列着。X 射线以 θ 角掠射到晶体的某一晶面族上时,由于 X 射线能穿过许多微粒层,并在每一层发生散射,虽然散射线强度很弱,但当这些散射线满足相干条件时,将相互加强而形成干涉图样。由图可见,上下两层微粒发出的反射线①和②的光程差是

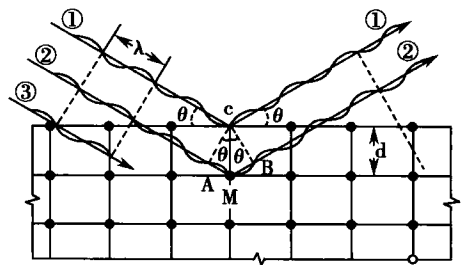


图 16-7 X 射线衍射原理

$$AM + BM = 2AM = 2d \sin \theta$$

因此反射线相干加强的条件是

$$2d \sin \theta = k\lambda \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (16-4)$$

上式称为布喇格定律(Bragg's law)。式中 d 是晶面中微粒层间的距离。

如果入射的是单色 X 射线束,以任意掠射角 θ 投射到晶面上时,一般不能满足式(16-4)的条件。但由于通常入射 X 射线的波长是连续的,则对于波长值 $\lambda = 2d \sin \theta / k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 的入射 X 射线束就可以产生加强反射



置和间隔。因此, X 射线衍射是研究晶体结构的主要方法之一。利用同样方法也可用在生物医学上研究有机体如细胞和蛋白质等的精细结构。现在这种研究已经发展成一门独立学科, 叫作 X 射线结构分析。DNA 的双螺旋结构就是用 X 射线衍射发现的。

利用 X 射线晶体衍射的基本原理, 布拉格父子设计了既能观察 X 射线衍射, 又可摄取 X 射线谱的实验装置, 即 X 射线摄谱仪 (X-ray spectrograph)。如图 16-8 所示, X 射线束通过两个铅屏上的狭缝射到晶体光栅上, 转动晶体, 当入射 X 射线的方向相对于晶体为某一角度时, 入射 X 射线中某一波长刚好满足式(16-4)的关系, 这时, 将有一束反

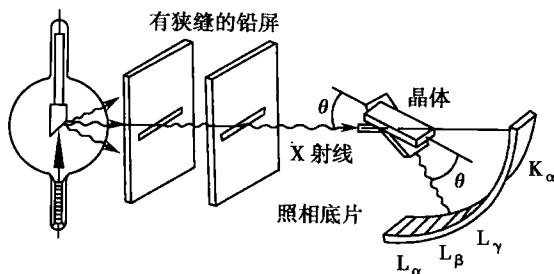


图 16-8 X 射线摄谱仪原理图

射 X 线从晶体射到放置在其附近的圆弧形胶片上。波长愈短的射线, 掠射角 θ 愈小。改变 θ 角, 就可以使不同波长的 X 射线在不同的方向上得到加强并射向胶片。当晶体往复转动时, 反射 X 射线束就在胶片上从一端到另一端反复感光, 取下胶片冲洗后就可获得本章第二节图 16-3 所示的 X 射线谱。利用该摄谱仪还可获得单色 X 射线。

第四节 物质对 X 射线的衰减规律

当 X 射线通过物质时, X 光子能与物质中的原子发生多种相互作用。在作用过程中, 一部分光子被吸收并转化为其他形式的能量, 一部分光子被物质散射而改变方向, 因此在 X 射线原来方向上的强度衰减了。这种现象称为物质对 X 射线的吸收, 本节仅讨论它的宏观总效果, 即物质对 X 射线的衰减规律。

一、单色 X 射线的衰减规律

实验指出, 单色平行 X 射线束通过物质时, 沿入射方向 X 射线强度的变化服从指数衰减规律, 即

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (16-5)$$

式中 I_0 是入射 X 射线的强度, I 是通过厚度为 x 的物质层后的射线强度, μ 称为线性衰减系数 (linear attenuation coefficient)。如果厚度 x 的单位为 cm, 则 μ 的单位为 cm^{-1} 。显然, μ 愈大则射线强度在物质中衰减愈快, μ 愈小则衰减愈慢。对于同一种物质来说, 线性衰减系数 μ 与它的密度 ρ 成正比, 因为吸收体的密度愈大, 则单位体积中可能与光子发生作用的原子就愈多, 光子在单位路程中被吸收或散射的概率也就愈大。线性衰减系数 μ 与密度 ρ 的比值称为质量衰减系数 (mass-attenuation coefficient), 记作 μ_m , 即

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (16-6)$$

质量衰减系数用来比较各种物质对 X 射线的吸收本领。一种物质由液态或固态转变为气态时, 密度变化很大, 但 μ_m 值都是相同的。引入质量衰减系数后, 式(16-5)改写成

$$I = I_0 e^{-\mu_m x_m} \quad (16-7)$$

式中 $x_m = x\rho$ 即称为质量厚度 (mass thickness), 它等于单位面积厚度为 x 的吸收层的质量。 x_m 的常用单位为 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$, μ_m 的相应单位为 $\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ 。

X 射线在物质中强度被衰减一半时的厚度 (或质量厚度), 称为该种物质的半价层 (half value layer)。由式(16-5)和式(16-7)可以得到半价层与衰减系数之间的关系式



$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0.693}{\mu} \quad (16-8)$$

$$x_{m1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_m} = \frac{0.693}{\mu_m} \quad (16-9)$$

式(16-5)和(16-7)可写为 $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x_{1/2}}}$ 或 $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x_{m1/2}}}$ 。

各种物质的衰减系数都与射线波长有关,因此以上各式只适用于单色射线束。X射线主要是连续谱,所以射线的总强度并不是严格地按照指数规律衰减的。在实际问题中,我们经常近似地运用指数规律,这时式中的衰减系数应当用各种波长的衰减系数的一个适当平均值来代替。

X射线通过物质时强度按指数规律衰减,其微观机制是X射线与物质发生多种相互作用。X射线与物质相互作用的方式主要有三种:光电效应、康普顿散射和正负电子对生成。各种作用的具体过程将在第十七章介绍。

二、衰减系数与波长、原子序数的关系

对于医学上常用的低能X射线,光子能量在数十 keV 到数百 keV 之间,各种元素的质量衰减系数近似地适合下式

$$\mu_m = K Z^\alpha \lambda^3 \quad (16-10)$$

式中的 K 大致是一个常数, Z 是吸收物质的原子序数, λ 是射线的波长。指数 α 通常在 3 与 4 之间,与吸收物质和射线波长有关。吸收物质为水、空气和人体组织时,对于医学上常用的X射线, α 可取 3.5。吸收物质中含有多种元素时,它的质量衰减系数大约等于其中各种元素的质量衰减系数按照物体中所含质量比例计算的平均值。从式(16-10),我们得出两个有实际意义的结论:

(1) 原子序数愈大的物质,吸收本领愈大。人体肌肉组织的主要成分是 H、O、C 等,而骨骼的主要成分是 $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$, 其中 Ca 和 P 的原子序数比肌肉组织中任何主要成分的原子序数都高,因此骨骼的质量衰减系数比肌肉组织的大,在X射线照片或透视荧光屏上显示出明显的阴影。在胃肠透视时服食钡盐也是因为钡的原子序数较高($Z=56$),吸收本领较大,可以显示出胃肠的阴影。铅的原子序数很高($Z=82$),因此铅板和铅制品是应用最广泛的X射线防护用品。

(2) 波长愈长的X射线,愈容易被吸收。这就是说,X射线的波长愈短,贯穿本领愈大,即硬度愈大。因此,在浅部治疗时应使用较低的管电压,在深部治疗时则使用较高的管电压。

根据上述结论可知,当X射线管发出的含有各种波长的射线进入吸收体后,长波成分比短波成分衰减得快,短波成分所占的比例愈来愈大,平均衰减系数则愈来愈小。这也就是说,X射线进入物体后愈来愈硬了,这称为它的硬化。利用这一原理,我们常常让X射线通过铜板或铝板,使软线成分被强烈吸收,这样得到的X射线不仅硬度较高,而且射线谱的范围也较窄,这种装置称为滤线板。具体的滤线板往往由铜板和铝板合并组成。在使用时,铝板应当放在X射线最后出射的一侧。这是因为各种物质在吸收X射线时都发出它自己的标识X射线,铝板可以吸收铜板发出的标识X射线,而铝板发出的标识X射线波长约在 0.8nm 以上,很容易在空气中被吸收。

第五节 X射线的医学应用

X射线在医疗上的应用,主要有治疗和诊断两个方面。



一、治疗

X 射线在临床上主要用于治疗癌症,其治疗机制是,X 射线通过人体组织能产生电离作用、康普顿散射及生成正负电子对,由此可诱发出一系列生物效应。研究表明,X 射线对生物组织细胞有破坏作用,尤其是对于分裂活动旺盛或正在分裂的细胞,其破坏力更强。组织细胞分裂旺盛是癌细胞的特征,因此用 X 射线照射可以抑制它的生长或使它坏死。各种细胞对 X 射线的敏感性是不一样的,因此放射治疗方案的设计就显得尤为重要,不仅要根据肿瘤位置及细胞种类计算出给予病人肿瘤的照射量,还要及时测定和调节治疗设备输出的射线量。

用于治疗 X 射线设备有两种,即普通 X 射线治疗机和“X 射线刀”。普通治疗机与常规摄影 X 射线机的结构基本相同,只是 X 射线管采用了大焦点,常用来治疗皮肤肿瘤。“X 射线刀”是利用“直线加速器”输出的高能电子轰击钨靶产生高能 X 射线和电子线,以此作为放射源,并围绕靶区的等中心点作 $270^{\circ}\sim 360^{\circ}$ 旋转,依其垂直旋转与操作台 180° 范围内的水平旋转,在靶区形成多个非共面的聚焦照射弧,使照射线集中于肿瘤区的某中心点上以获得最大的辐射量。“X 射线刀”可用于各器官、组织肿瘤的放射治疗。

由于 X 射线能引起生物效应,因此人体组织受过量 X 射线照射后会引发某些疾病,如白血球病症、皮肤病及毛发脱落等。因此,应尽量减少病人不必要的照射。对经常从事 X 射线工作的人员要注意防护,常用的防护物品有铅板、含铅玻璃、含铅胶皮裙和手套等。

二、诊断

X 射线常规透视、摄影、X-CT 以及近几年出现的数字减影血管造影技术是医学影像诊断中应用最普遍的检查手段。

1. 常规透视和摄影 其基本原理是,由于体内不同组织或脏器对 X 射线的吸收本领不同,因此强度均匀的 X 射线透过人体不同部位后的强度是不相同的,将透过人体后的 X 射线投射到荧光屏上,就可以显示出明暗不同的荧光像。这种方法叫作 X 射线透视术(X-ray fluoroscopy)。如果让透过人体的 X 射线投射到照相胶片上,显像后就可可在照片上观察到组织或脏器的影像,该技术叫作 X 射线摄影(roentgenography)。X 射线透视或摄影可以清楚地观察到骨折的程度、肺结核病灶、体内肿瘤的位置和大小、脏器形状以及断定体内异物的位置等。若延长 X 射线透视时间,还可以观察脏器的运动情况。X 射线摄影的位置分辨能力和对比度分辨能力都较好,照片可以永久保存。X 射线透视时,荧光屏上的影像也可以用胶片记录下来,以供保存和长时间观察,但分辨能力不及直接摄影,这种方法主要用于普查。在 X 射线摄影时,由于 X 射线的贯穿本领大,致使胶片上乳胶吸收的射线量不足。如果在底片前后各放置一个紧贴着的荧光屏,就可以使摄影胶片上的感光量增加很多倍,这个屏称为增感屏。使用增感屏摄影时可以降低 X 射线的强度或缩短摄影时间,从而减少患者所接受的照射量。此外还可使用影像增强管提高影像亮度以及实现数字 X 射线摄影。

在对软组织摄影时,不能使用硬 X 射线。因为软组织对硬 X 射线的能量吸收较少,X 射线几乎可以全部透过,无法达到分辨不同组织的目的,因此采用较软的 X 射线以增大软组织之间的影像反差。目前低电压(约 25kV)的钨靶 X 射线管专供软组织特别是乳腺摄影之用,取得了较好的结果,为乳腺的良性病变和乳腺癌的早期诊断及普查提供了有力的工具。

人体某些脏器或病灶对 X 射线的吸收本领与周围组织相差很少,在荧光屏或照片上不能显示出来。一种解决的办法就是给这些脏器或组织注入衰减系数较大或较小的物质来增加它和周围组织的对比,这些物质称为造影剂(contrast medium)。例如在检查消化道时,让受检者吞服吸收系数很高的“钡盐”(即硫酸钡),使它陆续通过食管和胃肠,并同时进行 X 射



线透视或摄影,就可以把这些脏器显示出来。在做关节检查时,可以在关节腔内注入密度很小的空气,然后用 X 射线透视或摄影,从而显示出关节周围的结构。类似的方法也可以用来观察大脑和心脏。

2. 数字减影血管造影(digital subtraction angiography, DSA) 其基本原理是,把穿过人体的 X 射线影像通过影像增强器转变为光学图像,然后经摄像管变成视频信号,把视频信号进行模数(analog/digital, A/D)转换后,就可获得一幅图像的数字信号,并暂时存入图像存储器。把未注入造影剂时获得的影像称为“原像”或“本底图像”,而将血管内注入造影剂后的图像称为“造影像”,这两种图像分别以数字形式存在两个图像存储器内。通过图像处理器将代表“原像”和“造影像”的数字相减,即从造影像中减去原像,使充盈造影剂的血管图像保留下来,而骨髓等无关组织的影像则被减影除去。保留下来的血管图像信号再经过放大处理使对比度提高,然后经数模(digital/analog, D/A)转换器恢复为视频信号,输入监视器的阴极或栅极,就可得到实时血管图像。DSA 是一种理想的非损伤性血管造影检查技术,它取代了危险性较大的动脉造影检查。DSA 不仅用于血管疾病的诊断,如观察血管梗阻、狭窄、畸形及血管瘤等,而且还可为血管内插管进行导向,从而施行一些“手术”和简易治疗,如吸液、引流、活检和化疗或阻断肿瘤血供等。

3. 同步辐射双色数字减影术 常用的造影剂碘对 X 射线的吸收有一个 K 吸收边(33.16keV),在此能量处碘对 X 光子发生共振吸收,即吸收系数一下增加很多,而骨骼和肌肉没有这种现象。利用这个吸收边,在很短时间内用两种能量(波长)的同步辐射 X 射线进行两次造影,其中一次使用的光子能量略低于 K 吸收边,此时碘的吸收系数较小;另一次的光子能量略高于 K 吸收边,则吸收系数比前面大很多。两次探测到的图像信号经模数转换后输入计算机,数字相减后,可将肌肉和骨骼的影响几乎全部除去,剩下的基本上是碘吸收的贡献,从而获得清晰的血管影像。不同能量的 X 射线可看成有着不同的“颜色”,因此得名“同步辐射双色数字减影”。目前,该技术已用于心血管造影。

三、X-CT

X 射线计算机辅助断层扫描成像装置(X-ray computer aid transverse tomography),简称 X-CT。它通过 X 射线管环绕人体某一层面的扫描,利用探测器测得从各个方向透过该层面后的射线强度值,采用一定的数学方法经计算机求出该层面的衰减系数分布,再应用电子技术获得该层面的图像。下面仅简单介绍 X-CT 的基本原理、图像重建方法和扫描方式等。

1. X-CT 的基本原理 设用单色 X 射线通过密度均匀的介质,根据式(16-5)可得到射线强度与介质层厚度 x 的关系为

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I} \quad (16-11)$$

如果介质沿 X 线路径的密度不均匀,则可将整个介质分成若干个很小的体积元,其线度为 l ,每一个体积元可视为均匀介质,体积元中的 μ 值相同。该体积元称为体素(voxel),如图 16-9

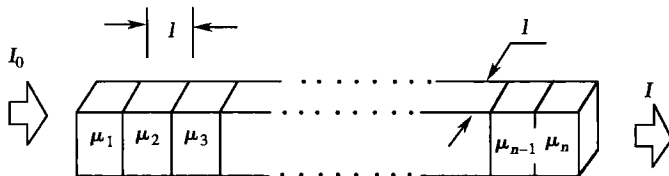


图 16-9 X 射线穿过 n 个厚度为 l 的体素的衰减



所示。对第一个体素有

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 l}$$

对第二个体素有

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 e^{-\mu_2 l} \\ &= (I_0 e^{-\mu_1 l}) e^{-\mu_2 l} \\ &= I_0 e^{-l(\mu_1 + \mu_2)} \end{aligned}$$

对第 n 个体素有

$$I_n = I_0 e^{-l(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n)}$$

I 值可以测量, I_0 和 l 值为已知, 则根据式(16-11), 可求出衰减系数之和为:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = \frac{1}{l} \ln \frac{I_0}{I}$$

或

$$\frac{1}{l} \ln \frac{I_0}{I} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (16-12)$$

上式是 X-CT 建立层面图像的主要依据。

当穿透人体的 X 射线经组织吸收后, 透射部分的强度可用探测器接收, 其信号强弱决定于人体的组织密度。不同的信号强度反映不同组织的特性, 而不同组织对应不同的 μ 值, 于是 μ 值可作为一种成像参数。一幅 X-CT 图像, 实际反映的是层面体素关于 X 射线衰减系数 μ 的空间分布。如何求得层面中每一个体素的 μ 值, 是 X-CT 基本原理的关键所在。图 16-10 是把欲观测的层面分解成为 $n \times n$ 个体素的矩阵阵列, 每个体素的长度和宽度都用 l 表示, 并在层面所在的平面上建立直角坐标系 (x, y) , 则衰减系数可用 $\mu(x, y)$ 进行描述。

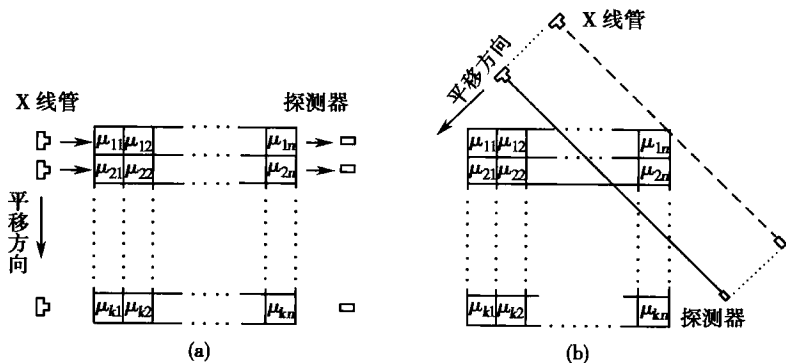


图 16-10 层面矩阵扫描示意图

当 X 射线束平行于 x 轴穿透第 1 排体素时, 透射强度 I_1 与该射线路径上各体素的衰减系数的总和有关。常把某方向各体素衰减系数的总和, 称为投影值, 用 p 表示。如果这些体素的 μ 值各不相同, 那么仅从 I_1 的测量结果, 显然不可能计算出各个体素的 μ 值。同样, 当射线束顺序穿透第 2、3、 \dots 、 n 排时, 从测得的 I_2 、 I_3 、 \dots 、 I_n 也不可能算出各排中每个体素的 μ 值。但根据 I_1 、 I_2 、 \dots 到 I_n 的这组数据可得到该特定方向的强度分布图或相应投影值 $(p_1$ 、 p_2 、 \dots 、 $p_n)$ 分布图。如果此时 X 射线源和探测器绕坐标原点(一般取层面的几何中心), 一起转动一个很小的角度 φ , 则可获得第二个特定方向下的投影值分布图。继续改变角度 φ , 每改变一个角度记录下该方向的投影值分布图, 直到记录足够多的投影值分布图(或数据), 使各体素 μ 值所组成的方程式的个数, 符合重建图像的需要为止。

假如层面所在的坐标系 (x, y) 固定, 然后在同一平面, 取相同原点的旋转坐标系 (r, s) , 如图(16-11)所示, 其中 φ 是 s 轴相对 y 轴的旋转角度。若使 s 轴与射线方向平行, 则 r 为原



点到射线路径的垂直距离, s 为沿射线路径上某点至 r 轴的垂直距离, 于是投影值分布图 $p(r, \varphi)$ 就代表角度为 φ 的特定方向下的一系列投影值(p_1 至 p_n), 并可由衰减系数的分布函数 $\mu(x, y)$ 的线积分表示

$$p(r, \varphi) = \int_{r, \varphi} \mu(x, y) ds \quad (16-13)$$

上式说明层面中每个体素的 μ 值, 可以通过测量 $p(r, \varphi)$ 求得。故重建图像的关键是从多个方向测量投影值 $p(r, \varphi)$, 最后求出层面上所有体素的衰减系数 $\mu(x, y)$ 。

2. 图像重建的基本方法 图像重建的数学方法主要有: 联立方程法、反投影法、滤波反投影法、二维傅里叶变换法、卷积反投影法及迭代法等。下面仅介绍两种求解衰减系数的方法, 作为理解复杂的重建图像原理的基础。

(1) 联立方程法: 图 16-12(a) 是一个 2×2 矩阵的简单层面。设体素的衰减系数分别为 μ_{11} 、 μ_{12} 、 μ_{21} 和 μ_{22} 。由水平方向的两射线路径得出投影值 $p_1 = \mu_{11} + \mu_{12} = 8$ 、 $p_2 = \mu_{21} + \mu_{22} = 9$; 垂直方向得到 $p_1 = \mu_{11} + \mu_{21} = 10$ 、 $p_2 = \mu_{12} + \mu_{22} = 7$, 虽然可列出 4 个方程式, 但其中仅有 3 个方程是独立的, 无法求得层面各个体素的衰减系数。因此, 通常列出的方程数需多于 n^2 个, n 为方阵的阶数。例如, 再取一个左对角线方向的投影值, 得 $p = \mu_{11} + \mu_{22} = 5$ 。解上述方程, 得 $\mu_{11} = 3$ 、 $\mu_{12} = 5$ 、 $\mu_{21} = 7$ 和 $\mu_{22} = 2$, 见图 16-12(b)。实际上一个层面的体素对应于荧光屏上图像的像素矩阵远不止 2×2 , 常采用的有 256×256 、 512×512 等矩阵。对于 256×256 矩阵来说, 用此法就得求解多于 65 536 个方程联立的 65 536 个未知数, 运算量甚大, 因而需要使用高速计算机才能完成。

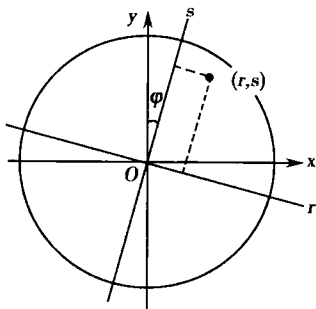


图 16-11 层面体素空间定位的一种坐标系

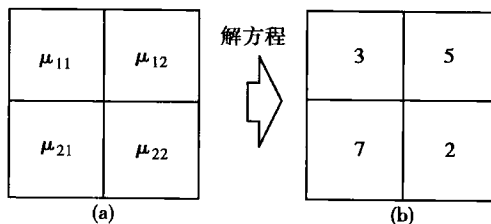


图 16-12 一个 2×2 矩阵的简单层面

(2) 反投影法: 此法是把各向投影值沿投影反方向投影回矩阵里, 然后把它们累加起来, 经数学方法处理后, 得到重建一幅图像的 μ 值矩阵。为了理解这种建像方法, 我们仍用图 16-12(a) 2×2 矩阵的特例加以说明, 如图 16-13(a)。开始时体素的 μ 值为未知, 水平方向的投影值为 $p_1 = 8$ 、 $p_2 = 9$, 反投影法将这些数值放入两射线所穿过的体素格内。假如第二个方向与水平方向成 45° , 如图 16-13(b), 此时的投影值为 $p_1 = 5$ 、 $p_2 = 5$ 、 $p_3 = 7$, 并将这些数值叠加到对应的体素格内。第三个方向是垂直投影, 其投影值 $p_1 = 10$ 、 $p_2 = 7$, 将这些数值反投影叠加后, 得到一个新的总数, 见图 16-13(c)。第四个方向的投影如图 16-13(d), 其投影值为 $p_1 = 3$ 、 $p_2 = 12$ 、 $p_3 = 2$, 将这些数值加到体素格内而得到最终的总数为 26、32、38 和 23。为了提高图像的对比度, 需将这些数作最后处理, 即把每个体素格内的数减去一个底数 17, 并除以 3, 使各体素降低到一个最简单的比例, 结果是 3、5、7 和 2。由此法得到的结果与联立方程法得到的一样。

3. X-CT 扫描机 X-CT 扫描机主要是由 X 射线管与探测器组成的扫描系统。在 X-CT



机近四十年发展历程中,出现了多种形式的扫描机,按探测器的排列和移动方式的不同大致可分为七种类型。其中第一代至第六代已被逐年淘汰,目前占领医疗市场的是多排螺旋 CT 扫描机。

(1) 单束扫描(称第一代 CT 机):它是由一个 X 射线管和一个探测器组成的扫描系统,射线束经准直器对准探测器,扫描时由 X 射线管和探测器对观测层面作第一次平移扫描,如图 16-14 所示,得到一组(例如 160 个)投影值。然后围绕层面,整个扫描系统旋转 1° ,作第二次平移扫描,获得另一组投影值。再转动 1° ,作第三次平移扫描。直到旋转 180° ,总共取得 $180 \times 160 = 28\,800$ 个投影值。第一代 CT 机采用单束扫描,图像矩阵取 $160 \times 160 = 25\,600$,显然用 28 800 个方程求解 25 600 个未知数是足够了。这种扫描运动是平移加旋转,单帧影像扫描时间需 5 分钟,时间较长,仅能用于头部检查。

(2) 窄角扇束扫描(称第二代 CT 机):为减少扫描时间,提高成像速度,初时将 X 射线束准直成几个笔状束,分别对准几个探测器。不过,随着探测器的增多而难以一一对准,于是采用扇形线束,其张角有 10° 、 15° 等,分别对准 20 个探测器,见图 16-15。扫描动作与单束扫描方式相同,该扫描方式可缩短平移路程,减少旋转角度。用这种方法作全身扫描,单帧影像需时 20 秒,但对腹部扫描仍嫌太长。

(3) 广角扇束扫描(称第三代 CT 机):窄束扫描仍需平移和旋转运动,限制了扫描速度的提高。第三代 CT 机采用广角扇形 X 射线束,其张角可达 $30^\circ \sim 45^\circ$,如图 16-16 所示,探测器多达 300~450 个。这种扫描方式取消了平移运动,X 射线管和探测器组作为一个整体,只绕病人作旋转运动,从而进一步缩短扫描时间,单帧影像可缩短到 2 秒,是目前 X-CT 机采用的主要扫描方式。

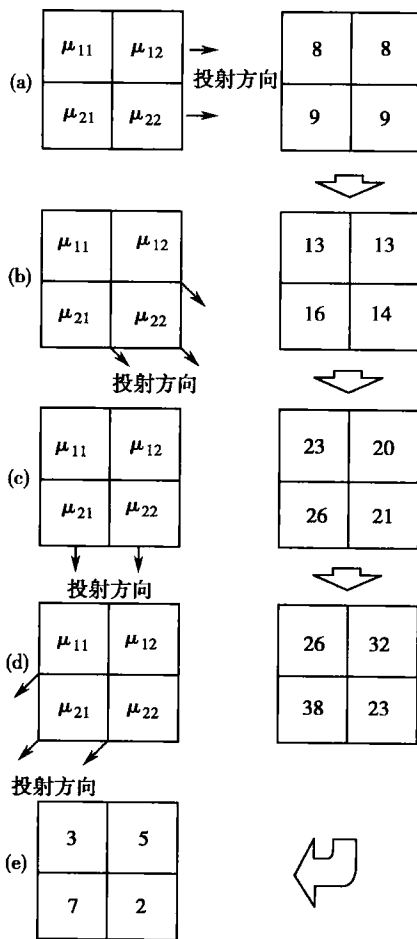


图 16-13 2×2 矩阵反射投影法求解

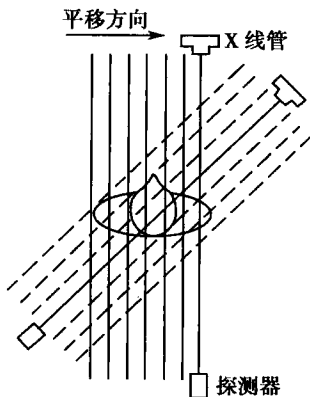


图 16-14 平移和转动扫描程序

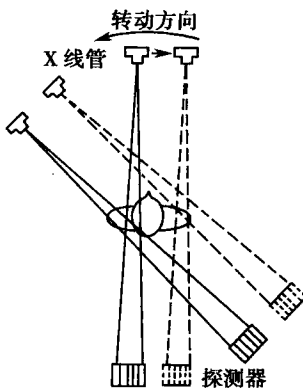


图 16-15 窄束扇形扫描

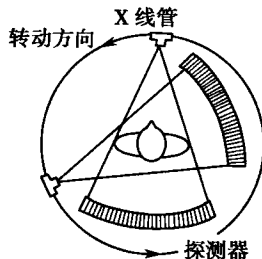


图 16-16 广角扇形扫描



(4) 固定-旋转广角扇束扫描(称为第四代 CT 机):这种扫描机把探测器的数量增加到 1500 个左右,扫描时探测器固定不动,X 射线管可以更高的速度进行扫描。单帧扫描时间可缩短到 2 秒以内。

(5) 动态空间扫描(称第五代 CT 机):扫描装置由排成半圆形的 28 个 X 射线管和与之相对应的 28 个影像增强器组成,是一种取消机械运动的全电子控制的扫描系统,称为动态空间重现技术(dynamic spatial reconstruction, DSR)。该装置能获得心脏和肺等动态的图像。

(6) 电子束扫描(称第六代 CT 机):在一个巨大钟形 X 射线管内,顶端电子枪发射的电子束经两次磁偏转,撞击在钟形边沿的圆形靶上,电子束以高速进行 360°旋转扫描,从圆形靶的不同位置发射出旋转的扇形 X 射线束,并采用静止排列的探测器阵列收集扫描数据。

(7) 多排螺旋扫描:该扫描技术取代了以上所有扫描机。但就其扫描方式而言,它仍属第三代。因采用滑环技术解决了高压电缆随 X 射线管连续旋转而缠绕的问题,使扫描速度大大提高。传统方式扫描时,X 射线管围绕人体作往返圆周运动。螺旋方式扫描时,是在床面(人体)匀速运动的同时,球管绕人体连续旋转,球管相对人体而言经历一螺旋形路径,故称螺旋扫描(helical scan)。多排螺旋扫描 CT 有多排探测器,扫描过程中探测器可连续采集数据,一次螺旋扫描可获得几十个层面的图像数据,使检查时间大大缩短。目前使用的有 4 排、8 排、16 排、64 排螺旋 CT。

4. CT 值和窗口技术

(1) 像素的 CT 值:一幅 X-CT 图像是由一定数量的由黑到白不同灰度的小方块,按矩阵排列方式组成的,这些小方块称为像素(pixel),其灰度与观测层面相对应体素的衰减系数大小有关。但在图像重建过程中,并不直接运用衰减系数来进行处理,而是用与此有关、且能表达组织密度的合适数值来反映,这一数值叫像素的 CT 值。实际上,它是将待检体的衰减系数 $\mu_{\text{待}}$ 与水的衰减系数 $\mu_{\text{水}}$ 作为比值计算,并以骨和空气的衰减系数分别作为上下限进行分度。CT 值的计算公式

$$\text{CT 值} = K \left(\frac{\mu_{\text{待}} - \mu_{\text{水}}}{\mu_{\text{水}}} \right) \quad (16-14)$$

式中 K 在多数 CT 机中规定为 1000,单位是 Hu(hounsfield)。我们知道,水的衰减系数 $\mu_{\text{水}} = 1$,空气的衰减系数 $\mu_{\text{气}} \approx 0.0013$,骨的衰减系数 $\mu_{\text{骨}} = 2.0$,从式(16-14)可计算出水的 CT 值 = 0Hu。空气的 CT 值 = -1000Hu,而骨的 CT 值 = 1000Hu,其他人体组织的 CT 值介于 -1000Hu ~ 1000Hu。衰减系数大于水的物质 CT 值为正,小于水的物质 CT 值为负。

(2) 窗口技术:人体组织的 CT 值范围大致可分成 2000 个等级,但人眼无论如何也分辨不出如此微小的灰度差别。所以一般黑白显像管(cathode-ray tube, CRT),由黑到白分为 10 至 30 个灰度等级或灰阶,已能满足人眼对灰阶的分辨能力。设荧光屏上的图像是由 10 个灰度来反映 2000 个分度,则图像能被分辨的 CT 值是 200Hu,即两组织的 CT 值相差 200Hu 以下时,就不可能加以分辨。为了提高图像的分辨率,在 CT 成像中,常把感兴趣部位的对比度增强,无关紧要部位的对比度压缩,使 CT 值差别小的组织能得到分辨,这一工作称为窗口技术,即把某一段 CT 值扩大到整个 CRT 的灰度等级。常用窗宽(window width)表示 CRT 所显示的 CT 值范围;用窗位(window level)表示 CRT 所显示的中心 CT 值位置。窗宽的上限和下限所包含的范围叫窗口(window)。依窗口的设置,组织的 CT 值比设置的窗口上限高的在图像显示中为白色,比窗口下限低的为黑色,介于窗口上下之间的组织就形成灰度不同的图像。例如图 16-17(a)中,图面的像素每相差 200 个 CT 值为一个灰度等级,图像中病变细节难以分辨。但如所检查部位组织的 CT 值在 -200Hu ~ 300Hu,窗口的上限为 300Hu,下限为 -200Hu,则 -200Hu 至 300Hu 叫窗口,此时窗宽为 500Hu,



窗位选定在 50Hu。这样被检查部位每 50 个 CT 值表示一个灰度等级,见图 16-17(b)。若图面仍不能判断病变细节,可改变窗位和进一步压缩窗宽。如图 16-17(c),其窗位为 100Hu,窗宽为 200Hu,窗口上限为 200Hu,下限为零,即每一个灰度等级相当于 20 个 CT 值。从上面的例子说明图像可分辨的细节与窗口上、下限差值有关,大窗口图像可分辨的细节少,但图面的可见度具有较宽的 CT 值范围。而小窗口可提高图像的分辨率,突出难以分辨的病变细节,提高病变的确诊率。可见正确运用窗口技术在观察 CT 图像和拍摄 CT 照片时是非常重要的。

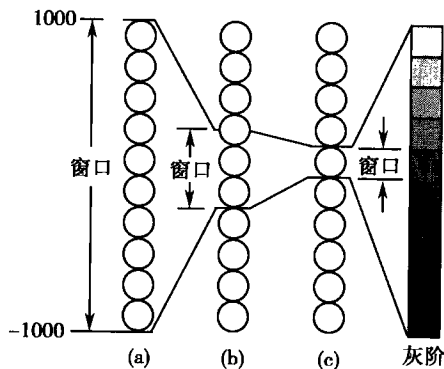


图 16-17 窗口技术示意图

(3) 图像显示:当 X 射线管与探测器作同步平移和旋转或只作旋转进行扫描时,可得到被观测层面的一系列投影值信号,经模-数转换成数字信号后,输入计算机中央处理系统(central process unit,CPU),它按照一定的图像重建方法,经快速运算得到层面各体素 μ 的相对值,这些原始数据再由计算机按层面体素矩阵与 CRT 像素矩阵一一对应进行排列组合及数学处理,得出可在荧光屏上显示图像的数据,可存入磁盘,然后经数-模转换成模拟信号,加在电视显像管的控制栅极(或阴极)上,依 CPU 的指令,由电视扫描系统把观测层面的图像显示在荧光屏上。若利用各个层面的图像数据及三维成像软件还可显示脏器的立体影像。

X-CT 从根本上解决了常规摄影、透视及体层摄影中存在的影像重叠问题,医生可看到人体各种器官和骨骼的断层影像及形态,并能分辨出密度相差很小的组织,从而判断病变的部位、形态和性质。为了使病变和正常组织的密度吸收区别更明显,可使用造影剂(碘类化合物)进行增强扫描。目前使用的多排螺旋 X-CT 机几乎能诊断人体各个部位的疾病,尤其对识别良性或恶性肿瘤,具有较高的诊断价值。X-CT 是临床诊断的重要设备之一。

思考题与习题十六

- 16-1 什么是 X 射线的强度? 什么是 X 射线的硬度? 如何调节?
- 16-2 什么是韧致辐射? 连续 X 射线谱中的最短波长是如何产生的?
- 16-3 标识 X 射线是如何产生的? 它与光学光谱的产生有何不同?
- 16-4 X 射线有哪些基本性质? 这些基本性质在 X 射线的应用上各有何意义?
- 16-5 一连续工作的 X 射线管,工作电压是 250kV,电流是 40mA,假定产生 X 射线的效率是 0.7%,问靶上每分钟会产生多少热量? (595.8kJ)
- 16-6 设 X 射线机的管电压为 80kV,计算光子的最大能量和 X 射线的最短波长。 ($1.28 \times 10^{-14} \text{J}$, 0.0155nm)
- 16-7 一束单色 X 射线,入射至晶面间距为 0.281nm 的单晶体氯化钠的天然晶面上,当掠射角一直减少到 4.1° 时才观察到布喇格反射,试确定该 X 射线的波长。 (0.04nm)
- 16-8 设密度为 3g/cm^3 的物质对于某单色 X 射线束的质量衰减系数为 $0.03\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$,求该射线束分别穿过厚度为 1mm、5mm 和 1cm 的吸收层后的强度为原来强度的百分数。 (99.1%, 95.6%, 91.4%)
- 16-9 对波长为 0.154nm 的 X 射线,铝的衰减系数为 132cm^{-1} ,铅的衰减系数为 2610cm^{-1} 。要和 1mm 厚的铅层得到相同的防护效果,铝板的厚度应为多大? (19.8mm)



16-10 一厚为 $2 \times 10^{-3} \text{m}$ 的铜片能使单色 X 射线的强度减弱至原来的 $1/5$, 试求铜的线性衰减系数和半价层。
(8.05cm^{-1} ; 0.086cm)

16-11 X-CT 与常规 X 射线摄影的成像方法有何不同?

16-12 设有一个 2×2 图像矩阵, 其中像素的 CT 值为 5、7、6、2, 试用反投影法重建该图像矩阵。

16-13 某波长的 X 射线通过水时的衰减系数为 0.77cm^{-1} , 通过某人体组织时的衰减系数为 1.02cm^{-1} , K 值为 1000, 水的 CT 值等于零。求此人体组织的 CT 值。

(324.5Hu)

16-14 什么叫窗宽? 若窗宽为 400Hu 和 800Hu, 则图像矩阵中像素可识别的灰度差所对应的 CT 值分别是多少? 设黑白显示器荧光屏的灰度可分为 16 个等级。

(25Hu, 50Hu)

16-15 什么叫窗位? 若窗宽为 500Hu, 窗口上限为 400Hu, 则窗位为多少? 可观测的 CT 值范围是多少?

(150Hu, $-100 \sim 400 \text{Hu}$)

(冀 敏)

第十七章 原子核和放射性

学习要求:

1. 了解原子核的基本性质和原子核的衰变类型。
2. 掌握原子核的衰变规律和应用。
3. 理解射线与物质相互作用的几种形式。
4. 理解射线剂量的定义及射线的防护方法。
5. 了解放射性核素在医学上的应用。

卢瑟福 (Rutherford) 在 1911 年提出了原子的核式模型, 即原子由处于原子中心的原子核 (atomic nucleus) 和绕核运动的电子组成。在此之前, 法国科学家贝可勒尔 (Becquerel) 在 1901 年发现了从铀原子中发射出的高速电子流 (β 射线), 其能量的要求表明这些电子来自原子核深处。原子核的放射性是不能把原子核作为不可分割的基本粒子的决定性证据。

第一节 原子核的基本性质

一、原子核的组成、质量和大小

一切原子都是由原子核和电子组成的, 原子核又由质子 (proton) 和中子 (neutron) 组成。中子不带电, 质子带正电, 其电量与电子电量的绝对值相等。由于一切原子都是电中性的, 因此, 原子核中包含的质子数等于核外电子数, 即原子序数 Z 。质子和中子统称核子 (nucleon)。原子核的质量数 A 就是核子的总数, 若以 N 表示中子数, 则 $A = Z + N$ 。原子核的质量常用原子质量单位 (atomic mass unit) u 来表示, 规定自然界中碳最丰富的同位素 $^{12}_6\text{C}$ 原子质量的 $1/12$ 为原子质量单位:

$$1u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C}) = 1.660540 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$$

质子和中子的质量相差很小, 它们分别为: $m_n = 1.008665u$, $m_p = 1.007276u$ 。用原子质量单位来量度原子核时, 其质量的数值都接近于某一整数。即对质量数为 A 的原子核, 在一些近似计算中可以用 Au 代替原子核的质量。

一类具有确定质子数、核子数和能量状态的中性原子称为核素 (nuclide)。核素可以用符号 ^A_ZX 表示, 其中 Z 为原子序数, 即质子数; A 为原子质量数, 即核子数。由于 X 已经反映了质子数 Z , 只要简写为 ^AX 就足以代表一个特定的核素。质子数不同的不同核素 (它们的中子数不同) 在周期表中处于同一位置上, 称为同位素 (isotope)。例如氢原子的三种同位素: ^1_1H 、 ^2_1H (氘)、 ^3_1H (氚)。同位素的化学性质基本相同, 但物理性质可能有很大不同。具有相同中子数, 不同质子数的一类核素称为同中子异位素 (isotone), 如 $^{36}_{16}\text{S}$ 、 $^{38}_{18}\text{Ar}$ 和 $^{40}_{20}\text{Ca}$ 。质量数相同, 质子数不同的一类核素称为同量异位素 (isobar), 如 $^{40}_{18}\text{Ar}$ 、 $^{40}_{19}\text{K}$ 和 $^{40}_{20}\text{Ca}$ 。原子核与原子一样具有分立的能级, 原子核可以处在不同的能量状态, 在一定条件下, 可以在不同能级之间跃迁。质量数和质子数均相同而处于不同能量状态的一类核素, 称为同核异能素 (isomer)。在质量数后面加写“m”表示这种核素的能量状态比较高, 如 $^{99m}_{43}\text{Tc}$ 的能量状态比 $^{99}_{43}\text{Tc}$ 高。



某一核素的各种同位素在自然界中有不同的含量,例如天然存在的氢中 ^1H 占 99.985%, ^2H 占 0.0148%。同位素在自然界中的含量百分比称为同位素丰度(isotope abundance)。

根据 α 粒子散射实验可知原子核的半径 R 约为 $10^{-15} \sim 10^{-14} \text{ m}$ 数量级,它与质量数 A 有关,可用如下经验公式表示:

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (17-1)$$

式中 R_0 为常数,其值约等于 $1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。若把原子核看作球形,其平均核密度 ρ 为:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \approx \frac{Au}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3u}{4\pi R_0^3} \quad (17-2)$$

其中 M, V 分别为原子核的质量和体积; u 为原子质量单位。将 u 及 R_0 的数值代入式(17-2)得: $\rho \approx 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,它是水密度的 10^{14} 倍,是铁密度的 10^{13} 倍,可见原子核密度是非常高的。

二、原子核的自旋和磁矩

实验表明原子核具有角动量,它是原子核的一个重要特征。原子核的角动量习惯上称为核自旋(nuclear spin)。原子核之所以具有核自旋,一是由于组成原子核的质子和中子都具有自旋运动;二是核子在原子核内又有复杂的相对运动,产生相应的轨道角动量。因此核自旋是所有核子的自旋角动量与轨道角动量的矢量和。根据量子力学理论,原子核角动量矢量的大小为

$$P_I = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (17-3)$$

式中 $\hbar = h/2\pi$, I 为核自旋量子数,它可以取整数或半整数,如 $0, 1, 2, \dots$ 或 $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ 。

原子核角动量在空间某一选定方向(例如 z 轴方向)上的投影也是量子化的

$$P_I = m_I \hbar \quad (17-4)$$

m_I 是核自旋磁量子数。对于某一确定的 I 值, m_I 可以取 $I, I-1, I-2, \dots, -I+1, -I$, 共 $2I+1$ 个值。

实验发现处于基态时,所有核子数为奇数的原子核,核自旋量子数 I 为半整数;所有质子数和中子数都为偶数的原子核(偶偶核), I 为零;所有质子数和中子数都为奇数的原子核(奇奇核), I 为整数。而激发态原子核的自旋不一定等于基态的自旋。

原子核是一个带电体系,同时具有角动量,因此原子核也具有核磁矩(nuclear magnetic moment)。核磁矩来自两个方面:与核内各核子的自旋运动相联系的本征磁矩(固有磁矩)和与核内各核子的轨道运动相联系的轨道磁矩。但是,核磁矩并不等于各核子磁矩的简单相加。类似于原子磁矩,核磁矩矢量与核角动量矢量成正比

$$\mu_I = g \frac{e}{2m_p} P_I \quad (17-5)$$

式中 m_p 为质子质量; g 称为朗德因子(Landeg factor),或称原子核的 g 因子(g -factor),不同核有不同的 g 因子。核磁矩在 z 轴方向上的投影为

$$\mu_k = g \frac{e}{2m_p} P_k = g \frac{e}{2m_p} m_I \hbar = g m_I \mu_N \quad (17-6)$$

其中

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.0508 \times 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \quad (17-7)$$

称为核磁子(nuclear magneton),是核磁矩的单位。由于核自旋是量子化的,因此 μ_k 也是量子化的,共有 $2I+1$ 的取值。一般定义核磁矩的大小为 m_I 取 I 时的 μ_k 值,即为 $g\mu_N I$ 。式(17-6)表明一切 $I \neq 0$ 的原子核都具有磁矩。



组成原子核的质子和中子也具有自旋和磁矩。实验测得,质子和中子的核磁矩分别为 $2.793\mu_N$ 及 $-1.913\mu_N$ 。这表明质子和中子存在内部结构,中子虽然整体上是电中性的,但其内部具有一定的电荷分布。

三、原子核的结合能及质量亏损

实验发现,任何一个原子核的质量,总是小于组成该原子核的核子的质量和。例如氢的同位素氘 ^2_1H 由一个质子和一个中子组成,质子和中子的质量和为

$$m_p + m_n = 1.007276\text{u} + 1.008665\text{u} = 2.015941\text{u}$$

而实验测得核 ^2_1H 的质量为: $m_d = 2.013552\text{u}$ 。两者的差值

$$\Delta m = m_p + m_n - m_d = 2.015941\text{u} - 2.013552\text{u} = 0.002389\text{u}$$

称为质量亏损(mass defect)。研究发现,当一个中子与一个质子结合成氘核时,将释放能量为 $\Delta E = 2.225\text{MeV}$ 的光子,根据相对论的质能关系,上述光子的质量为

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 3.9665 \times 10^{-30}\text{kg} = 0.002389\text{u}$$

恰好等于质量亏损,即质量亏损是由于在质子和中子结合成氘核时释放的光子带走了相应的能量。实际上质子与中子结合成其他原子核时,都要以释放光子的形式带走能量。自由核子结合成原子核时释放的能量称为原子核的结合能(binding energy)。要使原子核分裂为自由的质子和中子时,也必须吸收与结合能同样大小的能量。

任意一个核素 ^A_ZX 的结合能 ΔE 定义为

$$\Delta E(^A_Z\text{X}) = [ZM(^1_1\text{H}) + (A-Z)M(^1_0\text{n}) - M(^A_Z\text{X})]c^2 \quad (17-8)$$

式中 $M(^1_1\text{H})$ 、 $M(^1_0\text{n})$ 及 $M(^A_Z\text{X})$ 分别表示氢原子、中子及 ^A_ZX 原子的质量。虽然用氢原子质量代替质子质量,多了 Z 个电子质量,但 $M(^A_Z\text{X})$ 也是原子质量,其中也包含了 Z 个电子质量,其差值正好消去了电子的质量。式(17-8)右端方括号中的量就是 Z 个质子、 $(A-Z)$ 个中子形成 ^A_ZX 核时的质量亏损 Δm ,这部分质量是随着光子的释放而离开原子核的。把原子核的结合能 ΔE 除以该核的核子数 A 就得到核的比结合能(specific binding energy) ϵ 。

$$\epsilon = \Delta E/A \quad (17-9)$$

比结合能的物理意义是:若把一个核子放入原子核里,则平均释放能量 ϵ 。反之若从核内取出一个核子,则需要克服原子核对核子的引力平均做功 ϵ 。因此, ϵ 越大,表示核子间结合得越紧密, ϵ 的大小可以作为核稳定性的量度。

自然界中各种核的结合能相差甚大,但比结合能却相差不大。图 17-1 给出了不同原子核的比结合能曲线。从图中可见,比结合能曲线两头低,中间高。当 $A < 30$ 时,比结合能表现出周期性的变化。凡 A 等于 4 的倍数的核, ϵ 有极大值。这表明 4 个核子组成的 α 粒子构成一个稳定的集体。 A 大于 30 的核,比结合能变化不大,这时结合能 ΔE 正比于核子数 A 。 A 在 40~120 之间时,比结合能最大,约为 8.6MeV 。轻核和重核的比结合能小于中等核的比结合能。当比结合能小的核变成比结合能大的核时,将释放出能量。这是采用重核裂变和轻核聚变两种途径获得原子能的依据。

从力的角度看,将质子和中子结合在一起形成原子核的力既不是电磁力,也不是万有引力,而是一种新的作用力。这种原子核内核子之间的作用力称为核力(nuclear force)。核力具有下列一些重要特征:核力是一种短程力,它只在距离为 10^{-15}m 的数量级内发生作用;核力是强相互作用,事实表明核力约比库仑力大 100 倍;核力具有饱和性,即每个核子只能与有限个数的相邻核子相互作用;核力与电荷无关,质子与质子、中子与中子、中子与质子之间的引力是相等的;核力在极短程($< 6 \times 10^{-16}\text{m}$)内存在斥心力,它使核子不能无限靠近。

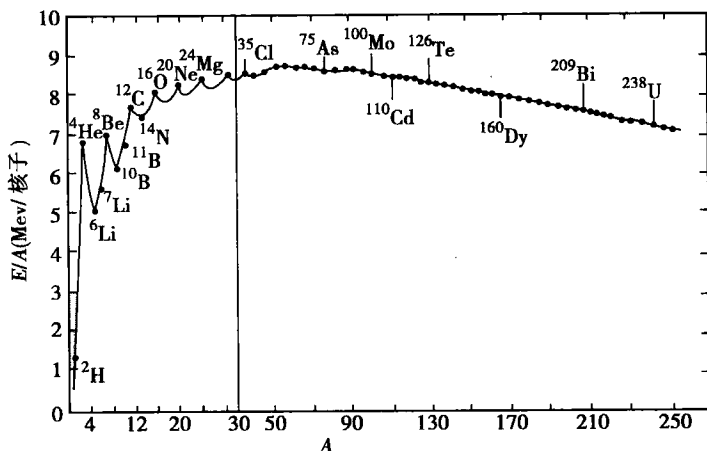


图 17-1 比结合能曲线

四、原子核的字称

宇称(parity)是用于描述微观粒子空间对称性的量子数,此量子数是表征微观粒子运动特性的一个物理量。通常用波函数在空间坐标反演(改变坐标值符号)下的变换性质来表示。如果用波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 描写一个微观粒子(或其体系)的运动状态,那么在空间反演 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ 或 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ 作用下,波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 有两种情况:当 $\psi(\mathbf{r}) = +\psi(-\mathbf{r})$ 时,称粒子的运动状态具有偶宇称(或称其宇称为正);当 $\psi(\mathbf{r}) = -\psi(-\mathbf{r})$ 时,则称粒子的运动状态具有奇宇称(或称其宇称为负)。

宇称是原子核的一个重要特征,在一定状态下,原子核有确定不变的宇称。只有在核状态发生变化时,核的宇称才发生改变。通常原子核的宇称是用加在自旋数值右上角的“+”(偶宇称)或“-”(奇宇称)号来表示。例如 ^{57}Fe 基态自旋为 $1/2$,宇称为负,记为 $(1/2)^-$; ^4He 基态的自旋为 0 ,宇称为正,记为 0^+ 。

第二节 原子核的衰变类型

已经发现自然界中天然存在的核素有 340 多种。其中 280 多种是稳定核素(stable nuclide); 60 多种是不稳定的放射性核素(radioactive nuclide),它们会自发放出各种射线变成另一种核素。这种现象称为原子核的放射性衰变(radioactive decay),简称核衰变(decay)。除天然存在的核素外,自 1934 年以来通过人工方法又制造了 1600 多种放射性核素,一共有 2000 多种核素。放射性衰变最初是在自然界的重元素中发现的。1896 年贝克勒尔(Becquerel)发现了铀(U)的放射性,随后 1898 年居里夫妇(Pierre Curie and Marie Sklodowska Curie)发现了放射性更强的元素——钋(Po)和镭(Ra)。从此开始了对放射性的研究。放射性衰变一方面为我们提供了原子核内部运动的许多重要信息,另一方面,放射性又在工业、农业、医学、科学研究等各方面有着广泛的应用。

放射性核素的衰变类型主要有三种: α 衰变、 β 衰变和 γ 衰变。在核衰变过程中,电荷、质量、动量和核子数等物理量守恒。

一、 α 衰变

质量数 $A > 209$ 的放射性核素自发地放射出 α 射线而变成电荷数减少 2,核子数减少 4



的另一种核素的现象称为 α 衰变。所谓 α 射线是高速运动的氦核,也称 α 粒子。 α 衰变过程可写为:



式中 X 称母核, Y 称子核,衰变前后的核子数和电荷数守恒; Q 为衰变过程放出的能量(以 MeV 为单位),称为衰变能,它在数值上等于 α 粒子的动能与子核反冲动能之和。

实验发现,大部分核素放出的 α 粒子的能量并不是单一的,而是有几组不同的分立值。这表明原子核内部也有能级存在, α 粒子的能谱与子核或母核的能级结构有密切联系。例如镭 ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ 放射出 3 种能量的 α 粒子,通过实验可测得这 3 种 α 粒子的动能分别为 $E_{\alpha 1} = 4.784\text{MeV}$ 、 $E_{\alpha 2} = 4.598\text{MeV}$ 、 $E_{\alpha 3} = 4.34\text{MeV}$ 。其中最大动能 $E_{\alpha 1}$ 对应 ${}^{226}\text{Ra}$ 放出 α 粒子到达氡 ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ 的基态, $E_{\alpha 2}$ 和 $E_{\alpha 3}$ 分别对应 ${}^{226}\text{Ra}$ 到达氡 ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ 的第一激发态及第二激发态。由此可以确定 ${}^{222}\text{Rn}$ 的低激发态的能级结构,如图 17-2 所示。同时实验上也观察到从 ${}^{222}\text{Rn}$ 的第一激发态向基态跃迁时放出的能量为 0.186MeV 的 γ 射线,这与上述结果完全一致。

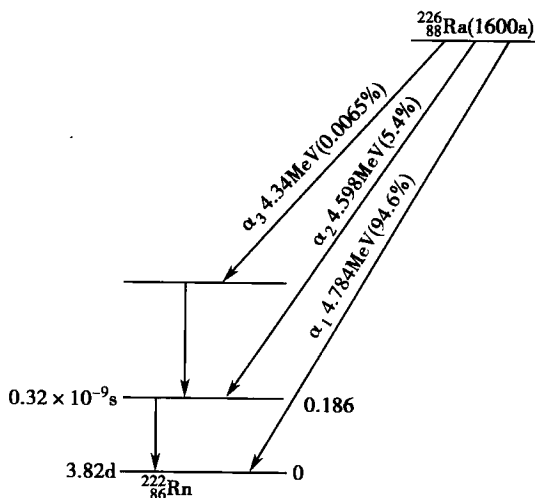


图 17-2 ${}^{226}\text{Ra}$ 的衰变纲图

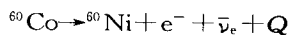
二、 β 衰变

放射性核素自发地放射出 β 射线(高速电子)或俘获轨道电子而变成另一个核素的现象称为 β 衰变。它主要包括 β^- 衰变、 β^+ 衰变和电子俘获(electron capture, EC)三种类型。

1. β^- 衰变 母核自发地放射出一个 β^- 粒子(普通电子 e^-)和一个反中微子 $\bar{\nu}_e$,而变成电荷数增加 1,核子数不变子核。 β^- 衰变可表示为



如吴健雄等人做的一个很有名的 β^- 衰变实验—— ${}^{60}\text{Co}$ 的衰变



这一实验证实了李政道和杨振宁弱相互作用中的宇称可能不守恒的论点。

2. β^+ 衰变 母核自发地放射出一个 β^+ 粒子(正电子 e^+)和一个中微子 ν_e ,而变成电荷数减少 1,核子数不变子核。 β^+ 衰变可表示为



3. 电子俘获 母核俘获一个核外轨道电子而变成电荷数减少 1,核子数不变子核,同时放出一个中微子 ν_e 。这个过程可表示为



一个内层电子被原子核俘获后,外层电子会立即填补这一空位,同时放出能量。这个能量可以以发射标识 X 射线(光子)的形式放出,也可以使另一外层电子电离成为自由电子。这种被电离出的电子称为俄歇电子(Auger electron)。

上述三种过程的共同特点是子核的核子数与母核相同,而电荷数则增加或减少 1,因而将它们统称为 β 衰变。由于在 β 衰变过程中有中微子参与,衰变所放出的能量将在电子、中微子和子核之间任意分配。因此 β 射线的能谱是连续的,即发出的电子的能量可以取从 0



到某一最大值 E_{\max} 之间的任何数值,如图 17-3 所示。为使 β 衰变前后电荷守恒、角动量守恒,中微子及反中微子的电荷必须为 0,自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$ 。而且它们的质量几乎为 0,同其他物质的相互作用非常微弱。由于中微子既不带电,又近乎无质量,直到中微子假设提出 26 年以后,才在 1956 年首次在实验室中直接观察到。同时,正像光子是在原子或原子核从一个激发态跃迁到另一个激发态或基态时产生的那样,电子和中微子也是在 β 衰变中产生的。例如, β^- 衰变是母核中的一个中子转变为一个质子、一个电子和一个反中微子的过程; β^+ 衰变是母核内一个质子转变为一个中子、一个正电子和一个中微子的过程;而电子俘获则是母核的一个质子俘获一个轨道电子后转变为一个中子和一个中微子的过程。

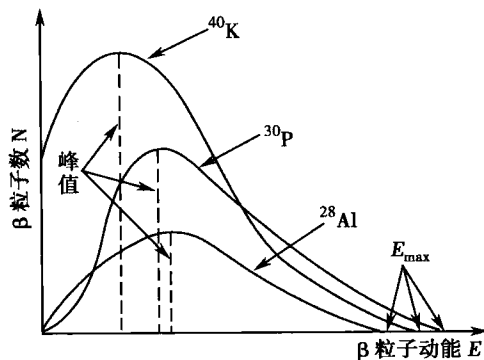


图 17-3 ^{40}K 、 ^{30}P 和 ^{28}Al 的 β 能谱图

三、 γ 衰变和内转换

处于激发态的原子核在不改变其组成的情况下,以放出 γ 射线(光子)的形式释放能量而跃迁到较低能级的现象称为 γ 衰变。 γ 衰变通常是伴随着 α 、 β 衰变发生的,由于 α 、 β 衰变的结果往往产生处于激发态的子核,它们的寿命一般极短,因而立即有 γ 衰变发生。 γ 衰变放出的光子能量为 MeV 的数量级。例如医学上治疗肿瘤常用 ^{60}Co 产生的 γ 射线,其衰变过程为: ^{60}Co 以 β^- 衰变到 ^{60}Ni 的 2.50MeV 激发态,它放出能量为 1.17MeV 的 γ 射线跃迁到 ^{60}Ni 1.33MeV 的较低激发态,再放出能量为 1.33MeV 的 γ 射线跃迁到基态。即每当有一个 ^{60}Co 原子核发生 β^- 衰变并放出一个 β^- 粒子时,立刻有两个 γ 光子伴随而生。 γ 衰变过程中除能量、角动量守恒外,还要求宇称守恒。

在某些情况下,原子核从激发态向较低能级跃迁时不一定放出 γ 光子,而是把这部分能量直接交给核外电子,使其脱离原子的束缚而成为自由电子,这称为内转换(internal conversion, IC),释放的电子称为内转换电子(internal conversion electron)。内转换电子的能谱是分立的,它与 β 衰变时电子的连续谱截然不同。一般重核低激发态发生跃迁时,发生内转换的概率比较大。内转换过程由于释放电子而在原子的内壳层出现空位,外层电子将会填充这个空位而发射标识 X 射线或俄歇电子。

原子核衰变常用衰变纲图(decay scheme)表示,如图 17-2 及 17-4 所示。按照惯例把 Z 小的核素画在左边, Z 大的画在右边。横线表示原子核的能级,对应每种核素的最低一条横线表示基态,在它上面的横线表示激发态。用箭头向右的斜线表示 β^- 衰变;用箭头向左的斜线表示 α 衰变、 β^+ 衰变或轨道电子俘获。斜线旁边标出衰变类型,所发射粒子的最大能量(一般以 MeV 为单位)和分支比(该衰变发生的概率,以百分数表示)等。两能级之间的垂线表示 γ 衰变,线旁的数字为放出的 γ 光子能量。每条能级右边标出的是该能级的能量(相对于基态而言,以 MeV 为单位),左边标出的是半衰期。利用衰变纲图可以计算一定量放射性核素的放射性大小。

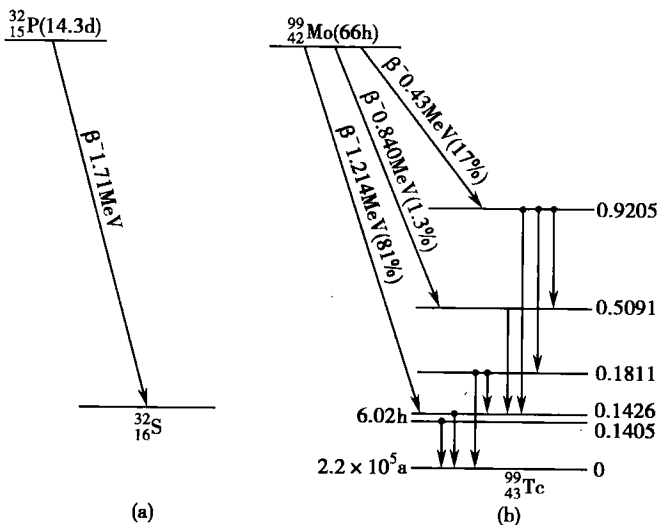


图 17-4

(a) $^{32}_{15}\text{P}$ 的衰变纲图 (b) $^{99}_{42}\text{Mo}$ 的衰变纲图

第三节 原子核的衰变规律

一、衰变规律

核衰变是原子核自发产生的变化,虽然我们无法知道某一个放射性核素何时发生衰变,但对由大量核素组成的放射性物质,其衰变服从统计规律。在 dt 时间内发生衰变的原子核数目 $-dN$ 一定正比于当时存在的原子核数目 N ,以及时间间隔 dt ,即

$$-dN = \lambda N dt \quad (17-14)$$

式中 λ 称为衰变常量(decay constant),表示 1 个原子核在单位时间内发生衰变的概率; $-dN$ 表示原子核的减少量。设 $t=0$ 时原子核的数目为 N_0 ,则对上式积分可得 t 时刻原子核数目 N 为

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (17-15)$$

这就是核衰变服从的指数规律,称为衰变定律。它只给出了原子核发生衰变的概率。

二、半衰期

原子核数目因衰变减少到原来的一半所需的时间,称为半衰期(half life)。将半衰期记作 T ,根据式(17-15)有

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

即

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (17-16)$$

T 与 λ 一样,是放射性核素的特征常数, λ 越大, T 越小。衰变定律式(17-15)也可用 T 表示为

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T} \quad (17-17)$$



例如, ^{11}C 的半衰期为20.4min,表示经过约20min, ^{11}C 原子核的数目就减少一半;再过20min又减少了一半,即剩下原来的1/4,而不是全部衰变完。

原子核衰变的快慢还可以用平均寿命(mean life)表示。由式(17-15)可知,在 $t \rightarrow t + dt$ 间隔内发生衰变的原子核数为 $-dN = \lambda N dt$,这些核的寿命为 t ,它们的总寿命为 $\lambda N t dt$ 。由于有的核在 $t \approx 0$ 时就衰变掉,有的要到 $t \rightarrow \infty$ 时才衰变掉。因此,核素的总寿命为

$$\int_0^{\infty} \lambda N t dt$$

于是,对任一核素的平均寿命为

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} \lambda N t dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} = 1.44T \quad (17-18)$$

即平均寿命是衰变常量的倒数,衰变常量越大,衰变越快,平均寿命也越短。

在核医学中,进入人体内的放射性核素除因自身衰变而减少外,还可以通过机体的代谢而排出体外。因此,生物机体内放射性核素数目的减少比单纯的核衰变要快。我们将由于各种排泄作用而使生物体内的放射性原子核数目减少一半所需的时间 T_b 称为生物半衰期(biological half life)。生物机体排出放射性核素的规律,也近似服从衰变定律式(17-15)。同样,生物衰变常量 λ_b (biological decay constant)与生物半衰期 T_b 也满足式(17-16)。

在生物机体内,放射性原子核数目由于自身衰变及排出体外而减少,它们的衰变常量分别为物理衰变常量 λ 与生物衰变常量 λ_b ,衰变定律可改写为

$$N = N_0 e^{-(\lambda + \lambda_b)t} = N_0 e^{-\lambda_e t} \quad (17-19)$$

其中 $\lambda_e = \lambda + \lambda_b$ 称为有效衰变常量(effective decay constant)。与 λ_e 对应的半衰期称为有效半衰期 T_e (effective half life),它表示生物机体内放射性原子核数目减少一半所需的时间。有效半衰期 T_e 、物理半衰期 T 和生物半衰期 T_b 之间的关系为

$$\frac{1}{T_e} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_b} \quad (17-20)$$

采用放射性物质做生物机体示踪剂时,有效半衰期是一个很重要的参数。

三、放射性活度

放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数称为该物质的放射性活度(activity),用 A 表示为

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \quad (17-21)$$

式中 A_0 是 $t=0$ 时的放射性活度。由式(17-21)可知,放射性活度服从指数规律,决定放射性强弱的既不是 λ ,也不是 N ,而是它们的乘积 A 。在国际单位制中, A 的单位是贝可(Becquerel, Bq), $1\text{Bq}=1$ 次核衰变 \cdot 秒 $^{-1}$ 。在此之前,放射性活度的单位是居里(Curie, Ci)。 $1\text{Ci}=3.7 \times 10^{10}\text{Bq}$ 。

[例 17-1] 设一台 ^{60}Co γ -刀初装时钴源活度为6040Ci,使用5年后,钴源活度还剩多少Bq? 其平均寿命为多少年?

解: ^{60}Co 的半衰期 $T=5.27\text{a}$,已知 $A_0=6040\text{Ci} \approx 224\text{TBq}$, $t=5\text{a}$,将以上数据代入式(17-21),得5年后钴源活度为

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = 224 \times \exp\left(-\frac{0.693}{5.27} \times 5\right) = 116(\text{TBq})$$

由式(17-18)可得 ^{60}Co 的平均寿命为

$$\tau = 1.44T = 7.6\text{a}$$

某种核素的放射源不可能全部由同种核素组成,而是与其稳定的同位素或其他物质混



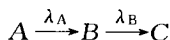
在一起。为了反映放射性物质的纯度,引入比活度(specific activity)的概念。它定义为单位质量放射源的放射性活度,比活度越大,该放射性物质的纯度越高。

四、放射性平衡

许多放射性核素并非一次衰变就达到稳定,而是由于其子核仍具有放射性而继续衰变下去,直到稳定核素而终止,这就是级联衰变(cascade decay)。

自然界中一些重的天然或人造放射性核素形成 4 个放射系,即存在 4 个级联衰变链。每个放射系都由一个半衰期最长的核素开始,这个起始的核素成为母体,其半衰期与地球年龄 $4.5 \times 10^9 \text{ a}$ 相近或更长,母体经过一系列的放射性衰变最后到达一个稳定的核素。这 4 个放射系是:钍系——从钍(^{232}Th , 半衰期 $1.4 \times 10^{10} \text{ a}$)开始经过 6 次 α 衰变和 4 次 β^- 衰变变到稳定核素 ^{208}Pb 。系中各放射性核素的质量数 A 都是 4 的倍数,即 $A=4n$ 。铀系——从铀(^{238}U , 半衰期 $4.47 \times 10^9 \text{ a}$)开始经过 8 次 α 衰变和 6 次 β^- 衰变变到稳定核素 ^{206}Pb 。系中各放射性核素的质量数 A 满足 $A=4n+2$ 。锕系——母体是铀的同位素 ^{235}U , 俗称锕铀(AcU), 半衰期为 $4.04 \times 10^8 \text{ a}$, 母体经过 7 次 α 衰变和 4 次 β^- 衰变变到稳定核素 ^{207}Pb 。系中各放射性核素的质量数 A 满足 $A=4n+3$ 。镎系——从钚(^{241}Pu)开始级联衰变到稳定核素 ^{209}Bi 。此系中镎(^{237}Np)的半衰期最长,为 $2.14 \times 10^6 \text{ a}$, 故此系以镎命名。但由于镎的半衰期比地球的年龄短得多,因此天然不存在镎系,该系是 1941 年人们在人造放射性核素中找到的。系中各放射性核素的质量数 A 满足 $A=4n+1$ 。

下面我们讨论级联衰变时母核与子核的衰变规律,考虑简单的级联衰变:



$t=0$ 时核素 A 的数目为 N_{A0} , 而核素 B, C 的数目均为 0, 即 $N_{B0}=N_{C0}=0$ 。在 $t \rightarrow t+dt$ 时间内,核素 A 衰变的数目为 $-dN_A(t)=\lambda_A N_A(t)dt$, 解出

$$N_A = N_{A0} e^{-\lambda_A t}$$

服从指数衰变规律式(17-15);对于核素 B , 既以 $\lambda_A N_A$ 的速度从 A 中产生, 又以 $\lambda_B N_B$ 的速度衰变为 C , 因此核素 B 在 $t \rightarrow t+dt$ 时间内的变化为

$$dN_B(t) = [\lambda_A N_A(t) - \lambda_B N_B(t)] dt \quad (17-22)$$

上式的解为

$$N_B = N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \quad (17-23)$$

由此可见,级联衰变只有母核是指数衰减;而子核的衰变规律不仅与自身的衰变常数 λ_B 有关,还与母核的衰变常数 λ_A 有关,衰变规律不是简单的指数规律。

例如在临床显像检查中最常用的放射性核素锝(^{99m}Tc)是由核素钼(^{99}Mo)衰变而来,衰变规律为



^{99m}Tc 衰变放出能量为 141 keV 的 γ 射线。由于它对病人的辐射损伤小,被广泛用于心、脑、肾、骨、肺、甲状腺等多种脏器疾患的检查,目前全世界应用的显像药物中, ^{99m}Tc 及其标记的化合物占 80% 以上。式(17-24)所示两次衰变的半衰期分别为 66.02 h 和 6.02 h , 即 $T_A > T_B$ (或 $\lambda_A < \lambda_B$), 这时式(17-23)可改写为

$$N_B = N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} [1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}] = N_A \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} [1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}]$$

随着 t 增加,母核越来越少,直到全部衰变为子核,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t} \ll 1$, 因此有

$$N_B \approx N_A \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}$$



即子核将按母核的衰变规律衰变。这时子核每秒衰变的原子核数目等于它从母核衰变而得到补充的数目,子核的数目不再增加,达到放射性平衡(radioactive equilibrium)。由于锝(^{99m}Tc)的半衰期很短(6.02h),从核反应堆或加速器中产生后运送到医院时,已经所剩无几。为便于 ^{99m}Tc 的运输和储存,可以将半衰期长得多的钼(^{99}Mo , 66.02h)与 ^{99m}Tc 放在一起,当母核(^{99}Mo)与子核(^{99m}Tc)达到或接近放射性平衡时,子核的放射性活度与母核近似相等达到最大值,这时利用化学方法可将 ^{99m}Tc 分离出来,如将 ^{99}Mo 吸附于 Al_2O_3 色层柱上,而衰变产生的 ^{99m}Tc 在 Al_2O_3 柱上吸附能力很弱,用生理盐水洗脱,即可得到 $^{99m}\text{TcO}_4^-$ 洗脱液。经过一段时间后,子核与母核又会达到新的放射性平衡,再将子核分离出来,又会再达到新的放射性平衡。利用放射性衰变可以像母牛挤乳一样不断得到 ^{99m}Tc ,故俗称 ^{99}Mo 为“母牛(cow)”。这种由长寿命核素不断获得短寿命核素的分离装置也称为核素发生器(isotope generator)。

[例 17-2] (1) 从式(17-23)出发,讨论当 $\lambda_A < \lambda_B$ 时,子核 $N_B(t)$ 何时达到最大值[假设 $N_B(0)=0$]? (2) 对钼锝母牛,一次洗脱后,再经过多少时间淋洗 ^{99m}Tc ,得到的子核 ^{99m}Tc 数目最多?

解:(1) 为使 $N_B(t)$ 达最大值,令 $t=t_m$ 时, $\frac{dN_B(t)}{dt}=0$,得到 $t_m=\frac{1}{\lambda_B-\lambda_A}\ln\frac{\lambda_B}{\lambda_A}$ 。

(2) 已知 $T_A=66.02\text{h}$, $T_B=6.02\text{h}$ 代入上式,得

$$t_m = \frac{1}{\frac{\ln 2}{T_B} - \frac{\ln 2}{T_A}} \ln \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_A T_B}{(T_A - T_B) \ln 2} \ln \frac{T_A}{T_B} = 23\text{h}$$

第四节 射线与物质的相互作用

各种射线通过物质时,都能与物质发生相互作用,射线的能量不断被物质吸收。研究这种作用可以了解射线的性质,射线产生的物理过程,射线对物质的影响及设计和研制射线探测装置。因此了解射线与物质相互作用的规律是进行射线探测,防护和分析,在医学中用射线进行诊断和治疗的重要基础。

一、带电粒子与物质的相互作用

1. 电离和激发 α 、 β 等带电粒子穿过物质时,通过与物质中的核外电子作非弹性碰撞将能量转移给电子,电子获得能量后脱离原子核,产生自由电子和正离子,合称为离子对,这一过程称为电离(ionization)。若脱离出来的自由电子能量足够大,它又可以使其他原子电离,称为间接电离或次级电离。如果电子获得的能量不足以使它脱离原子,它将由低能级跃迁到高能级,使原子处于激发态,这一过程称为激发(excitation)。退激时释放出来的能量,可以光的形式发射出来或转变为热运动的能量。带电粒子因与核外电子的非弹性碰撞,导致物质原子电离或激发而损失能量的过程称为电离损失,这是质子、 α 粒子等重带电粒子动能损失的主要方式。由于带电粒子的电离作用,它通过物质的路径周围将留下许多离子对,每厘米路径上产生的离子对称为比电离(specific ionization)。它表示带电粒子电离本领大小,在生物体内表示对机体的损伤程度。比电离和带电粒子的速度、电量和物质的密度有关。带电粒子的速度愈小、比电离愈大;带电粒子的电荷数愈多,它与原子壳层电子的作用力大,比电离就愈大;物质的密度愈大,单位体积的电子数目多,与带电粒子的作用机会多,因而比电离也愈大。这三种情况使粒子路径上产生的离子对增多。 α 粒子所带的电量大于 β 粒子,而速度比 β 粒子小,所以 α 粒子的比电离比 β 粒子大。能量为1MeV的 α 粒子在空



气中的比电离约为 4×10^4 离子对 \cdot 厘米⁻¹ (ion pair \cdot cm⁻¹), 而相同能量的 β 粒子则只有 50 ion pair \cdot cm⁻¹。由于它们的比电离不同, 其生物效应就有明显差异。

2. 散射和轫致辐射 当带电粒子通过物质时, 因受到原子核静电场的作用而改变运动方向, 这种现象称为散射, 在发生散射前后, 带电粒子的能量保持不变, 称为弹性散射。若能量有部分损失, 称为非弹性散射。 α 比 β 粒子的质量大得多, 散射不明显, 其路径基本是一条直线, 而 β 粒子因受原子核和电子的多次散射, 路径是曲折的。带电粒子通过物质时, 受到原子核的作用, 速度急剧减少, 带电粒子的一部分能量以光子的形式发射出来, 这种现象称为轫致辐射(bremsstrahlung), 其实质就是连续 X 射线的发生机制。由此造成带电粒子的能量损失称为辐射损失。轻带电粒子(如 β 粒子)的辐射损失比重带电粒子的辐射损失大得多(如相同能量的电子的辐射损失要比质子大 100 万倍), 因此一般可以忽略重带电粒子的辐射损失。

3. 射程和吸收 带电粒子通过物质时, 由于电离损失和辐射损失, 其动能将随着进入物质厚度的增加而减弱, 直至损失所有动能而停止前进。这时若是 α 粒子, 将吸收两个电子而成为氢原子; β^- 粒子则变成自由电子; β^+ 粒子则会与自由电子结合而转变为两个光子。粒子在物质中沿运动轨迹所经过的距离称为路程, 而路程沿入射方向的投影称为射程(range)。由于带电粒子的运动轨迹是曲折的, 因此射程总是小于路程。带电粒子的能量损失与粒子的动能和吸收物质的性质有关, 所以射程能比较直观地反映带电粒子贯穿本领的大小。天然放射性核素发出的 α 粒子, 在空气中的射程为数厘米, 在生物体内的射程只有几百个微米。而 β 粒子的射程要比 α 粒子大得多, 它在空气中可达到数米长, 在生物体内为几毫米到几十毫米。

4. 正电子与物质的相互作用 正电子通过物质时, 与负电子一样要与核外电子和原子核发生相互作用。能量相同的正、负电子在物质中的电离损失、辐射损失和射程大体相同。但是, 高能正电子进入物质后将很快慢化(速度减小), 然后遇负电子发生湮没(annihilation), 同时发出两个发射方向相差 180° , 各自能量为 0.511 MeV 的光子。

二、光子与物质的相互作用

X(γ)射线及轫致辐射等都属于电磁辐射, 由不带电的光子组成。电磁辐射与物质相互作用只与光子的能量有关, 一般与电磁辐射的起源无关。光子与物质相互作用的机制与带电粒子有显著差别, 带电粒子是通过多次与物质原子中的电子或原子核作非弹性碰撞, 逐步损失能量的, 一次碰撞只损失很小一部分能量。而光子与物质中的原子只要发生一次碰撞就会损失相当大一部分甚至全部能量, 光子也可能穿过物质而不损失能量。X(γ)射线穿过物质时, 其强度按指数规律衰减, 没有射程概念。

光子与物质的作用方式主要有以下三种:

1. 光电效应 光子将其全部能量传递给物质原子的轨道电子, 光子消失, 获得能量的电子脱离原子的束缚而成为自由电子(称为光电子), 这一过程称为光电效应。光电子吸收的能量一部分用于克服电离能 ϵ_i , 其余能量($h\nu - \epsilon_i$)就作为光电子的动能。对于能量确定的光子, 原子中结合能大的内壳层发生光电效应的概率较大。伴随着光电效应发出光电子, 在原子内壳层留下空位, 被外层电子填补, 则将发射标识 X 射线或俄歇电子。

2. 康普顿效应 光子与原子核外的电子(多为外层电子)发生非弹性碰撞, 一部分能量转移给电子, 使它脱离原子成为反冲电子, 而散射光子的能量和运动方向发生变化, 这一过程称为康普顿效应, 或康普顿散射。我国物理学家吴有训在发现和研究康普顿效应中做出了重要贡献。康普顿效应中光子只损失部分能量, 散射光波长向长波方向移动。关于康普顿效应详见第十五章。



3. 电子对效应 当能量大于 1.022MeV 的光子从原子核旁经过时,光子在原子核的库仑场作用下转化为一个正电子和一个负电子,这一过程称为电子对效应(electron pairing effect)。入射光子的能量除转化为正-负电子对的静止质量($1.022\text{MeV}/c^2$)外,其余的转化为正负电子的动能。

光子与物质的这三种作用形式与光子的入射能量和物质的原子序数 Z 有不同的依赖关系,用图 17-5 说明。从图中可见能量低的光子和高原子序数的物质,以光电效应为主;中等能量的 γ 射线以康普顿散射为主;电子对效应主要发

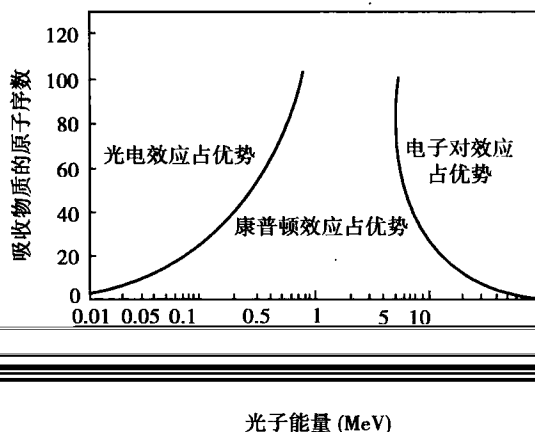


图 17-5 X(γ)光子与物质相互作用的三种形式
与光子能量、吸收物质原子序数的关系

生在光子能量高和高原子序数的物质中,但在能量极高光子的作用下,较低原子序数物质中,电子对效应也不可忽视。

三、中子与物质的相互作用

中子不带电,在物质中不能直接引起电离而损失能量,它在物质中能穿行很长的距离。中子与物质的相互作用主要是受到原子核的散射或与原子核发生核反应。在中子与原子核发生碰撞时,将部分能量传递给原子核,改变自身运动的方向和速度,同时引起原子核发生反冲,这种作用称为中子的弹性散射。能量低的中子与轻核相互作用主要是弹性散射,即反冲核愈轻,在弹性碰撞时得到的反冲能量愈多,中子损失的能量愈大。所以常用含氢核多的水、石蜡等物质使中子减速,防护中子照射。

由于中子不受库仑电场的阻碍,容易进入原子核引起核反应,放射出各种次级射线,其反应前后的中子和原子核系统的总能量也就不再守恒,这种现象叫非弹性碰撞。能量为 1MeV 以上的中子与重核相互作用主要是非弹性碰撞。中子与原子核发生核反应,其反应的产物有稳定核素和放射性核素,并伴随着各种射线产生。如原子核俘获中子,中子留在核内并发射 γ 射线,这种反应称为中子俘获反应(n, γ),如 $^1_0\text{n} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^2_1\text{H} + \gamma$;若中子留在核内而发射质子,称为电荷交换反应(n, p),如 $^1_0\text{n} + ^{14}_7\text{N} \rightarrow ^{14}_6\text{C} + p$,其中反应产物 $^{14}_6\text{C}$ 具有 β^- 放射性。此外还有中子留在核内发射 α 粒子,称(n, α)反应。中子照射生物组织时,中子与原子核反应产生的次级带电粒子(α, β 粒子)和 γ 射线等都将与物质相互作用,导致生物组织的损伤。核反应产生的有些放射性核素还可能长时间滞留在生物体内,造成组织损伤,所以中子对机体的危害是很大的。

第五节 辐射剂量与防护及测量原理

α, β 粒子, γ 和中子射线通过物质时,能直接和间接产生电离作用,统称为电离辐射(ionizing radiation)。各种电离辐射都将使物质发生变化,称为辐射效应。人体组织吸收电离辐射能量后,会产生物理、化学和生物学的变化,导致生物组织的损伤,称为生物效应。肿瘤的放射治疗即利用这种生物效应杀伤肿瘤组织;同时正常组织受到射线照射时也会产生辐射损伤。生物效应的危害程度与生物体吸收的电离辐射能量成正比。因此,准确了解组织中吸收的电离辐射能量,对评估放射治疗的疗效及其副作用有重要的意义,是进行放射治疗及辐射防护最基本的医学物理学知识。“剂量”是用来表示人体接受电离辐射的物理量。本节主要介绍剂量的概念、单位,辐射防护的知识及射线测量的原理和方法。



一、辐射剂量及其单位

根据国际辐射单位和测量委员会(International Commission on Radiation Units and Measurements, ICRU)1980年关于辐射量和单位的报告内容,着重介绍与放射治疗和防护有关的辐射量及其单位。

1. 照射量 $X(\gamma)$ 射线的照射量(exposure) E 定义为:

$$E = dQ/dm \quad (17-25)$$

式中 dQ 是当射线在质量为 dm 的干燥空气中形成的任何一种符号(正或负)离子的总电量。照射量的单位为 $C \cdot kg^{-1}$, 曾用单位为伦琴(Roentgen, R), $1R = 2.58 \times 10^{-4} C \cdot kg^{-1}$ 。它是用来量度 $X(\gamma)$ 射线导致空气电离程度的一个物理量。根据定义, dQ 中不包括次级电子发生韧致辐射被吸收后产生的电离。在实际测量中,照射量也常提到在其他介质,如水中的照射量。可以理解为在水介质中某一小体积单元,用空气替代后测得的照射量,称为水中某点的照射量。需要说明,照射量的定义只适用于 $X(\gamma)$ 能量在几个 KeV 到几个 MeV 的范围内。单位时间内的照射量称为照射率,单位用 $C \cdot (kg \cdot s)^{-1}$ 或 $R \cdot s^{-1}$ 表示。

2. 吸收剂量 单位质量的物质所吸收到的辐射能量称为吸收剂量(absorbed dose),常用 D 表示。它是电离辐射授予某一体积之中物质的平均能量 dE 与该体积之中物质质量 dm 的比值

$$D = dE/dm \quad (17-26)$$

吸收剂量的单位为戈瑞(Gray, Gy), $1Gy = 1J \cdot kg^{-1}$ 。曾用单位为拉德(rad), $1Gy = 100rad$, 它是衡量单位质量受照射物质吸收辐射能量多少的一个物理量,在辐射效应的研究中极为重要。吸收剂量适用于任何类型和任何能量的电离辐射,并适用于受照射的任何物质。由于在同样照射条件下,不同物质(如骨和软组织)吸收辐射能量的本领有差异,所以在谈及吸收剂量时,应该说明辐射类型,物质种类和照射位置。单位时间内的吸收剂量称为吸收剂量率,单位为 $Gy \cdot s^{-1}$ 。

3. 当量剂量 由于不同种类、不同能量的射线释放出的能量在组织中的分布有明显的差异,因此,在吸收剂量相同的情况下,种类、能量不同的射线所产生的生物效应也有明显的差别。当量剂量(equivalent dose)表示各种射线或粒子被吸收后引起生物效应的程度,或对生物组织的危险程度。当量剂量 H_T 等于某一组织或器官 T 所接受的平均吸收剂量 $D_{T,R}$ 与辐射权重因子(radiation weighting factor) w_R 的乘积:

$$H_T = w_R \cdot D_{T,R} \quad (17-27)$$

H_T 的单位为希沃特(Sievert, Sv), $1Sv = 1J \cdot kg^{-1}$ 。曾用单位为雷姆(rem), $1rem = 0.01 Sv$ 。当量剂量与吸收剂量的量纲相同,但物理意义不同。吸收剂量反映的是单位物质对辐射所吸收的平均能量,它对任何物质都相同;而当量剂量只适用于人和生物体,是反映辐射对人体损伤程度的物理量。表 17-1 列出了几种射线的辐射权重因子。

表 17-1 不同射线的辐射权重因子

射线种类及能量范围	辐射权重因子 w_R	射线种类及能量范围	辐射权重因子 w_R
$X(\gamma)$ 射线	1	2MeV~20MeV	10
β^- 和 β^+ 射线	1	>20MeV	5
中子, 能量<10eV	5	质子, 能量>2MeV	5
100eV~2MeV	20	α 粒子, 重核	20

二、辐射防护

放射性核素在医学等领域的广泛应用,使接触放射性核素的人日益增多,因此在使用、



保存和清除放射性废料时,都应采取相应的措施,以达到安全使用的目的。

1. 最大容许剂量 人在自然条件下会受到各种射线的照射,这些射线来自宇宙和地球上的放射性物质,可见受到一定剂量射线照射并不影响人体的健康。国际上规定经过长期积累或一次性照射后,对机体既无损害又不发生遗传危害的最大照射剂量,称为最大容许剂量(maximum permissible dose,MPD)。对这一剂量各国规定并不完全相同,我国现行规定的 MPD 为每年不超过 50mSv。放射性工作地区附近居民不得超过 $50\mu\text{Sv} \cdot \text{d}^{-1}$,一般居民还应低,但医疗照射不受这个限制。

2. 外照射防护 放射源在体外对人体进行的照射称为外照射。人体接受外照射的剂量与离放射源的距离及照射时间有关。因此,与放射性核素接触的工作人员,应尽可能利用远距离的操作工具,并减少在放射源附近停留的时间。此外在放射源与工作人员之间应设置屏蔽,以减弱放射性强度。对 α 射线,因其贯穿本领低,射程短,工作时只要戴上手套就能有效进行防护。对 β 射线,除利用距离防护和时间防护外,注意使用的屏蔽物质不宜用高原子序数的材料,以避免由于韧致辐射产生大量光子,一般可采用有机玻璃、铝等中等原子序数的物质作屏蔽材料。对于 X(γ)射线,因其穿透能力强,应采用高原子序数的物质,如铅衣、铅和混凝土等作为屏蔽材料。

3. 内照射防护 将放射性核素注入体内进行照射称为内照射。由于 α 射线在体内的比电离较高,其造成的损害比 β 、 γ 射线都要严重。因此,除出于介入疗法或诊断的需要必须向体内引入放射性核素外,任何内照射都应尽量避免。这就要求使用放射性核素的单位要有严格的规章制度,对接触人员的一切行为进行规范,以防止放射性物质进入体内。

三、射线的测量原理

射线探测器(detector)是根据射线能使物质的原子、分子电离或激发的原理制成的,它是将射线的能量转变为电流或电压信号,供电子仪器采集,实际上是一种换能器件。射线探测器的种类很多,根据射线在探测器内产生的效应和探测器的工作介质,可分成气体电离探测器,闪烁探测器和半导体探测器等。下面以核医学仪器中最常使用的闪烁探测器为例介绍射线探测器的工作原理。

闪烁探测器主要由闪烁晶体、光电倍增管和输出电路组成,如图 17-6 所示。在核医学中应用最多的闪烁晶体是含铯的碘化钠 $\text{NaI}(\text{Tl})$ 晶体。入射粒子进入闪烁晶体,与其发生相互作用,使闪烁晶体中分子或原子激发,受激分子(或原子)由激发态跃迁到基态时将发出荧光,其荧光强度与射线的能量成正比。光电倍增管由一个易于发生光电效应的光阴极 K 、一个光阳极 A 和若干个中间电极(一般有 7~11 个)组成,密封在一个真空管中,各电极的电压由高压电源经分压供给。利用反射层、光导管将闪烁晶体发出的荧光收集到光电倍增管的阴极 K 上,由于光电效应,产生光电子,经各级电极打出更多的二次电子,这些电子被阳极 A 收集(落在阳极上的二次电子比阴极发射的光电子增加 5~6 个数量级),在负载电阻上形成一个电流脉冲信号,由测量装置记录下来。电流脉冲信号的强度与入射粒子进入闪烁晶体时的能量成正比,由此可以确定入射粒子的动能。闪烁探测器可用来探测 α 、 β 、 γ 射线,由于闪烁探测器的探测效率较高,时间分辨率高,是目前应用较多的一类探测器。

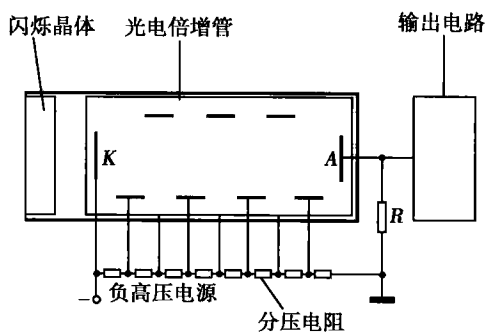


图 17-6 闪烁探测器示意图



第六节 放射性核素在医学上的应用

一、示踪的原理

放射性核素作为示踪原子是指一种元素的各种同位素都有相同的化学性质,它们在体内的分布、转移和代谢都是一样的。如要研究某一种元素在机体内的情况,只要在这种元素中掺入少量该元素的放射性核素,这些放射性核素在体内参与各种过程的变化,然后借助它们放出的射线,在体外探查该元素的行踪,这种方法称为示踪原子法。引入的放射性核素称为标记原子或示踪原子(tracer atom),即使该元素无形中带上一种特殊的标记,便于从体外进行追踪。如将经放射性核素标记的药物引入体内,根据放射性药物聚集在体内某些脏器、参与代谢过程和流经某一通道,然后根据它发出的射线在体外探测其分布、聚集和流量,可以作为诊断疾病的重要依据。示踪原子方法的灵敏度很高,一般的光谱分析方法可检测出 10^{-9} g 的物质,而放射性示踪原子方法能检测出 $10^{-14} \sim 10^{-18}$ g 的放射性物质。

临床上的示踪诊断应用日益广泛,如应用 ^{131}I 标记的马尿酸作为示踪剂,静脉注射后通过肾图仪描记出肾区放射性活度随时间变化情况,可以反映肾动脉血流、肾小管分泌功能和尿路排泄情况。又如把胶体 ^{198}Au 注射到体内后,将通过血运而集积在肝脏内,但不能进入肝肿瘤中,从体外探测 ^{198}Au 发出的 γ 射线可以了解 ^{198}Au 在肝脏内的分布情况,确定病变的位置和大小,为肝癌的诊断提供依据。

体外标本测量:它是将放射性药物引入体内,然后取其血、尿、粪或活体组织等样品,测量其放射性活度。如口服维生素 B_{12} 示踪剂,通过测定尿液排出的放射性活度,可以间接测量胃肠道吸收维生素 B_{12} 的情况。

放射自显影:放射性核素发出的射线能使胶片感光,利用胶片来探测和记录放射性核素分布的方法称为放射自显影,它是追踪标记药物或代谢物在体内去向的一种有效方法,如把细胞培养在含有放射性脱氧核糖核酸(DNA)的水中,就可以把细胞内的染色体标记上放射性核素,通过放射自显影,可观察到染色体分裂过程中DNA的变化细节。

示踪原子法的优点是灵敏度高,可在生理条件下研究物质在机体内的活动规律,而且简单易行。

二、放射诊断

放射诊断主要是指放射性核素成像,简称核素成像(radionuclide imaging, RI),它是一种利用放射性核素示踪方法显示人体内部结构、功能的医学影像技术。由于体内不同组织和脏器对某些化合物具有选择性吸收的特点,故选用不同的放射性核素制成的标记化合物注入体内后,可以使放射性核素在体内各部位按吸收程度进行分布。在体外用探测器对核素放出的射线进行跟踪,以获得反映放射性核素在体内的浓度分布及其随时间变化的图像。借助这种影像技术可以了解各种组织、脏器对药物的选择吸收、正常组织与病变组织的吸收差异,血液循环情况对药物吸收的影响等,医生可以根据图像反映出的组织占位性病变和功能变化进行临床诊断。

核素成像仪器早期有 γ 照相机,目前临床使用最多的是发射型计算机断层成像(emission computed tomography, ECT)。

1. γ 照相机 可将体内放射性核素分布一次性成像,其特点是成像速度快,可提供静态和动态图像,把形态和功能结合起来进行观察和诊断。使用时只要将 γ 照相机的探头放置



在待测部位体表上一段时间,采集这段时间内从体内放射出的 γ 射线,即可得到 γ 射线在该方向的全部投影。在屏幕上得到的放射性核素分布图像很像一幅 X 射线透射照片,当然其分辨率远不如 X 线片。一台 γ 照相机一般由探头、位置通道、能量通道及显示系统组成。图 17-7 是 γ 照相机框图,其中探头包括准直器、闪烁晶体和光电倍增管等。由于引入体内的放射性核素放射出来的 γ 射线向四面八方传播,而且强度在每一个方向上的概率相同,靠它们在闪烁晶体上激发产生的闪烁光点无法确定射线的空间位置。因此在探头前方有千个以上紧密排列整齐的孔道,每一个孔道就是一个准直器(collimator)。图 17-8 是准直器及其视野示意图。准直器由铅或铅钨合金做成,能有效吸收 γ 射线。从图中可知凡在灵敏区内的放射源发出的射线通过准直孔射线立体角均能引起闪烁晶体发出荧光。在半影区内的放射源只有部分射线能打到闪烁晶体;在屏蔽区的放射源,其射线无法进入闪烁晶体。这就是说晶体上每个点只能采集到来自体内相应点的射线,所以准直器能起到空间定位作用。 γ 照相机配有若干个可交替使用的准直器,其孔道的大小、长度、数目及孔道排列方式和方向各不相同。选用不同的准直器可以提高采集特定检查部位射线的灵敏度,进而提高图像的质量。探头使用的闪烁晶体的直径可达到 511mm,探测通过准直器的 γ 射线,并将其转变为闪烁光点。此时晶体上的荧光像与探头在探查方向上的放射性核素分布一一对应,但其荧光像的强度还不足以直接照相,而需要通过紧贴在其背后的光电倍增管,使光电子成 2^n 倍数的增加。把晶体上的光点转变成电脉冲,输出的电脉冲信号分成三路:一路通过能量通道进入显示系统,用来表示 γ 射线强弱;另外两路分别代表水平位置和垂直位置,以控制进入显示系统的电信号在屏幕上的位置。这一过程相当于把放射性核素在体内的三维分布,通过一系列紧密排列的平行孔(准直器)转换为 NaI(Tl) 晶体闪烁点的二维分布,再把这种光点分布通过能量通道进行灰度定标,通过位置通道进行坐标定位,最后显示在屏幕或胶片上。

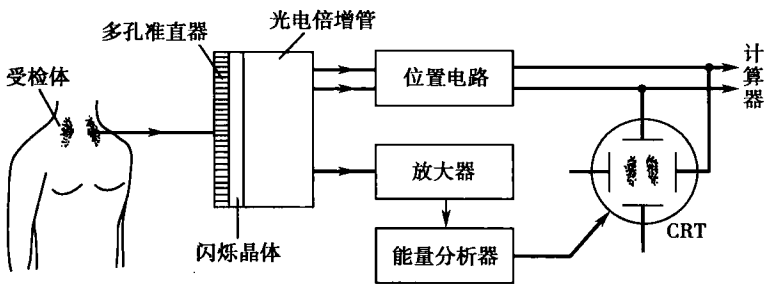
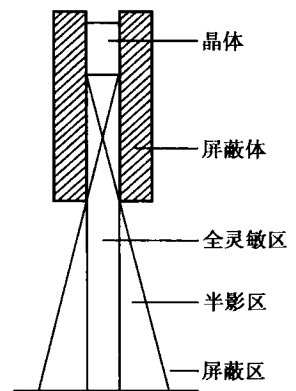
图 17-7 γ 照相机框图

图 17-8 准直器及其视野示意图

2. 发射型计算机断层成像 ECT 可分为单光子发射型计算机断层成像(single photon emission computed tomography, SPECT)和正电子发射型计算机断层成像(positron emission tomography, PET)。

(1) SPECT: 其基本原理是用环绕人体的探测器分别记录体内放射性核素向各个方向发射出的射线强度。其过程是先进进行直线扫描,将每一条直线上体内放射性核素发射出来的射线强度记录下来,得到一组直线的投影值,如图 17-9 所示。每完成一次直线扫描,探测器旋转一定角度,再重复以上过程,直到绕人体一周。然后将每一个角度的直线投影值集合,经过计算机处理组成一个投影断层,这就是人体内某一断层面上放射性核素分布的断



层图像。设被扫描的断面由 $n \times n$ 个体素(每个体素内的放射性核素密度可视为均匀的)组成,每个体素的放射性强度分别为 I_{11} 、 I_{12} 、 \dots 、 I_{1n} 、 I_{21} 、 \dots 等。从探测器得到每条线上放射性强度的总和为 y_1 、 y_2 、 \dots 、 y_n 等,即 $y_1 = I_{11} + I_{12} + \dots + I_{1n}$; $y_2 = I_{21} + I_{22} + \dots + I_{2n}$ 等,则一个断面至少应由 n^2 个方程组成,将这些大小不同的强度值经 A/D 转换,送进电子计算机去解,就可以把这一层面上每一个体素的放射性强度计算出来。再经图像重建和 D/A 转换将各体素的放射性强度在图像中用对应像素的灰度表示,得到一幅按该层面放射性核素密度分布的断层图像。但 SPECT 所产生的图像仅是描绘出了人体内组织和脏器断层中放射性核素的浓度分布,这种分布无法显示断层的解剖学形态,而是反映了组织、脏器与放射性核素相关的生理、生化过程。SPECT 常用的放射性标记物主要有 ^{99m}Tc 、 ^{201}Tl 、 ^{131}I 和 ^{67}Ga 等能产生 γ 射线的核素。

(2) PET:其基本原理是将 β^+ 放射性核素注入体内,在体外探测其发射出的正电子与体内负电子产生湮没时发射的光子,从而确定放射性核素在体内的位置及其分布,并实现断层成像。它是目前大型的医学影像设备之一。

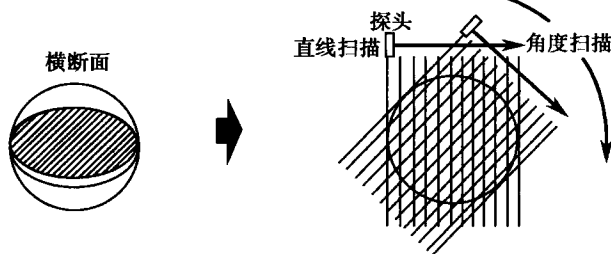


图 17-9 SPECT 扫描示意图

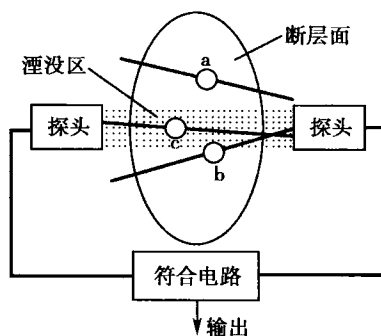


图 17-10 PET 的探头及符合探测

PET 的探测器放置在需要扫描的断层周围。由于体内放射性核素不断衰变而产生的正电子要与生物组织相互作用,而使自身的能量很快消耗,故正电子在人体组织内的射程最多只有几毫米。正电子的寿命很短,它丧失动能后遇到负电子,会结合在一起发生湮没,同时放射出的两个能量均为 0.511MeV 的光子,沿相反方向离开湮没点。PET 探测系统的特点是位于扫描断层两侧的一对探头同时工作,只有当两个探头都分别接收到湮没光子时,才有信号输出。如图 17-10 所示,设扫描断层中 a、b、c 为某瞬间正电子湮没点,它们分别放射出的一对光子。a 点发出的一对光子都没有进入探头, b 点发出的一对光子中只有一个进入探头,因而没有信号输出,称为无效辐射;只有 c 点的一对光子同时进入探头对,符合计数探测要求,有信号输出,称为符合事件。通过测定两探头间组织中的湮没点,就可以推知放射性核素所处的位置,这是因为该点离正电子的初始位置,即放射性核素的位置最多只有几毫米。实际 PET 的检测系统为多环结构,即由成千上万个探头作多层环形排列。a、b 两点发出的光子可由同一环内的其他两对探头分别接收,得到该断层放射性核素分布的断层图像。不同环内的符合计数可以一次形成多个断层图像。

PET 的工作原理不同于 X-CT, X-CT 是通过体外 X 线穿透机体,根据不同组织对 X 线吸收的不同,由探测器接收后利用计算机处理重建反映各体素吸收系数的断层图像,显示机体内组织的结构和形态,是一种获得解剖学图像的设备。而 PET 是通过跟踪技术将具有选择性吸收的 β^+ 放射性核素或其标记化合物引入体内某些特定的脏器或病变部位,根据探测正电子在体内器官湮没而辐射到体表的光子,由计算机处理重建图像,以反映机体内生理、生化等功能的变化。



我们以肿瘤成像药物 ^{18}F 标记的脱氧葡萄糖(fluorodeoxyglucose, ^{18}F -DG)为例说明PET在肿瘤临床诊断中的应用。葡萄糖是细胞能量代谢的主要来源,由于恶性肿瘤的异常增殖,造成对葡萄糖的过度利用,其途径是提高葡萄糖通过细胞膜的转运能力和加强糖代谢的主要调控酶的活性。 ^{18}F -DG是葡萄糖的同分异构体,可与葡萄糖竞争6位磷酸化反应,磷酸化后, ^{18}F -DG不进入三羧酸循环而是滞留在细胞之内,因此 ^{18}F -DG的多少可以表示细胞葡萄糖代谢水平的高低。通过 ^{18}F -DG量的测定可以判定肿瘤的良好性、肿瘤的恶性程度以及肿瘤的转移和复发。除 ^{18}F -DG外,PET使用的标记化合物还有很多,如测定糖代谢的 ^{11}C -DG,测定血流量的 $^{13}\text{NH}_3$ 、 $^{15}\text{O}_2$,测定血容量的 ^{15}O ,测定蛋白质合成的 ^{11}C -蛋氨酸等,其中C、N、O和F是构成人体组织的基本元素,它们在体内的代谢、生化反应和稳定性元素一样,将这些标记化合物注入体内后,用PET即可记录到有关组织、脏器的摄取、吸收、分泌、代谢、排泄等一系列生理和生化反应过程。因此,PET所提供的图像是反映人体的生理、病理及功能的状况。又由于PET所使用的核素半衰期非常短,可以注入较大的剂量,而人体接受的辐射剂量却相对较小,这就有利于提高图像的对比度和空间分辨能力。总的来说,用PET所得到的断层图像比SPECT真实、清晰、不论器官大小都能反映放射性核素的浓度分布。

医学应用:SPECT的应用提高了影像对比度与分辨力,可以测量病变的大小,范围和脏器的体积,定量分析放射性在脏器内的分布等。而PET能探测C、N、O等标记的化合物,是研究生命现象的重要手段,用图像的形式来反映人体在生理条件下的血流量、血容量、耗氧量、糖代谢、蛋白质合成及受体的分布和功能。因此,PET有可能将人的思维、行为和脑化学联系起来,探讨、解释和定位人脑的功能活动。对于许多精神、感情、功能及运动障碍等功能性疾病,PET具有理论意义和实用价值。将反映解剖学形态的X-CT图像与反映代谢等功能变化的PET图像进行融合,可以使两种技术互相补充,更加全面、客观地反映疾病的本质。

三、肿瘤放射治疗

肿瘤放射治疗(radiation oncology)简称放疗,是治疗肿瘤的一种有效的物理疗法。它是利用X(γ)、 β 等射线通过机体时,会对机体组织产生破坏作用,来达到治疗肿瘤的目的。从射线的照射方式可分为外照射、近距离照射和内照射。如将放射源密封直接放入人体的内腔,如食管、宫颈、直肠等部位进行照射,称为近距离照射;利用人体某些组织或器官对某种放射性核素的选择性吸收,将该放射性核素注入体内进行治疗称为内照射,如 ^{131}I 注入体内,会很快集中到甲状腺,利用它发射的 β 射线将甲状腺组织的癌细胞杀死,以达到治疗甲状腺癌的作用。下面介绍几种临床广泛使用的外照射装置:

1. 钴-60治疗机 用 ^{60}Co 作为放射源,它发出的 γ 射线半衰期为5.27a,射线平均能量为1.25MeV。高能 γ 射线通过吸收介质时的衰减率比低能(keV量级)X射线低,因此高能 γ 射线剂量随深度变化比低能X射线慢。

^{60}Co 发出的 γ 射线最大能量吸收发生在皮肤下4~5mm处,皮肤剂量相对较小,因此给予同样的肿瘤剂量,引起的皮肤反应比低能X射线轻得多。对低能X射线,骨的吸收剂量比软组织大得多,而 ^{60}Co 发出的 γ 射线对骨与软组织的吸收剂量近似相同。因此当 ^{60}Co 发出的 γ 射线穿过正常骨组织时,不致引起骨损伤。

^{60}Co 机有直立型和旋转型两种:直立型机头能上下升降,旋转型能作360°旋转。目前主要使用旋转型,根据钴源的放射性活度分为千居里级和万居里级,治疗距离可达到100cm。虽然 ^{60}Co 治疗机与加速器相比存在半衰期短及钴源防护等问题,但由于具有经济、可靠、结构简单、维护方便等优点,仍然是我国目前放射治疗的主要设备。



2. 医用直线加速器 它用于产生高能 X 射线。X 射线是由高速电子轰击靶物质时产生的。能量为几百 keV 的 X 射线可由 X 射线管提供。低能 X 射线的穿透能力较差,皮肤吸收的剂量较高,目前很少使用。而要产生更高能量的 X 射线就需要使用电子加速器。用加速器产生的高速电子(2~50MeV)轰击靶物质可以产生高能 X 射线,也可以直接使用高能电子束用于肿瘤治疗。

高能 X 射线和高能电子束具有皮肤剂量低,能谱分布好等特点。临床使用经验表明能量为 6MeV 的 X 射线可满足约 80% 深部肿瘤的治疗要求,因此 6MeV X 射线直线加速器将是今后肿瘤放射治疗的主流机型。而对某些较深部位(如腹部)的肿瘤,使用较高能量的 X 射线(16~18MeV)仍有一定的优点。由于高能电子束的物理特点适用于治疗较浅的偏位肿瘤(如乳腺癌),以能量为 4~20MeV 的高能电子束治疗靶区后缘深度为 1~6cm 的肿瘤效果较好。

3. γ 刀(Gamma knife) 这是一种立体放射神经外科(stereotactic radioneuro surgery, SRNS)治疗设备。它根据半圆弧等中心聚焦技术原理,借助高精度的立体定向仪,在 CT、MRI 和 DSA 等影像技术的参与下对颅内病灶(亦称治疗靶点)施行准确定位,确定靶点的三维坐标参数,并将其转换到照射装置的坐标系统中,使用大剂量 γ 射线一次多方向限制性地聚焦在颅内靶点上,使病灶受到不可逆性摧毁,发生放射性坏死,同时又能保证靶区边缘及其周围正常组织所接受的放射性剂量呈锐减分布,控制在安全剂量以内,使靶点以外脑组织无任何不可逆损伤。由于用 SRNS 技术使靶区边缘形成一如刀割的损伤边界,达到类似于外科手术的治疗效果,故称为 γ 刀。

4. 调强适形放射治疗(intensity modulated radiation therapy, IMRT) IMRT 技术是采用物理手段通过调整高能 X 射线照射野的束流形状和强度分布,改善肿瘤(靶区)与周围正常组织和器官的剂量分布,使高剂量区剂量分布的形状在三维方向上与肿瘤形状一致。以达到尽可能杀死肿瘤组织,并保护周围正常组织的目的。早在 20 世纪 70 年代就已经提出了 IMRT 的思想,由于当时计算机技术的限制,还不能在临床上实现。近十年来,随着计算机硬件和软件技术的快速发展,特别是多叶光栏(multi-leaf collimator, MLC)及其计算机控制系统的建立和发展,使调强适形放射治疗成为可能。20 世纪 90 年代以市场上出现带有多叶光栏的电子直线加速器为标志进入了调强适形放射治疗的新阶段。调强适形放射治疗被认为是放射肿瘤学史上的一个里程碑,它将是本世纪初放射治疗技术的主流。

下面以前列腺癌的放射治疗为例,对调强适形放射治疗作一说明。图 17-11 中阴影区域为肿瘤的范围,a 为常规的对穿野(单野)照射,如果肿瘤细胞较正常组织对射线更敏感,即存在一个最佳剂量既可以最大限度杀死肿瘤细胞,同时又不会对正常组织造成损害,这种方法是有用的。但是更多情况下,正常组织与肿瘤细胞对射线的敏感程度相差不大,甚至某些正常组织对射线更敏感;同时在某些肿瘤附近有需要保护的重要器官。为此提出了适形放射治疗的思想,即通过多叶光栏或挡块使射野的束流形状与射野方向的靶区投影形状一致,进行多野照射或单野绕病人旋转照射,既可以提高靶区的照射剂量又避免了周围正常组织的损伤。b 是四野照射的示意图,虚线所围区域是高剂量区,适形放疗明显改善了剂量分布。但对于像前列腺癌这样的不规则靶区,适形放疗仍然无法避免重要器官(如膀胱、直肠)受到较高剂量的照射。而在改变射野束流形状的基础上,进一步调整射野束流强度分布的调强适形放射治疗通过多野照射或单野旋转照射可以使高剂量区在三维空间准确地按照靶区的形状分布。c 为三野调强适形照射的示意图,虚线所围的高剂量区与靶区有了较好的适合度。图 17-12 表示了由钨或钨合金叶片组成的多叶光栏调整束流形状及强度的示意图,a 为静态调强;b 为动态调强。

随着肿瘤放射治疗技术的发展,放射治疗的质量保证(quality assurance, QA)和质

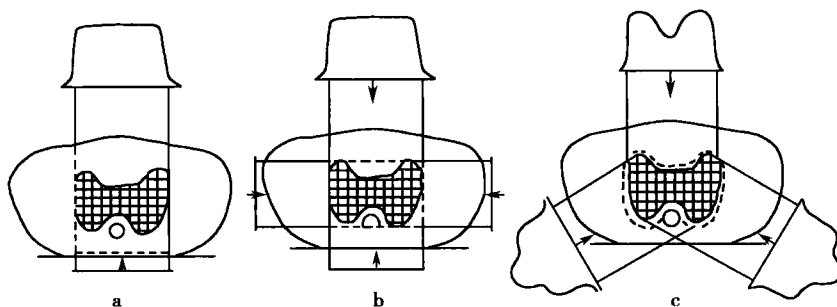


图 17-11 常规照射 a、经典适形照射 b 与调强适形照射 c 的比较

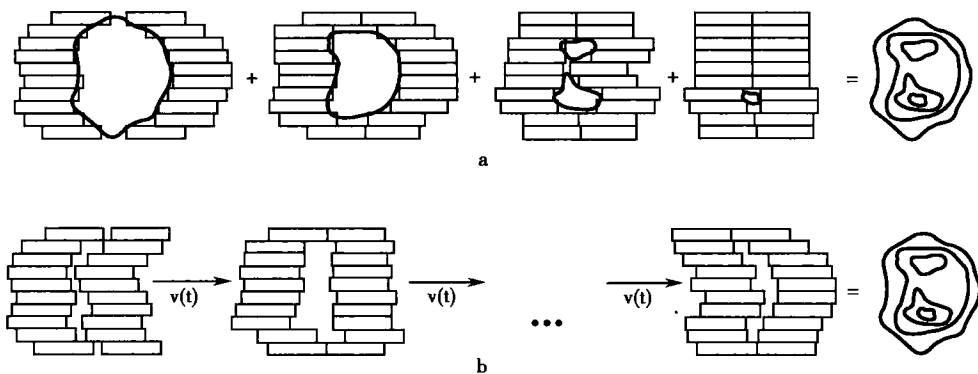


图 17-12 多叶光栏的静态调强 a 及动态调强 b

量控制(quality control, QC)日益受到人们的重视。放射治疗的 QA 包括两个重要内容:一是质量评定,即按一定的标准评价整个治疗过程和治疗效果;二是质量控制,即采取必要的措施保证质量评定得以严格执行。通过 QA 的实施,可以减少或消除部门之间、地区之间甚至国家之间在肿瘤定位、靶区确定、治疗计划的设计和执行业务等方面的差错和不确定性,保证放射治疗过程中的各个环节均严格按照国际标准执行,以提高放射治疗水平。

思考题与习题十七

17-1 计算两个 ^2H 原子核结合成一个 ^4He 原子核时释放的能量(以 MeV 为单位)。

(23.85 MeV)

17-2 两个氢原子结合成氢分子时释放的能量为 4.73eV,试计算由此发生的质量亏损,并计算 1mol 氢分子的结合能。

($5.08 \times 10^{-9} \text{u}$; $4.56 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$)

17-3 试计算氦核和氦原子核的结合能和平均结合能。

(氦:2.22MeV,1.11MeV;氦:28.30MeV,7.07MeV)

17-4 ^{32}P 的半衰期是 14.3d,试计算它的衰变常数 λ 和平均寿命, $1\mu\text{g}$ 纯 ^{32}P 的放射性活度是多少贝可(Bq)?

($4.85 \times 10^{-2} \text{d}^{-1}$, 20.6d, $1.06 \times 10^{10} \text{Bq}$)

17-5 ^{131}I 的半衰期是 8.04d,问在 12 日上午 9 时测量时为 $5.6 \times 10^8 \text{Bq}$ 的 ^{131}I ,到同月 30 日下午 3 时,放射性活度还有多少?

($1.16 \times 10^8 \text{Bq}$)

17-6 利用 ^{131}I 的溶液作甲状腺扫描,在溶液出厂时只需注射 0.5ml 就够了(^{131}I 的半衰期为 8.04d)。如果溶液出厂后贮存了 11d,做同样扫描需注射多少溶液?

(1.29ml)



17-7 一个含 ^3H 样品的放射性活度为 $3.7 \times 10^2 \text{ Bq}$, 问样品中 ^3H 的含量有多少克? 已知 ^3H 的半衰期为 12.33a 。 (1.03 $\times 10^{-12} \text{ g}$)

17-8 设例题 17-1 中的 ^{60}Co 源初装时不含任何杂质, 试计算其质量。 (5.35g)

17-9 某患者口服 ^{131}I 治疗甲状腺功能亢进症, 设每克甲状腺实际吸收 $100\mu\text{Ci}$ 的 ^{131}I , 其有效半衰期约为 5d (这里所说的有效半衰期就是包括衰变和排泄过程, 使体内放射性减少一半的时间), 衰变时发出的 β 射线的平均能量为 200keV , 全部在甲状腺内吸收, γ 射线的吸收可忽略, 试计算甲状腺接受的吸收剂量。 (73.8Gy)

17-10 两种放射性核素的半衰期分别为 8d 和 6h, 设含这两种放射性药物的放射性活度相同, 问其中放射性物质的 mol 数相差多少倍? (32 倍)

17-11 已知 U_3O_8 中的铀为放射性核素 ^{238}U , 今有 $5.0\text{g } \text{U}_3\text{O}_8$, 试求其放射性活度。已知 ^{238}U 的半衰期为 $4.47 \times 10^9 \text{ a}$ 。 (5.27 $\times 10^4 \text{ Bq}$)

17-12 ^{226}Ra 和 ^{222}Rn 原子质量分别为 226.02536u 和 222.01753u , ^4He 原子质量 4.002603u , 试求 ^{226}Ra 衰变为 ^{222}Rn 时衰变能 Q 为多大? (4.869MeV)

(喀蔚波)

第十八章 激光及其医学应用

学习要求:

1. 掌握激光的基本原理与特性。
2. 理解激光的生物作用。
3. 了解激光在基础医学研究与临床中的应用、医用激光器、激光的危害与防护等方面的知识。

激光(laser)是受激辐射光放大(light amplification by stimulated emission of radiation)的简称,爱因斯坦在1916年提出了“受激辐射”的理论假设,预言受激辐射(stimulated radiation)的存在和光放大的可能。汤斯(Townes)于1954年制成受激辐射微波放大器,梅曼于(Maiman)1960年制成世界上第一台激光器——红宝石激光器。1961年9月我国第一台红宝石激光器在中国科学院长春光学精密机械研究所诞生,1964年12月著名科学家钱学森教授给Laser起了个中文名字“激光”。激光以其特殊的发光机制与激光器结构而具有普通光源发出的光所无可比拟的优点,受到广泛重视,在理论与技术两方面得到迅速发展,到20世纪80年代便逐步形成一门新学科——光电子学,并发展为一个新工业部门——光电子工业。激光是20世纪最重大的科技成就之一。

激光输出波长的范围,从远红外直到紫外甚至X光波段;波长可以是单一的,也可以是多种可调的;输出方式可以是连续的,也可是多种形式的脉冲。激光的功率范围为 $10^{-3} \sim 10^5 \text{ W}$,脉冲峰值可达 10^{13} W 。目前激光器的品种已达数百种之多。激光的应用引发了现代光学技术的重大变革,对整个科学技术的发展起了推动作用,广泛应用于工业、农业、医疗、军事及科学技术等各个领域。本章着重介绍激光的原理、特性及在医学中的应用。

第一节 激光的基本原理

受激辐射是物质发光的一种方式,属于物质内部的微观过程。讨论激光的基本原理,必然要涉及到物质的微观结构和光与物质的相互作用。

一、粒子的能级与辐射跃迁

1. 粒子的能级与平均寿命 构成物质的粒子(分子、原子、离子等)可以有不同的能量状态,也称能级状态,简称能态或能级,其中最低的能态称为基态(ground state),其他的能级状态称为激发态(excited state)。粒子处于基态最稳定,而激发态则不稳定,停留时间非常短暂,且互不一致。为此定义大量粒子在某激发态停留时间的平均值称为该激发态的平均寿命(mean lifetime),一般约 $10^{-9} \sim 10^{-7} \text{ s}$ 。某些粒子的激发态平均寿命较长,约 $10^{-3} \sim 10^{-2} \text{ s}$,这种激发态称为亚稳态(metastable state)。

2. 粒子能级之间的跃迁 粒子的能级变化统称为跃迁。粒子在能级之间实现跃迁必然伴随与外界交换能量的过程。跃迁只在满足“选择定则”的能级之间才能实现,各能级之间跃迁的概率并不一致。

粒子实现能级间跃迁的方式有两种:以光能形式吸收或释放称为光辐射或辐射跃迁(radiation transition);以非光能(如热能)的形式吸收或释放被称为无辐射跃迁(radiationless transition)。与激光发射有关的辐射跃迁包括受激吸收(stimulated absorption)、自发辐射(spontaneous radiation)与受激辐射三种基本过程。



当光通过物质时,处于低能级 E_1 的粒子吸收一个能量 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子而向高能级 E_2 跃迁的过程称为受激吸收[图 18-1(a)]。能引起受激吸收的光子称为激发光子,它对粒子起激发作用,其结果是入射光子被吸收。处于高能级的粒子总是力图向低能级跃迁而趋于稳定,这种自发地从激发态向较低能态跃迁同时释放出光子的过程称为自发辐射[图 18-1(b)],其辐射光子的能量 $h\nu_{21} = E_2 - E_1$ ($E_2 > E_1$)。对于不同粒子或同一粒子在不同时刻自发辐射出的光子特性,即频率、相位、进行方向、偏振状态等都各不相同。这是一种随机过程,发出的是非相干的、向四面八方传播的自然光,这就是普通光源的发光机制。一个处于高能级 E_2 的粒子受到一个能量 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子“诱发”而跃迁到低能级 E_1 ,同时释放一个与“诱发”光子特性完全相同的光子的过程称为受激辐射[图 18-1(c)]。其结果是出射光比入射光增加一倍,有光放大作用,而且是相干光。

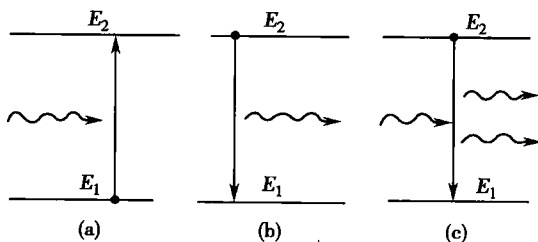


图 18-1 辐射跃迁的三种基本形式

在光与粒子系统相互作用所实际发生的辐射跃迁中,以上三种基本过程总是不可分割地同时存在。然而在不同的条件下它们各自发生的概率不同,因此总的宏观效果也不同。究竟哪一种跃迁占优势?这要由系统中各能级上分布的粒子数情况决定。

二、粒子数反转分布

1. 粒子数按能级的分布 设处于高能级 E_2 与低能级 E_1 的粒子数密度分别为 N_2 与 N_1 ,而在两能级间跃迁时,各自变化 ΔN_2 与 ΔN_1 。在温度为 T 的热平衡态,系统中粒子数按能级服从玻耳兹曼分布(参见第七章第三节),即能级越高,其上的粒子数越少, $N_2 < N_1$ 。例如,氦原子的 3s 态与基态的能量差为 $2.704 \times 10^{-19} \text{ J}$,在常温 $T = 300 \text{ K}$ 时两能级原子数密度之比 $N_2/N_1 = e^{-653} \ll 1$,即氦原子此时几乎都在基态。表明当系统处于正常状态时,若有入射光,由于 $\Delta N_2/\Delta N_1 < 1$,则吸收过程占优势。宏观效果是光被减弱。而处于高能级的粒子向较低能级跃迁时,自发辐射较之受激辐射又占有极大优势。因此,在正常状态下,受激辐射总是被湮没,宏观上得不到光放大的效果。

2. 粒子数反转分布 为了实现光放大,必须破坏粒子数在热平衡态下的玻耳兹曼分布。为此定义粒子数在能级上能实现 $N_2/N_1 > 1$ 的分布称为粒子数反转分布(population inversion distribution)。这种分布在辐射跃迁中将使受激辐射占优势,系统对入射光将有光放大的效果。这是一种非热平衡状态,也称“负温度”状态。

实现由正常分布向反转分布的转变需要两个条件:第一,要求介质有适当的能级结构,即有两个以上与反转分布有关且有亚稳态的能级结构,这种能实现粒子数反转分布的介质称为激活介质(active medium);第二,要求有外界能源供给能量,使在正常分布下处于低能态的大量粒子尽快被激发或抽运到较高能态去。这样,在外界能源不断地激励下,激活介质中的大量粒子被抽运到高能态,使亚稳态或平均寿命相对较长的激发态出现粒子积累,与较低能态之间形成粒子数反转分布。在满足频率条件的光子(来自外界或自发辐射)“诱发”下,导致形成反转分布的两能级间出现受激辐射,并占优势,继而实现对光的放大。

三、光学谐振腔

实现了粒子数反转分布的激活介质尽管能对光进行放大,但由此还不能得到激光。使受激辐射在有限体积的激活介质中能持续进行,光可被反复放大最终形成稳定振荡的装置



称为光学谐振腔(optical resonant cavity)。经光学谐振腔输出的光才是激光。

光学谐振腔由位于激活介质两端的两块互相平行,并与激活介质轴线垂直的光学反射镜(平面或球面)构成(图 18-2)。其中一端为全反射镜,反射率接近 100%;另一端为部分反射镜,反射率在 90%以上。受激辐射沿腔轴方向往返行进的光可被反复多次雪崩式放大,直到足以抵偿各种损耗,可在腔内形成持续稳定的振荡而由部分反射镜一端射出来即为输出的激光。凡是不沿腔轴方向行进的光子都将很快通过腔的侧面逸出,自发辐射的光子也不能参与光振荡过程。

在激活介质产生受激辐射形成光放大的同时,光学谐振腔内还存在许多光能的损耗因素。第一类称为内损耗,是由于介质对光的折射、散射、吸收等造成的;第二类称为镜损耗,是由于反射镜产生的吸收、散射、衍射、透射(包括输出的激光)等造成的。因此,欲产生激光,光学谐振腔还必须满足阈值条件(threshold condition),即光的放大(或增益)要超过上述光损耗。

为描述谐振腔的质量,引入品质因数 Q :

$$Q = 2\pi\nu \cdot \frac{\text{谐振腔内储存的能量}}{\text{每秒钟损耗的能量}} \quad (18-1)$$

谐振腔内能量损耗低,则 Q 值高;反之,则 Q 值低。由于能量损耗中包括输出部分,因此, Q 值也不是越高越好,在设计谐振腔时应对其合理选择。

光学谐振腔可以决定激光的模式,即电磁场在腔中的振荡方式。激光的模式分为纵向模式与横向模式两种。纵向模式,简称纵模(longitudinal mode),是指电磁场沿谐振腔轴向(z 轴方向)的振荡方式。光在腔中来回反射形成相干叠加,只有满足特定相位差条件的光才能形成稳定的驻波,因此腔中只能允许某些特定频率的光在其中持续振荡。不同的纵模表达光波在腔内轴向不同的驻波场分布。只有一个频率输出称为单纵模,输出含有几个频率称为多纵模。显然谐振腔具有选频作用,根据纵模可分辨输出激光的频率,从而也保证输出激光的单色性。

横模(transverse mode)是指电磁场沿谐振腔径向(x, y 轴方向)的稳定分布,即激光束在其横截面上的光强或光斑分布。每一种分布称为一个横模。通常用 TEM 来标志激光模式, m, n, q 为正整数。横模指数 m 和 n 分别表示在 x 和 y 方向上(轴对称情况)光场为零的次数(图 18-3);纵模指数 q 表示驻波场在 z 方向上的波腹数。振荡纵模数目决定于腔长、激光工作物质的自发发射谱线宽度、激励强弱、损耗大小和谱线加宽机制。在适当的条件下可获得单纵模振荡。振荡横模数目决定于谐振腔结构、激励强弱和损耗大小等。在适当的条件下可以获得 $m = n = 0$ 振荡。基模 TEM_{00q} 的频率 $\nu = qc/2\eta L$, 式中 c 为光速, η 为激光工作物质的折射率, L 为腔长。由图 18-3 可见单横模或基模(fundamental mode)的光斑为一光强呈高斯分布的圆形亮斑,由于其光束性质良好,对

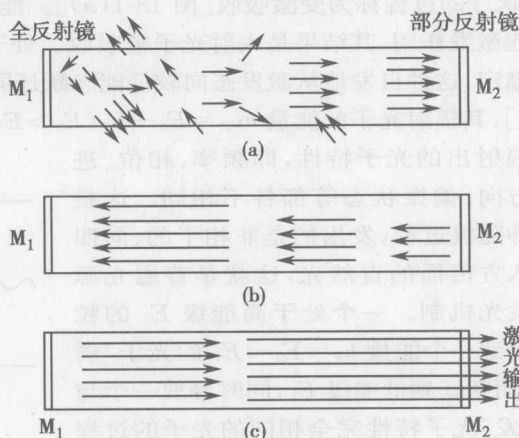


图 18-2 光学谐振腔内激光产生原理图

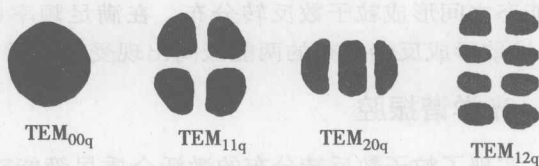


图 18-3 激光输出光斑示意图

于医用激光器具有特殊的意义。

综上所述,光学谐振腔的主要作用是:①使受激辐射光放大过程能在有限体积的激活介质中持续进行,且在满足阈值条件下形成光振荡,输出激光;②对输出激光束的方向给予限定;③有选频作用;④调整激光的模式;⑤通过调 Q (Q -modulation)、锁模(mode locking)等技术以改善激光的输出波形。

四、激光器的基本结构

实现激活介质的粒子数反转分布与具备满足阈值条件的光学谐振腔是产生激光的条件。产生激光的装置称为激光器,对于任何激光器,都必须满足上述两个条件。由此可以看出激光器一般应由三部分组成,即工作物质、激励装置与光学谐振腔(图 18-4)。

1. 工作物质 工作物质包括激活介质与一些辅助物质。激活介质内激活粒子的能级中参与受激辐射,即与出现反转分布有关的能级称为工作能级。一般按照工作能级的多少将激活介质分为“三能级”与“四能级”系统。

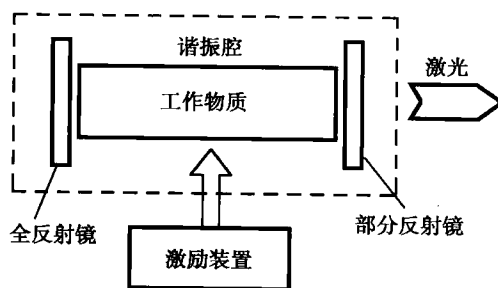


图 18-4 激光器结构原理图

现以红宝石激光器(图 18-5)为例说明三能级系统的工作过程。工作物质红宝石棒两端的反射镜,平行度极高,一端镀银成全反射镜,另一端成部分反射镜,激光由此端输出。红宝石是一种 Al_2O_3 中掺入少量(0.05%~1%) Cr_2O_3 的晶体,在光照下呈淡红色。 Cr^{3+} 均匀分布在晶体中,图 18-6 是 Cr^{3+} 的能级图。 Cr^{3+} 在激励光源氙灯的照射下吸收合适的光子从基态 $^4\text{A}_2$ 跃迁到高能态 $^4\text{F}_1$ 与 $^4\text{F}_2$,而后经无辐射跃迁至亚稳态 ^2E (包括两个子能级 $2\bar{\text{A}}$ 与 $\bar{\text{E}}$),其自发辐射概率很小,于是在此出现粒子的积累。在氙灯强大的抽运下 ^2E 与基态间可形成粒子数反转分布,出现受激辐射而发出 694.3nm 与 692.9nm 两条谱线 R_1 与 R_2 。其中 R_1 线跃迁概率大,实际上只有此线形成振荡,故红宝石激光器输出波长为 694.3nm 的红光。由于受激辐射下能级是基级,实现粒子数反转分布很难,为此激励能源必须很强,转换效率也很低。这是三能级系统的显著缺点,不宜做连续输出。

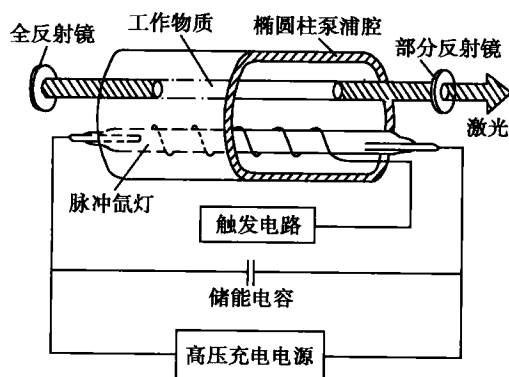


图 18-5 红宝石激光器示意图

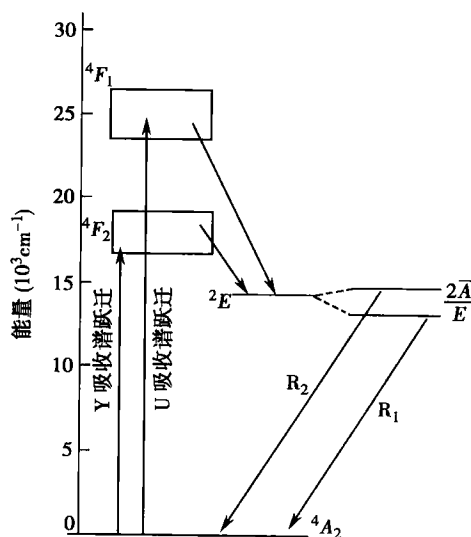


图 18-6 Cr^{3+} 的能级图



图 18-7 所示四能级系统中在亚稳态 E_3 与短寿命激发态 E_2 之间很容易形成粒子数反转分布而出现受激辐射。故四能级系统转换效率较高, Nd:YAG[钕铝石榴石(YAG)晶体掺杂三价钕离子]、He-Ne 和 CO_2 等激光器的激活介质均属此类。

需要指出的是,所谓三能级、四能级系统只是指激光器中工作物质在运行过程中所涉及的能级,并非是某种工作物质只有三个能级或四个能级。

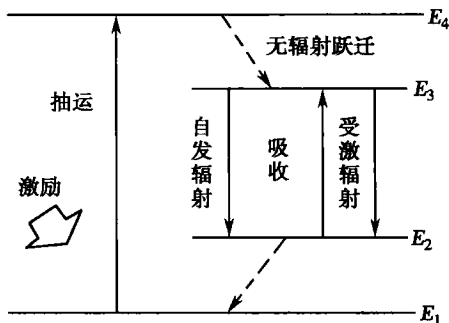


图 18-7 四能级系统实现粒子数反转图

2. 激励装置 激励装置也称泵浦源,其作用就是向工作物质提供能量,使激活介质中的粒子被抽运到高能态上以便实现粒子数反转分布。由于供能形式不同,激励装置可有电子注入、光学泵浦、气体放电泵浦、粒子束泵浦、化学泵浦、热泵、核泵以及用一种激光器去泵浦另一种激光器等之分。

3. 光学谐振腔 前面已述,不再重复。

值得指出的是,自由电子激光的产生机制不同于前述激光。与普通激光器基于分子、原子能级间跃迁产生激光不同,自由电子激光是利用自由电子受激辐射产生激光。1951 年莫茨(Motz)提出运动速度接近于光速的电子(称相对论电子)通过周期性变化的磁场或电场时会产生相干辐射。辐射的频率取决于电子的速率。自由电子激光器以真空中的相对论电子束为工作物质,通过泵浦场(周期磁场或电磁场)的相互作用产生激光。自由电子激光器可以同时具备高功率、高效率、宽波长可调谐范围等优点。中国科学院高能物理研究所已于 1993 年制成我国第一台红外自由电子激光装置。

第二节 激光的特性

激光与普通光源发出的光就其本质而言都是电磁辐射,但它除具有普通光的一切性质外,还具有一些普通光没有的特性,使得在光的发射与传播过程中形成的激光束中大量光子的整体行为有别于普通光束,因而使它具有特殊应用。

一、方向性好

发散角(angle of divergence)是衡量光束方向性好坏的标志,方向性表明光能量在空间分布上的集中性。普通光源发出的自然光射向四面八方,常常使用聚光装置来改善它的方向性。激光由于受激辐射的光子行进方向相同以及谐振腔对腔内离轴光子的淘汰作用,使得只有沿轴向的光波才能形成振荡并输出,因而有很好的方向性。激光束的发散角一般在 $10^{-2} \sim 10^{-4} \text{ rad}$, 与普通光束比相差 $10 \sim 10^4$ 倍。这一特性被用作精密长度测量。例如,曾利用月球上的反射镜对激光的反射来测量地球与月球之间的距离,其精度可达几个厘米。激光束是理想的平行光束,还被广泛用于准直、目标照射、通讯和雷达等方面。

由于激光器输出端造成光的衍射,使激光束的发散角以其衍射角为极限而不能无限减小。

二、亮度高、强度大

亮度(brightness)是衡量光源发光强弱程度的标志,表明光源发射的光能量对时间与空间方向的分布特性。激光器由于其输出端发光面积小,光束发散角小,输出功率大,而使其



亮度高,尤其是超短脉冲激光的亮度可比普通光源高出 $10^{12} \sim 10^{19}$ 倍。因此,激光器是目前世界上最亮的光源。例如,将长 1m、端面输出孔径为 4mm、发散角为 3mrad 的 40W 二氧化碳激光管与一支长 1m、直径为 40mm、发散角为 π rad 的 40W 日光灯管输出光的亮度进行比较,前者是后者的 100 亿倍。一台功率较大的红宝石激光器输出激光的亮度比太阳表面光亮度高 100 亿倍。

对同一光束,强度与亮度成正比。激光极高的亮度加之方向性好而能被聚焦成很小的光斑,故激光的强度比普通光也大得惊人。目前激光的输出功率可达 10^{13} W,可聚焦到 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ mm,强度可达 10^{17} W · cm⁻²,而氧炔焰的强度不过 10^3 W · cm⁻²。这可用于制造激光武器以及工业上的打孔、切割、焊接等。利用高强脉冲激光加热氘和氚的混合物可使其温度达到 0.5~2 亿度,有望用于实现受控热核聚变。在临床治疗中,激光这一特性被用作手术刀与用于体内碎石。

三、单色性好

谱线宽度(line width)是衡量单色性好坏的标志,谱线宽度越窄,颜色越纯,则单色性越好。单色性表明光能量在频谱分布上的集中性。普通光源发出自然光的光子频率各异,含有各种颜色。激光则由于受激辐射的光子频率(或波长)相同与谐振腔的选频作用而使其具有很好的单色性。例如,普通光源中单色性最好的氪(Kr⁸⁶)灯(605.7nm)谱线宽度为 4.7×10^{-4} nm,而 He-Ne 激光器发出的红光(632.8nm)谱线宽度则小于 10^{-8} nm,两者相差数万倍。故激光器是目前世界上最好的单色光源。

由于光的生物效应强烈地依赖于光的波长,使得激光良好的单色性在临床治疗上获得重要应用。激光的单色特性在光谱技术、全息技术、激光信息处理及光学测量中得到广泛应用,已成为基础医学研究与临床诊断的重要手段。

四、相干性好

自发辐射产生的普通光是非相干光,而受激辐射光子的特性使激光具有良好的相干性。

同一地点、不同时刻发出的光相干,即空间同一位置在相同时间间隔 τ_c 的光波相位关系不随时间而变化,称为光的时间相干。 τ_c 称为相干时间(coherence time),而 $L_c = c\tau_c$ 则称相干长度。 τ_c 或 L_c 越长则光的时间相干性越好。时间相干性起因于粒子发光的间断性,由物理光学可知相干时间就是粒子发光的持续时间,而粒子在受激辐射上能级的平均寿命 τ 即是粒子相应发光的持续时间,故有

$$\tau_c = \tau \propto 1/\Delta\nu \quad (18-2)$$

受激辐射的上能级的平均寿命很长,其谱线宽度 $\Delta\nu$ 很窄,因此激光的时间相干性很好。例如,氪(Kr⁸⁶)灯的相干长度只有几十厘米,而单模稳频 He-Ne 激光器的相干长度达几十公里,两者相差十万倍。

同一时刻、不同地点发出的光相干,即空间不同位置在同一时刻的光波相位关系不随时间而变化,称为光的空间相干。满足此相干的空间发光范围称相干面积(coherent area),相干面积越大则光的空间相干性越好。空间相干性起因于粒子发光之间的联系,尤其是相位关系。受激辐射的光子在相位、频率、偏振方向上都相同,再加之谐振腔的选模作用,使激光束横截面上各点间有固定的相位关系,所以激光的空间相干性也很好。

激光器的问世,为我们提供了最好的相干光源,促使相干技术获得飞跃发展,全息摄影才得以实现。

五、偏振性好

受激辐射的特点表明激光束中各个光子的偏振状态相同。利用谐振腔输出端的布鲁斯



特窗在临界角时只允许与入射面平行的光振动通过,可输出偏振光,并可对其调整。因此,激光具有良好的偏振性。

上述激光在五个方面的特性彼此是相互关联的,可以概括为两大方面。第一,与普通光源相比,激光器所输出的光能量的特别之处不在于其大小而在于分布特性,即光能量在空间、时间以及频谱分布上的高度集中,使激光成为极强的光。第二,激光是单色的相干光,而普通光是非相干光。显然,这些特性的产生都是源于激光特殊的发射机制与光学谐振腔的作用。这些特性正在不断地获得应用。例如,激光通信是利用信号对激光载波进行调制而传递信息,其最大优点是传输的信息量大,理论上红外激光可同时传送上千亿个电话。利用激光技术获得低温的方法叫激光冷却,现已可使中性气体分子达到 10^{-10} K 的极低温状态。朱棣文(Chu)、达诺基(Tannoudji)和菲利普斯(Phillips)因在激光冷却和捕陷原子研究中的出色贡献而获得 1997 年诺贝尔物理学奖,朱棣文是第五位获得诺贝尔奖的华人科学家。

第三节 激光的医学应用

医学是激光的首批应用领域。自 1961 年世界上第一台医用激光器——红宝石视网膜凝固机在美国问世,至 20 世纪 80 年代末已建立较为系统、完整的理论体系;初步形成教学、科研与临床应用的专业队伍;建立健全了专业学术机构与学术交流。于是,一门新的交叉学科——激光医学(laser medicine)便逐渐形成了。目前它包括激光医学基础、临床检测诊断与治疗、医学生物学用激光器械与技术、激光的危害与防护等四部分内容。

一、激光的生物作用

激光与生物机体的相互作用及其机制很复杂,激光应用于医学,即激光医学的理论基础,至今尚待充实、完善。目前滞后因而也制约了激光临床治疗的发展。激光对生物组织所施加的作用,并存在于由此引发的一系列理化过程之中,称为激光的生物作用。生物组织因受激光照射而出现的各种应答性反应、效果或变化称为激光的生物效应。反之被作用的生物组织也将引起激光参量的变化。前者是因,后两者是果,且后两者又分别是激光临床治疗与诊断的依据或基础。这就是目前研究的三方面内容及其重要意义。在医学领域,激光对被其照射之生物组织,若能直接造成不可逆性损伤者称其为强激光(high reaction level laser, HRLL);若不能直接造成不可逆性损伤者称其为弱激光(low reaction level laser, LRLL)。当然强与弱也是相对的。

关于激光的生物作用一般认为有五种,现简要分述如下。

1. 热作用 生物组织在激光照射下吸收光能转化为热能,温度升高,这即是热作用。低能量光子(红外激光)可使组织直接生热,高能量光子(可见与紫外激光)则多需经过一些中间过程而使组织生热。

随着温度的升高,在皮肤与软组织上将由热致温热($38\sim 42^{\circ}\text{C}$)开始,相继出现红斑,水泡,凝固,沸腾,炭化,燃烧直至 5730°C 以上的热致气化等反应。在临床上,热致温热与红斑被用于理疗;沸腾、炭化、燃烧统称为“汽化”,被用于手术治疗;热致气化用于直接破坏肿瘤细胞与检测微量元素等等。

温升将引起生物组织内的热化反应及生物分子变性,对代谢率、血液循环以及神经细胞带来影响,造成热损伤等生物效应。对于不同的照射时间,生物组织损伤的阈值温度不同。照射时间越短,生物组织能耐受的温度越高。

2. 机械作用 生物系统吸收激光能量时会产生蒸发和机械波,前者一定伴有后者,而后者不一定伴有前者发生。机械波是由一系列压强因素造成的。激光照射生物组织,可直



接或间接产生对组织的压强称为激光的机械作用,也称为激光的压强作用。

光压是激光本身辐射压力所形成的压强,是光子将其动量传递给被照射组织的结果。气流反冲压是当组织吸收聚焦的激光能量急剧升温,直至沸腾,从受照处喷出气流并夹有组织碎片,同时对组织形成与气流方向相反的反冲压力所造成。此项作用对致密组织明显。内部汽化压是发生在组织内部或封闭腔(眼球,脑室)内部的汽化所形成的类似冲击压的瞬变压强。它可使其内部“爆炸”,造成的损伤是定域的。体膨胀超声压是由于被强激光照射的生物组织迅速升温形成汽化和体膨胀,从而在其边缘区域产生的超声振动发出在生物体内传播的超声波所产生的压强,可造成体内远距离的损伤。强脉冲激光照射生物组织形成的等离子体强烈吸收光能引起体膨胀,产生冲击波,破坏局部组织,此压强称为等离子体膨胀压。电致伸缩压是在强激光的强电场作用下生物体被极化而出现形变,即电致伸缩所产生的压强。它将在体内激起冲击波、超声波。这种压强显然与能量吸收无直接关系,透明越好的组织此项压强越显著。光压形成一次压强,其他压强因素形成二次压强。前者一般可忽略,只有超短脉冲激光的光压才加以考虑;后者显著,尤其体膨胀超声压是形成机械波最重要的因素,它大约比光压大 6~7 个数量级。激光在生物组织中产生的机械波由于频率高还具有空化作用,从而引起组织发生化学变化,结果使机械能直接转化为化学能。

激光的机械作用对临床治疗有利也有弊。例如,在眼科利用二次压强打孔,可降低眼压,治疗青光眼、白内障;在外科手术中用于切开组织等。而在眼球与颅内由于二次压强剧升形成“爆炸”性损伤,甚至死亡。二次压强也可使被照射的肿瘤组织被压向深部或反向飞溅而造成转移等。

3. 光化作用 生物大分子吸收激光光子的能量受激活而引起生物组织内一系列的化学反应称之为光化反应。激光照射直接引起机体发生光化反应的作用称为光化作用。光化反应与热化反应不同(在产生原因、产物、对光频的选择、受温度影响等方面)。光化反应分为两个过程,初级过程有光参与,产物不稳定,可进一步触发化学反应即次级过程,生成最终的稳定产物。次级过程一般不需光参与。

光化作用的基本规律由两个定律表达。光化学第一定律(吸收定律):只有被分子吸收了的光子才能引起光化反应。由此推知光化反应具有波长选择性。光化学第二定律(量子定律):在光化反应中,每个分子只吸收一个单色光的光子而成为光化激活分子。因此,光化反应的程度,即最终产物的多少应与被吸收的光子总数,亦即激光的总剂量成正比。应指出第二定律不适用于强激光。因为生物组织对强激光可发生一个分子吸收多个光子,即多光子(或非线性)吸收的现象。即使是红外激光,只要光强足够也能引起光化反应。

光化反应有光致分解、光致氧化、光致聚合、光致异构以及光致敏化等类型。其中光致敏化是指生物系统所特有的由光引起的,在敏化剂参与下发生的化学反应。这类反应因有无氧分子参加而分为两种,前者称为光动力学作用,常用的敏化剂有血卟啉衍生物(HpD)等;后者即无需氧分子参加的光致敏化反应,常用的敏化剂有呋喃香豆素等。敏化剂能有选择地长时间集中于体内病变组织,并使在适当波长激光照射下发生光致敏化反应。因而,光致敏化对肿瘤的治疗具有重要意义,并已做出贡献。光化作用还可引起红斑效应、色素沉着、维生素 D 合成等生物效应。

由于激光有高度的单色性和足够的光强,使得它的光化作用被应用于杀菌、同位素分离、物质提纯、分子剪裁等方面。

4. 电磁场作用 激光是电磁波,激光对生物组织的作用就是电磁场对生物组织的作用。一般认为这一作用主要是电场所致。强激光可在组织内形成 $10^6 \sim 10^9 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ 的高强电场,从而使组织中产生光学谐波、电致伸缩、受激拉曼散射、受激布里渊散射、倒轭致辐射、等离子体等,并能导致生物组织电系统的重新分布,即可使无序的生物分子发生电离、极化,



趋于有序。这又将进一步在组织内引起高温、高压,从而使组织受到破坏或损伤。

关于激光的电磁场作用,目前详细的研究报道还较少。

5. 生物刺激作用 生物刺激作用主要是弱激光的作用。弱激光对生物过程、对神经、通过体液或神经-体液反射而对全身、对机体免疫功能等都有刺激作用,可产生促进血红蛋白的合成,糜蛋白酶的活性,细菌的生长,白细胞的噬菌作用,肠绒毛的运动,毛发的生长,皮肤、黏膜的再生,创伤、溃疡的愈合,烧伤皮片的长合,骨折再生,消炎等生物效应。

目前观察、研究较多的是弱 He-Ne 激光的刺激作用。发现它对生物分子、细胞、细菌与微生物都有作用,并总结出定量的规律:剂量小时起兴奋作用,剂量大时起抑制作用,这是相对受照射的生物过程而言的;刺激作用有累积效应,最终效果取决于总剂量;刺激作用强弱与刺激次数(等间隔、等剂量)的关系呈现出抛物线特征。应指出以上规律对于其他波长的激光是否成立尚待研究。对于 He-Ne 激光刺激作用的机制研究目前也尚不成熟。为此,在前苏联与东欧提出了生物电场、色素调节、细胞膜受体、偏振刺激、受体蛋白质等五种设想。这些设想都是根据研究者各自的实验结果提出来的,都有不完善之处。尽管如此,弱激光的生物刺激作用却已被广泛应用于临床,效果是肯定的。

对于以上激光的五种生物作用,在临床应用上,强激光主要表现为机械作用、电磁场作用与光化作用;弱激光主要表现为生物刺激作用与光化作用;而热作用则在各类激光中普遍被利用。目前研究较成熟的是热作用和机械作用,而生物刺激作用则只在前苏联、东欧和我国较受重视。

影响激光与生物组织相互作用的因素有两方面。

一方面是激光的性能参量。其中有:波长(λ),由于不同波长光子的能量不同,将直接影响与生物组织的相互作用及其过程;作用于靶组织的激光能量(E)与能量密度(D), D 也称物理剂量,即垂直作用于靶组织单位面积的能量;激光功率(P)与功率密度(I ,即强度);作用时间(t)及其间隔。 $D=I \cdot t$,但对于生物组织若 I 小于某种临界值,则 t 无论多长都无效果。故在临床上必须考虑构成 D 的四个要素: P 、 t 、 S (组织受照面积)与 θ (激光入射角)。还有激光输出方式(如连续、脉冲、调 Q、锁模等不同方式对生物组织作用过程、效果不同)、光强分布、光束发散角、相干、偏振等因素。

另一方面是生物组织的性质。其中有:生物组织的物理性质。例如,光学性质(反射率、吸收率、透射率、散射系数等)、热学性质(热导率、热扩散率、热传递方式等)、机械性质(密度、弹性等)、电学性质(电阻抗、电极化率等)、声学性质(声阻抗、声的反射率与吸收率等)等等。组织的生物特性,如色素、含水量、血流量、供氧、代谢等状态以及组织的结构与不均匀性等。生物剂量,即直接将生物组织对激光辐照的反应强弱程度按照一定标准进行分级。

把握以上诸因素及其影响,对于激光医学基础研究与临床应用都是十分重要的。

二、激光在基础医学研究中的应用

1. 激光对生物分子、细胞、组织的作用与效应

(1) 生物分子:激光作为刺激源可在分子水平上调整蛋白质与核酸的合成与活性;影响 DNA 的复制、各种酶的活性与功能、氨基酸的变化等。温升将加快酶的催化作用,但当温升超过损伤阈值时,可引发热化反应以及蛋白质的凝固、变性。生物大分子吸收光子能量受激活产生受激原子、分子和自由基,引起一系列光化反应,使生物分子在组成、性质、构型等方面出现不可逆的改变。高强度激光照射生物组织产生的光学谐波中有的波长正处于蛋白质、核酸的吸收峰,从而引起对这些谐波的吸收而导致变性。

(2) 细胞:激光问世以来,一方面为细胞生物学的研究提供了全新的手段与技术;另一方面就各类激光的照射对细胞器、细胞质、细胞核、线粒体等及细胞性质与功能等的影响做



了广泛研究,在此基础上已逐渐形成一门新的学科——激光细胞生物学(laser cellular biology)。其研究方法大体分为两类。一类是利用激光原光束或扩束照射群体细胞;另一类是利用激光微光束照射单个细胞或细胞内某一特定部分。

激光通过对细胞的作用而影响细胞的增殖、分化、遗传、发育、凋亡、代谢以及免疫等过程或功能。而且这种影响往往还有双向作用,其含义有两层:一是照射剂量小则兴奋,大则抑制;二是可使细胞功能从不同方向的偏离恢复正常。对于肿瘤细胞,激光有三种作用:热凝,利用在 $41\sim 45^{\circ}\text{C}$ 癌细胞比正常细胞对热更敏感来达到热杀癌细胞而保留正常细胞的目的;气化,利用强激光照射,使温度剧升至 5700°C 直接气化癌细胞;光致敏化作用,尤其是光动力学作用。这三种作用为临床治疗癌症提供了三种激光疗法。

(3) 组织:激光照射组织,当剂量足够大时将造成对组织的损伤直至完全破坏。这种损伤分为热损伤与非热损伤两大类。热损伤是由于热作用导致组织的凝固、汽化(包括炭化、燃烧)、气化所造成的。非热损伤,包括机械作用导致的冲击波对组织的损伤,甚至远距离损伤;强电场作用导致的光击穿或产生等离子体;光化作用导致的光化激活组织,发生光化反应造成对组织的损伤等。实际过程中往往是一种作用为主并伴有其他作用或多种的协同作用造成对组织的损伤。激光照射靶组织一般有两种情况:一种是激光束焦斑落于组织表层造成开放性损伤;另一种是激光束聚焦于组织内部造成封闭性损伤,损伤中心被正常组织所包围。激光停止照射后在靶区还会出现充血及水肿现象。

激光除对组织有损伤作用外,还有修复作用。由于激光的生物刺激作用加之温热、光化、机械等作用对细胞的影响以及对修复机制的调动,使得受损伤的组织在一定剂量范围内的激光照射下能加快修复与再生的过程。

上述激光对组织的损伤与修复作用是强、弱激光用于临床治疗的依据与基础。

2. 用于基础医学研究的激光技术 激光的问世为基础医学研究提供了新的技术手段,简述如下。

(1) 激光微光束技术:激光经透镜或显微镜光学系统聚焦后可形成强度很高而光斑直径在微米量级的微光束。利用此微光束可进行细胞水平的研究,形成激光的光镊术、显微照射术、细胞打孔术、细胞融合术等以实现对细胞进行俘获、转移、穿孔、移植、融合及切断等微操作。激光微光束的另一种应用是激光微探针分析术,即标本的微区在激光微光束照射下被汽化,同时用摄谱仪或质谱仪记录,进行微量和痕量元素的定性或定量分析。此项技术被用于测定各种生理、离子及痕量元素在软组织中的分布、生物矿化结构中痕量元素的分析及矿化过程的研究、生物组织中有毒痕量元素的检测、体液中各种元素含量的分析及生物样品中有机化合物的定量测定等。

(2) 激光流式细胞计(laser flow cytometry):这是激光、电子检测与计算机等多种技术与流式计数方法结合而形成的一种生物医学仪器。其原理是让染色细胞在稳定的液体流动中排队成行,逐个依次恒速通过激光束的焦斑区。用探测器检测细胞被激光照射后所发出的荧光与散射光并经计算机处理而自动显示结果。它可对细胞逐个进行定量分析与分选,其特点是分析速度快、灵敏度高、分选纯度高、可对一个细胞同时定量测定多种参数(如DNA、RNA含量、细胞体积等)等。这一技术在细胞生物学、免疫学、遗传学、肿瘤学以及药学等方面有广泛的应用。

(3) 激光拉曼光谱技术:当光子与物质分子相互作用时,除有与入射光频率相同的瑞利散射线外,还有由于非弹性碰撞而在其谱线两侧对称分布的散射光,这种散射称之为拉曼散射(Raman scattering)。拉曼散射的频率与瑞利散射的频率之差称为拉曼频移,由于拉曼频移与物质分子的振动、转动能级结构有关,而与入射光频率无关,故可用拉曼光谱对生物分子进行结构分析。因拉曼散射的强度只有瑞利散射的万分之一,一般不易观测到。只有用



高强度、高单色性以及谱线范围宽广的激光作激发光源,才使激光拉曼光谱具有实用意义。加之它对样品几乎无损害,可让样品处于与生物活性物质相同的环境下进行分析等优点,此项技术已在核酸与蛋白质的高级结构、生物膜的结构和功能、酶的催化动力学、药理学(特别是抗癌药物与癌细胞的作用机制)等的研究中得到应用。

(4) 激光多普勒技术:这是利用激光照射运动物体所发生的光多普勒效应进行检测的技术。激光多普勒血流计可用于对人体甲皱、口唇、舌尖微循环与视网膜微血管等的血流速度进行检测。激光多普勒电泳是应用激光多普勒效应与电泳技术结合的一种分析、检测新技术,可快速自动准确地测量生物细胞及大分子的电泳迁移率、表面电荷、扩散系数等重要参量。此外,激光多普勒技术还用于对巨细胞质流、精子活力、眼球运动、耳听力等的测定。由于此项技术具有极高的空间分辨率、快速、灵敏、连续、非侵入性等特点,被应用于微循环、血液流变学、病理生理学、免疫学等方向的研究。

(5) 激光全息显微技术:全息术(holography)是利用光的干涉在底片上记录被摄物体反射光的频率、强弱与相位信息,再利用光的衍射重现被摄物体的三维空间图像的技术。正是激光具有高度的时间与空间相干性,以它作光源才使全息术得以实现。激光全息显微技术是激光全息术与光学显微系统结合的产物。它具有分辨率高、像差小、景深大、能对活标本进行动态观察等优点,被用于对细胞的观测分析。

(6) 激光扫描共焦显微镜:这是激光与显微镜、光度技术及计算机图像分析技术结合的产物。是形态学、分子与细胞生物学、神经科学、遗传学、药理学等领域研究的有力工具。在第十四章中已有详述。

除上述外,还有激光荧光显微技术、激光漂白荧光恢复测量技术、激光扫描细胞计等激光技术用于基础医学研究。

三、激光的临床应用

1. 激光诊断方法 激光由于具有极好的单色性、相干性与方向性而为临床诊断提供了方法手段。以光学分析分类,激光诊断一般可有如下方法:激光光谱分析法(荧光光谱、微区光谱、拉曼光谱等)、激光干涉分析法(全息术、干涉条纹视力测定、视觉对比敏感度测量、散斑技术等)、激光散射分析法(多普勒技术、静态和动态散射技术、闪烁细胞计等)、激光衍射分析法(用于测红细胞变形能力)、激光透射分析法(用于检查软组织肿物)、激光偏振法(用于鉴别肿瘤细胞)以及其他激光分析法(流式细胞计、扫描检眼镜等)。激光诊断技术为诊断学向非侵入性、微量化、自动化及实时快速方向发展开辟了新途径。

2. 激光治疗方法 激光作为一种手段应用于临床已遍及眼科、外科、妇科、皮肤、肿瘤等各科近 300 种疾病的治疗,且兼有中、西医的疗法。其基本方法有四大类:①激光手术治疗,即以激光束代替金属的常规手术器械对组织进行分离、切割、切除、凝固、焊接、打孔、截骨等以祛除病灶以及吻合组织、血管、淋巴管、神经等。手术用激光治疗机统称光刀,按其作用机制分为热光刀(利用可见与红外激光对组织的热作用与二次压强作用进行手术,刀头焦点附近不同区域接触组织有不同效果)与冷光刀(利用紫外激光的光致化学分解作用与二次压强作用进行手术,术中切口两侧无热损伤)两大类。激光手术有多功能、止血效果好、感染少、质量高、可选择性破坏特定组织等优点,还可用于进行各种精细的显微手术;②弱激光治疗,包括激光理疗(以弱激光为物理因子进行原光束、扩束、光纤与腔内照射的物理疗法)、激光针灸(以微小的弱激光光束直接照射穴位,兼有针与灸的作用)与弱激光血管内照射疗法(将弱激光引入静脉照射循环血液的疗法);③激光光动力学疗法,这是利用光动力学作用主要治疗恶性肿瘤的方法。有体表、组织间、腔内照射及综合治疗四种方式;④激光内镜术治疗,通过内镜对内腔疾病进行激光治疗的方法,用于腔内的手术、理疗与光动力学治疗。由



于不需开胸、剖腹、开颅等且可用光纤方便地导入激光,而使这种疗法具有很大的发展优势。

四、医用激光器

应用于医学领域的激光器一般可按工作物质形态(固体、气体、液体、半导体等)、发光粒子(原子、分子、离子、准分子等)、输出方式(连续、脉冲等)以及波段、功率等进行分类。常见的医用激光器如表 18-1 所列。

表 18-1 常用的医学激光器

类别	名 称	输出方式	波长(nm)	主 要 应 用
固体	Ruby	脉冲	694.3	眼科、皮肤科、基础研究
固体	Nd:YAG	连续、脉冲	1064	各科手术、内镜手术
固体	KTP/Nd:YAG	连续、脉冲	532	眼科、皮肤科、肿瘤科、显微外科、内镜手术、微光束技术
固体	Ho:YAG	脉冲	2120	胸外科、耳科、内镜手术、口腔科
固体	Er:YAG	脉冲	2080;2940	耳科、皮肤科、眼科、口腔科
气体	He-Ne	连续	632.8	各科弱激光治疗、PDT、全息照相、基础研究
气体	CO ₂	连续、脉冲	10 600	体表与浅表体腔各科手术、理疗
气体	Ar ⁺	连续	488;514.5	眼科、皮肤科、内镜手术、针灸、全息照相、微光束技术、扫描共聚焦显微镜
气体	N ₂	脉冲	337.1	肿瘤科、理疗、基础研究
气体	He-Cd	连续	441.6	肿瘤荧光诊断、针灸、理疗
气体	ArF	脉冲	193	眼科 PRK
气体	XeCl	脉冲	308	血管成形术
气体	Cu	脉冲	510.5;578.2	PDT、皮肤科
液体	Dye	连续、脉冲	300~1300	眼科、PDT、皮肤科、内镜治疗、细胞融合
半导体	半导体	连续、脉冲	330~34 000	各科手术、内镜治疗、基础研究、弱激光治疗

激光治疗机通常由激光器、与之耦接的导光系统以及支架、排烟装置等辅助设备构成。导光系统有光导纤维与机械关节臂两类,前者利用全反射原理使光在芯体中无损传输,后者利用反射定律使光路在关节处能较灵活地改变,以到达输出端。

五、激光的危害与防护

激光对人体可能造成的危害有两类。一类是直接危害,即超阈值的激光照射将对眼睛、皮肤、神经系统以及内脏造成损伤。另一类是与激光器有关的危害,即电损伤、污染物、噪声、软 X 射线以及泵或管的爆裂等。

为此应采取的安全措施也有两方面。一方面是对激光系统及工作环境的监控管理。激光器因其辐射危害而分为四类,对其应有明显的专用标志,应有自动显示、报警、停车等装置。室内应充分通风,光线充足,有吸、排烟装置消除有害物质等。另一方面是个人防护。对人员要培训,严格按规章操作。避免直接或间接(反射或漫反射)的激光照射,佩戴与激光输出波长相匹配的防护眼镜以及尽量减少身体暴露部位,以使人体接触的激光剂量在国家安全标准之内。严格实行医学监督,定期对工作人员进行体检也十分必要。

思考题与习题十八

- 18-1 什么是自发辐射与受激辐射? 各有什么特点?
- 18-2 什么是粒子数反转分布? 实现粒子数反转分布需要什么条件?



- 18-3 试述激光产生的基本思想。
- 18-4 试述激光器的基本组成及作用、激光输出的过程。
- 18-5 激光与自然光相比有哪些特点?
- 18-6 激光有哪些生物作用? 影响激光生物作用的因素有哪些?
- 18-7 什么是激光的物理剂量? 什么是激光的生物剂量?
- 18-8 激光在医学领域有哪些主要应用?
- 18-9 如何采取对激光的防护措施?

(童家明)

第十九章 核磁共振

学习要求:

1. 掌握核磁共振的基本概念。
2. 理解核磁共振谱反映物质结构的原理。
3. 理解磁共振成像临床诊断的物理学依据。
4. 能够叙述磁共振成像过程。
5. 了解磁共振技术在医学中的应用现状。

1924 年奥地利-瑞士物理学家泡利(Pauli)为解释原子光谱中的精细结构(fine structure)问题,提出了磁场中电子轨道的空间量子化理论,成功地解释了原子核的磁性。1939 年美国物理学家拉比(Rabi)等发展了真空分子技术,首次观察到核磁共振现象。由于拉比在共振法测量原子核磁性以及在探讨核力的固有性质、寻求适当核模型等方面的成绩,而荣获 1944 年诺贝尔物理学奖。1946 年美国哈佛大学的珀塞尔(Purcell)等用吸收法和斯坦福大学的布洛赫(Bloch)等用感应法几乎同时独立测得石蜡和水的核磁共振吸收。现在人们已很熟悉,核磁共振(nuclear magnetic resonance, NMR)是物质原子核磁矩在外磁场的作用下,能级发生分裂,并在外加射频场的能量条件下产生能级跃迁的现象。这一发现使人们在探索物质微观结构的许多重要规律时,如核的磁性、磁旋比、核自旋弛豫时间及固体中核之间的距离等,增添了一项重要的研究技术。珀塞尔和布洛赫由于在探索物质微观结构领域里做出的重大贡献而荣获 1952 年诺贝尔物理学奖。1958 年,穆斯堡尔(Mossbauer)发现了铱(iridium, Ir)原子核在低温下的 γ 射线的共振吸收,它是原子核基态与激发态之间的核磁共振现象。穆斯堡尔荣获 1961 年诺贝尔物理学奖。自 1950 年开始,人们进一步发现在恒定磁场中,同一种核由于所处的化学环境不同,它们的共振频率略有差异,这就吸引了许多化学家、特别是有机化学人员用 NMR 技术来研究物质的分子结构,提出了化学位移的理论,使 NMR 技术成为化学家手中强有力的研究手段。于是进一步发现谱线的精细结构,以及这种精细结构与分子结构的关系,反过来又刺激高分辨 NMR 技术的发展。20 世纪 80 年代瑞士苏黎世大学厄恩斯特(Ernst)等用短而强的射频脉冲取代传统的射频扫描,极大地提高了 NMR 测量的灵敏度和分辨率,使高分辨 NMR 谱仪的应用得到前所未有的发展,厄恩斯特也因此荣获 1991 年诺贝尔化学奖。在磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)领域里,美国纽约州立大学劳特伯(Lauterbur)于 1973 年在《Nature》上首先发表一种叫做“Zeugmatography”(即组合层析成像法)MRI 方法的论文,文中说明了几个方向梯度场的用法以及通过反投影法用各个方向梯度所产生的一维谱来建立二维图像的方法,且证明这一技术可用于生物系统;紧接着英国物理学家曼斯菲尔德(Mansfield)又发表了“选择激发序列”的成像方法,从此 MRI 得到空前的发展,如今 MRI 已成为临床诊断的重要手段,劳特伯和曼斯菲尔德也终于在 2003 年荣获诺贝尔医学奖。

第一节 核磁共振的基本概念

核磁共振的基本概念主要包括:原子核的自旋和磁矩,自旋磁矩在外磁场中的能量状态,产生核磁共振的条件,拉莫尔(Larmor)进动,宏观磁矩,射频场对宏观磁矩的作用,弛豫过程和弛豫时间等。



一、原子核的磁矩

1. 磁场中的磁矩 将一根长度为 l , 磁极强度为 m 的条形磁铁放在均匀的磁场中, 如图 19-1 所示, 当磁铁与磁场正交时, 磁铁所受的力矩 M 最大, 即

$$M = fl = mB_0 l = mlB_0 \quad (19-1)$$

式中 B_0 表示外加磁感应强度, 单位是特斯拉 (Tesla, T), 式 (19-1) 表明 M 与 B_0 成正比。由于 m 和 l 是磁铁的固有性质, 与外磁场无关, 因此将 m 与 l 的乘积叫做条形磁铁的磁矩 (magnetic moment)。如果把环形电流放在均匀的磁场中, 当环形电流的平面与磁场方向平行时, 磁场作用在环形电流的最大力矩为

$$M = iSB_0 \quad (19-2)$$

式中 i 为电流强度, S 为环形面积, i 与 S 的乘积称为环形电流的磁矩。因此磁矩可认为是磁铁或环形电流在一均匀磁场中, 当 B_0 为一单位磁感应强度时, 作用在磁铁或环形电流的力矩。磁矩是一个矢量, 用 μ 表示, 单位是 $\text{J} \cdot \text{T}^{-1}$ 。

当具有磁矩为 μ 的环形电流在磁场中转动时, 它所具有的势能与磁矩 μ 和外磁场 B_0 成正比, 还与它们的夹角 ϕ 有关, 即

$$E = -\mu B_0 \cos \phi \quad (19-3)$$

从式 (19-3) 中可以看出, 当 $\phi = \pi$ 时, $E = \mu B_0$, 环形电流在磁场中的势能最大, 这时力矩虽然为零, 但不稳定; 当磁矩方向稍有偏转, 就要转到 $\phi = 0$, $E = -\mu B_0$, 即势能最小的稳定平衡位置。

2. 原子核的磁矩 学习原子核和放射性一章后我们知道, 原子核具有角动量 (习惯上称为核自旋) P_I , 同时具有核磁矩。根据量子力学的观点, 原子核的自旋角动量大小只能取一系列不连续的值, 即 $P_I = \sqrt{I(I+1)}\hbar$, 式中 \hbar 为约化普朗克常量, I 称为核自旋量子数 (spin quantum number), 它的值由构成原子核的质子和中子数目决定; 如果质子数和中子数都是偶数的原子核, 自旋量子数 $I=0$, 如 ^{12}C 、 ^{16}O 等; 而质子数和中子数只有一个为奇数的原子核, $I=(2n+1)/2$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 如 ^1H 、 ^{19}F 、 ^{31}P 等; 质子数和中子数都是奇数的原子核, $I=n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 如 ^6Li 、 ^{14}N 等。

当自旋核处于磁感应强度 B_0 中, 它的轴向与磁场方向成一角度 ϕ , 因此自旋核在自身旋转的同时, 又以 B_0 为轴进动 (precession), 又称为旋进, 如图 19-2(a), 于是从式 (19-3) 得知其能量为 $E = -\mu_I B_0 \cos \phi$, μ_I 为核磁矩。根据量子理论的观点, 该能量是量子化的。因此 μ_I 在 B_0 方向的分量可以表示为

$$\mu_k = m_l g_N \mu_N \quad (19-4)$$

式中 m_l 为自旋磁量子数 (magnetic quantum number), 其值等于 $I, I-1, I-2, \dots, -I$ 。当 $m_l = I$ 时, μ_k 有最大值 $g_N \mu_N I$ 。

对于一个 $I=3/2$ 的核, 在磁场中的自旋状态可以有 4 个取向, 即 $m_l = 3/2, 1/2, -1/2$ 和 $-3/2$, 如图 19-2(b) 所示, 与此相应的能量为

$$E_1 = -\frac{3}{2} g_N \mu_N B_0$$

$$E_2 = -\frac{1}{2} g_N \mu_N B_0$$

$$E_3 = \frac{1}{2} g_N \mu_N B_0$$

$$E_4 = \frac{3}{2} g_N \mu_N B_0$$

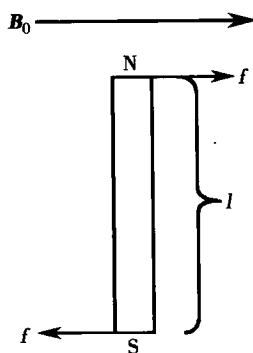


图 19-1 磁体在均匀的磁场中

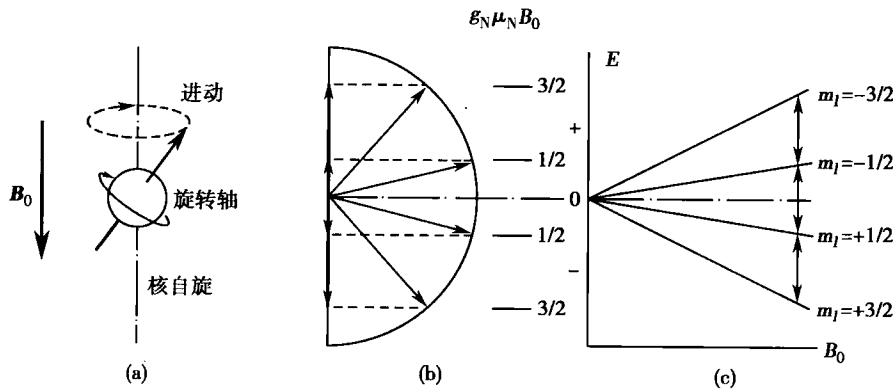


图 19-2 原子核在磁场中的取向

(a) 在 B_0 中的进动 (b) $I=3/2$ 的核在磁场中的取向 (c) 核能级分裂

自旋量子数为 I 的原子核在磁场作用下,核能级可分裂为 $2I+1$ 个,如图 19-2(c),相邻两能级的能量差为

$$\Delta E = g_N \mu_N B_0 \quad (19-5)$$

由式(19-5)可知能级差 ΔE 与 g_N 、 μ_N 、 B_0 有关。在核磁共振波谱和磁共振成像的开始阶段,主要是研究质子,即氢核 ^1H ,这是因为在人体和各种有机化合物中氢核占的比例很大,核磁共振信号强和灵敏度高。氢核有一定的质量,带有一个基本单位正电荷,有自旋和磁矩,其自旋量子数 $I=1/2$ 。氢核磁矩又称质子磁矩,用 μ 表示。在通常的情况下,组成物体的原子核系统的 μ 是杂乱无章分布的,每个磁矩的方向都是随意的,磁矩间的磁性相互抵消,对外不表现磁性。但当它处在外磁场中,其方向取两种平衡状态:即平行或反平行于外磁场,如图 19-3(a)所示,上图为稳定平衡,势能低;下图为不稳定平衡,势能高。它们的能量差 $\Delta E = 2\mu B_0$, B_0 是外加磁感应强度,这种现象叫做塞曼效应(Zeeman effect),如图 19-3(b)。

从宏观上看,若氢核系统处于外磁场中,由于平行于 B_0 的分量多于反平行于磁场的分量,使得氢核磁矩不能完全互相抵消,于是在外磁场方向便出现一个磁矩,即

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mu_i \neq 0 \quad (19-6)$$

这是氢核磁矩从无序排列变成有序排列的结果。磁场愈强、氢核磁矩取向一致的倾向愈强烈,物体表现出磁性愈明显,这个磁矩叫做宏观磁化矢量(macroscopic magnetization)或宏观磁矩,用符号 \mathbf{M} 表示,如图 19-4。

二、核磁共振条件和拉莫尔方程

1. 磁矩在磁场中的运动 在外磁场中氢核磁矩受到外磁场的作用,在自身旋转的同时

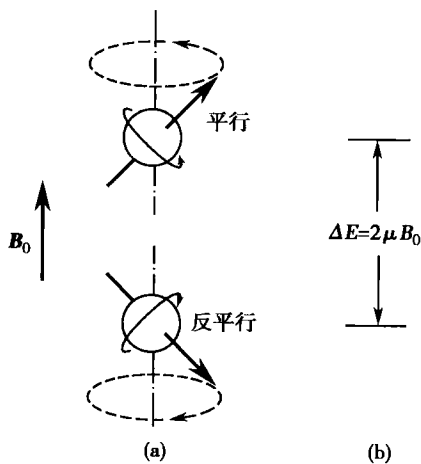


图 19-3

(a) 氢核磁矩取平行或反平行于 B_0

(b) 氢核磁矩产生塞曼分裂

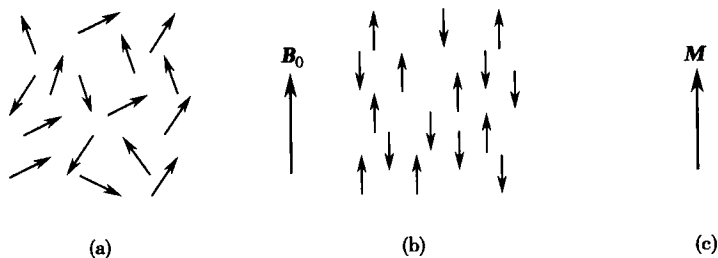


图 19-4

(a) 无外磁场 (b) 外加磁场 B_0 (c) 样品在外磁场中的宏观磁矩 M

又以 B_0 为轴进动,如同陀螺在旋转的时候一样,当其转轴偏离竖直方向时,就会一边自旋,一边又绕竖直方向转动。陀螺旋进是受重力的作用,而磁矩的旋进是受外磁场 B_0 的作用。按照量子理论,当原子核处在外磁场,同时又在频率为 ν 的射频(radio frequency, RF)电磁场的作用下,若其量子能量 $h\nu$ 等于能级的能量差 ΔE 时,处于低能级的原子核就有可能吸收 RF 能量跃迁到高能级。此时 $\Delta E = h\nu = g_N \mu_N B_0$ 或 $\nu = g_N \mu_N B_0 / h$, 这个式子又可写成

$$\nu = \gamma B_0 / 2\pi$$

式中 $\gamma = \frac{g_N e}{2m_p}$ 叫做原子核的磁旋比(gyromagnetic ratio), 由此可得

$$\omega = 2\pi\nu = \gamma B_0 \quad (19-7)$$

式中 ω 叫做进动角频率,又称为拉莫尔频率(Larmor frequency), 这个公式就是著名的拉莫尔方程(Larmor equation)。从式(19-7)可知拉莫尔频率的大小与外磁感应强度成正比。式中 γ 是一个与原子核性质有关的常数,不同种类的原子核, γ 大小不同。例如 ^1H 的 γ 为 $42.58\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}$, ^{31}P 的 γ 为 $17.24\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}$, ^{23}Na 的 γ 为 $11.26\text{MHz} \cdot \text{T}^{-1}$ 。图 19-5 是几种原子核的进动角频率 ω 与磁感应强度 B_0 的关系。同样从拉莫尔公式可知,对同一种原子核,因 γ 相同,磁场愈强,原子核的旋进频率就愈高。对 ^1H 核,在 $B_0 = 0.5\text{T}$ 、 1.0T 时,其共振频率为 21.29MHz 、 42.58MHz ;

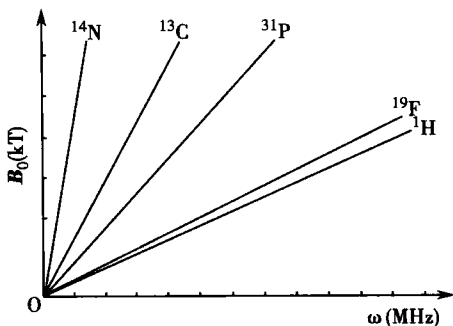


图 19-5 几种原子核的 ω 与 B_0 的关系

对同一种原子核,在相同的磁场作用下,因 γ 不同,其旋进频率也不相同,例如,同样是在 2.0T 的磁场中, ^1H 核的共振频率为 85.16MHz , ^{31}P 核的共振频率为 34.48MHz ,而 ^{23}Na 核的共振频率则为 22.52MHz 。

2. 核磁共振 处于磁场中的氢核磁矩,若同时在垂直于 B_0 方向上施加一个交变电磁场即 RF,当 RF 的频率满足拉莫尔公式时,氢核磁矩就有可能吸收 RF 的能量,使部分氢核被激发,这种现象称为共振吸收。停止 RF 照射,处于激发态的氢核磁矩将会回到低能态,同时发射 RF,整个吸收和发射的过程称为核磁共振,简称磁共振(magnetic resonance, MR)。要使原子核发生共振吸收,在实验中一般采用两种方法:一种是固定外磁场 B_0 ,连续改变 RF 的频率或用射频脉冲,当 ω 满足拉莫尔公式时,就发生共振吸收,这种方法叫做扫频法;另一种是保持 RF 的频率,连续改变外磁感应强度,当外磁感应强度满足拉莫尔公式时,就发生共振吸收,这种方法叫做扫场法。扫频法多用于获得样品的磁共振谱,扫场法主要使用在磁共振成像中,但在体波谱的 MRI 仪中也用到扫场法。



宏观磁矩 M 与 RF 之间发生共振吸收, M 与 B_0 方向的夹角将发生变化。如在瞬间使用拉莫尔频率的 RF, 使宏观磁矩 M 与 B_0 方向的夹角变化 α 角, 即这个电磁辐射就是一个 α 角的 RF 脉冲。当 α 为 90° 和 180° 时, 分别称为 90° RF 脉冲和 180° RF 脉冲, 如图 19-6 所示。去掉电磁辐射场后, 氢核磁矩又会把吸收能量中的一部分以电磁辐射的形式发射出来, 称为共振发射。大量氢核磁矩吸收和发射能量, 都会在环绕氢核系统的接收线圈上产生感生电动势, 这就是磁共振信号 (MR signal), 其强度与参与共振的氢核数目和射频脉冲过后提取信号的时刻有关, 图 19-7 是检测 MR 信号框图。

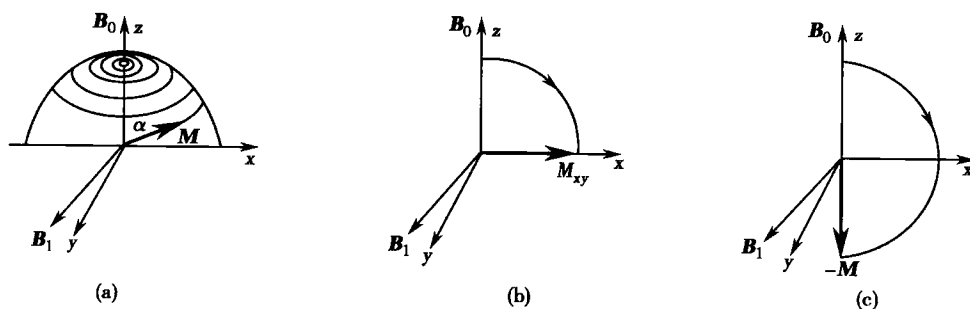


图 19-6 α 角的射频脉冲

(a) α 角射频脉冲使 M 偏离 z 轴 α 角 (b) 90° 射频脉冲使 M 偏离 z 轴 90° (c) 180° 射频脉冲使 M 偏离 z 轴 180°

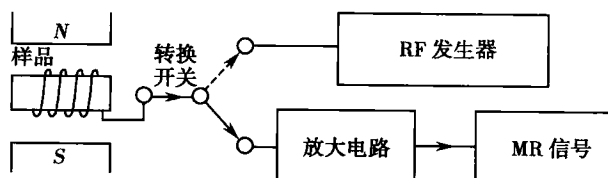


图 19-7 检测 MR 信号框图

观察 MR 信号有两种方法, 一种是 MR 信号强度随时间的变化, 叫做自由感应衰减信号 (free induction decay, FID), 另一种是由 FID 信号经傅里叶变换 (Fourier transform, FT) 后得到的 MR 信号随频率变化的波形, 图 19-8 给出氢核 MR 信号的两种波形。

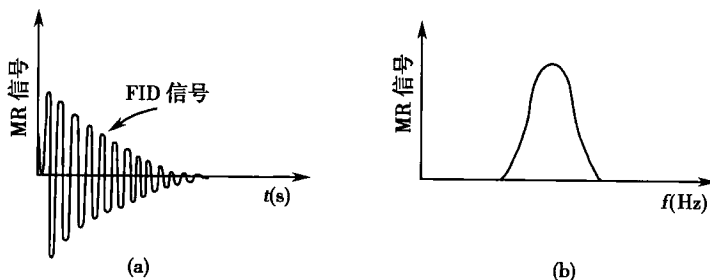


图 19-8 MR 信号的波形

(a) FID 信号 (b) FID 经 FT 的 MR 信号

三、弛豫过程和弛豫时间

大量氢核磁矩顺着磁场方向排列的状态, 并不随时间变化, 称为稳定平衡状态。若受到电磁辐射的激发, M 的方向就要偏离平衡状态, 这时氢核磁矩就不能长久保持这种状态, 而



是要逐渐恢复到平衡状态。这个恢复过程称为弛豫过程,它反映了不同氢核之间以及氢核与周围环境之间相互作用的过程。为了叙述方便,弛豫过程分两步进行描述,且规定顺磁场方向称为纵向,垂直于磁场方向称为横向。第一步是氢核之间达到平衡,即氢核磁矩在水平方向(横向)趋于平衡状态,各磁矩旋进的相位完全错乱。这一过程如同在环形跑道上赛跑,开始时参赛者都在同一条起跑线上,而后由于各人的速度不同而被拉开距离,当跑的圈数足够多时,参赛者则随机分散在跑道上。氢核磁矩从不平衡状态到平衡的变化过程中,也要经历这种分散的过程,完全分散时各磁矩在水平方向的磁性将互相抵消,从宏观上看磁矩水平分量趋于零,这个过程称为横向弛豫。从物理学的观点看这个过程是同种核相互交换能量的过程,故又叫做自旋-自旋弛豫过程。第二步是整个氢核磁矩系统与周围环境之间恢复到平衡状态。这个过程是氢核系统吸收能量,偏离磁场方向,其宏观磁矩在纵向的分量由小到大,最后达到未偏离磁场方向以前宏观磁矩的大小,所以这个过程叫做纵向弛豫。由于这个过程是氢核与周围物质进行热交换,最后达到热平衡,故又叫做自旋-晶格弛豫过程。图 19-9(a),(b)形象地反映这两种过程最终使宏观磁矩恢复到平衡状态的情况。从图中可以看出偏离平衡位置是由于吸收了外界的能量,而它的恢复过程必然伴随着能量的释放,所以纵向磁化矢量(longitudinal magnetization) M_z 的恢复与横向磁化矢量(transverse magnetization) M_{xy} 的衰减对应着不同的能量交换机制,都有各自的规律。对 90° 脉冲来说,纵向磁化矢量 M_z 的恢复可用下列方程来描述

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}$$

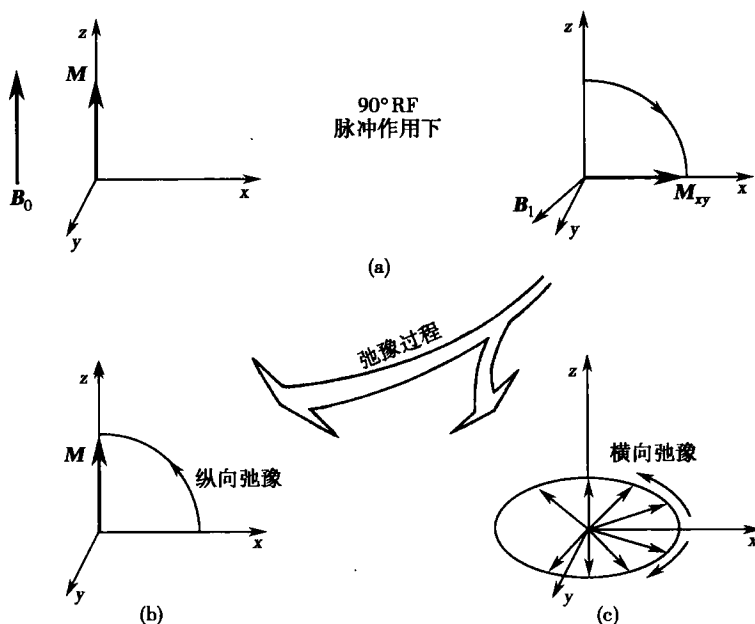
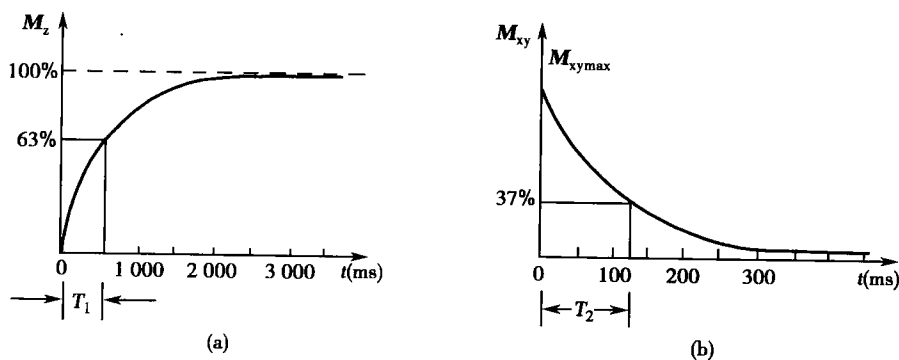


图 19-9 两种弛豫使 M 恢复到平衡态过程

方程的解是

$$M_z = M_0 (1 - e^{-t/T_1}) \quad (19-8)$$

式中 M_0 是 90° RF 脉冲作用前氢核系统的宏观磁矩, T_1 称为纵向弛豫时间或自旋-晶格弛豫时间(spin-lattice relaxation time),习惯上用 M_z 达到最大值 M_0 的 63% 时所需的时间来确定其大小,如图 19-10(a),不同组织的 T_1 值有很大差异。横向宏观磁矩 M_{xy} 的衰减也有自

图 19-10 弛豫时间 T_1 和 T_2 (a) M_z 恢复过程与 T_1 值 (b) M_{xy} 衰减过程与 T_2 值

的运动规律,对于 90°RF 脉冲,其衰减可用如下方程描述

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = -\frac{M_{xy}}{T_2}$$

方程的解是

$$M_{xy} = M_{xy\max} e^{-t/T_2} \quad (19-9)$$

用图 19-10(b)表示 M_{xy} 衰减过程,式中 $M_{xy\max}$ 是 90° 脉冲过后,宏观磁矩在水平方向的最大值, T_2 称为横向弛豫时间或自旋-自旋弛豫时间 (spin-spin relaxation time),它是 M_{xy} 损失 63% 时所需的时间,所以经过一个 T_2 时间, M_{xy} 还剩余 $M_{xy\max}$ 的 37%,不同组织的 T_2 值也不相同。从图 19-10 中可知,恢复到平衡状态时,开始时变化非常快,以后逐渐减慢。对 T_1 、 T_2 小的组织,说明弛豫进行得快,而 T_1 、 T_2 大的组织,弛豫进行得慢。需要特别指出的是尽管为了叙述的方便我们将弛豫过程分为纵向弛豫和横向弛豫,但它们是同时进行的两个过程。

第二节 核磁共振谱

MR 信号除了包含有自旋核密度 ρ 及其 T_1 、 T_2 的信息外,还可以从谱线的宽度、形状、面积以及谱线的精细结构,来了解原子核的性质和原子核所处的环境。这就使人们能通过核磁共振谱 (magnetic resonance spectroscopy, MRS) 的特征来确定各种分子结构,特别是它能在体获取氢谱、碳谱和磷谱等人体中起重要作用元素的谱图,因此它在生物医学基础研究及临床研究与诊断方面,能提供许多很有价值的信息。

一、谱线宽度

从核磁共振的理论可知,只要满足拉莫尔方程,就能得到很窄的共振谱线,但在实际情况中,由于一些因素存在使谱线具有一定的宽度。

1. 自然宽度 根据量子力学的测不准关系,处在某能级上的粒子寿命与该能级能量值的弥散之间存在着 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ 的关系,而粒子处在这个能级的寿命 Δt 是一个有限的值, ΔE 就有一定的宽度,就是说能级之间跃迁的频率就不是一个单一的值,而是一个以 ν_0 为中心的频带,称为谱线的自然宽度。由于磁共振是在射频场激发下加速能级间的跃迁,使 Δt 缩短,加宽了 ΔE 。

2. 偶级加宽 由于样品中每个核都有自旋和磁矩,都将产生局部磁场,而核与核之间产生相互作用,使共振频率分散为频带;另外同一种核是同步进动的,由于相互感应将引起



能量的传递,从而缩短了核在该能级的平均寿命,使谱线加宽,这种加宽称为偶级加宽。

3. 非均匀性加宽 由于外加磁场不均匀,使共振核的进动频率不完全一致,谱线将会明显加宽,这种由于外加磁场不均匀性造成的谱线加宽,称为非均匀性加宽。

4. 形状和面积 谱线具有一定的宽度,说明共振谱线有一定的线型。而谱线的具体形状与核的分布有关,对液体样品常用 Lorentz 线型表示,谱线形状的特点是峰较高,底的宽度较窄,如图 19-11(a)。谱线的宽度用半高宽 $\Delta h_{1/2} = 2/T_2$ 表示,通过测定谱线的半高宽可以测定 T_2 的大小。对固体样品用 Gauss 线型表示,其特点是峰较平坦,谱线两侧斜率最大处两点之间的距离定为谱线的宽度,即 $\Delta h = \sqrt{2\pi}/T_2$,如图 19-11(b)。这两种谱线宽度的表示式都与 T_2 有关,这是在假定外磁场是均匀的,仅仅是由于自旋-自旋相互作用的结果。若考虑到外磁场的非均匀性对线型的影响,则引用一个等效的横向弛豫时间 T_2^* 来描述这一作用过程,并用 T_2^* 表示 T_2 和 T_2' 的综合效应,即

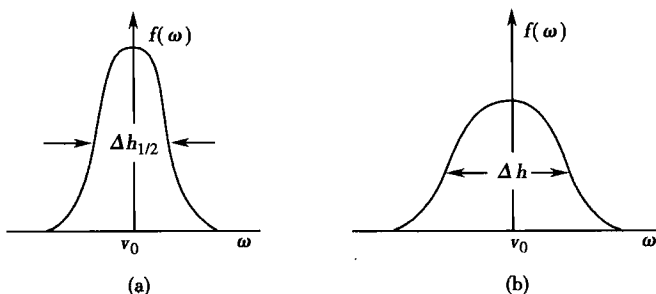


图 19-11 谱线的形状

(a) Lorentz 线型 (b) Gauss 线型

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2'} \quad (19-10)$$

磁共振谱线所包围的面积和参与共振的核数目成正比,通过积分求出不同谱线包围面积之比,可得知参与共振的不同原子核的数目之比,这将为物质结构分析提供了重要依据。

二、化学位移

从拉莫尔公式人们可以认为对同一种核,因其 γ 和 g 相同,它就只能在一个与 ω 相对应的 B_0 值处发生共振吸收。但实际情况要复杂得多,因为对某一个核来说,样品中其他核和电子云在外磁场 B_0 的作用下,在这个核周围将产生微弱的局部磁场,即附加磁场,对 B_0 起到屏蔽作用。所以这个核实际所处的磁场应是 $B = (1 - \sigma)B_0$, 式中 σ 叫做屏蔽系数,它的值取决于外磁场的强度和具有这些磁矩的核和电子的空间位置,即距离和角度。磁共振之所以能在实验中观测,并能广泛应用于物质结构的分析,都是与这种错综复杂的多粒子空间结构的存在分不开的。所以在相同条件下测得相同原子核的磁共振谱,由于原子的化学结合状态不同而产生的谱线位置偏移现象,称为化学位移(chemical shift)。如图 19-12 是乙基苯的质子谱线。乙基苯有 C_6H_5 、 $-CH_2-$ 、 $-CH_3$ 三个原子团,属于这三个原子团中的氢核,由于它们的结合状态不同,其谱线位移的程度也不相同,结果产生了与这三种氢核相对应的三条吸收谱线。在共振谱中,化学环境不同的各个不同类核,发生共振的频率或

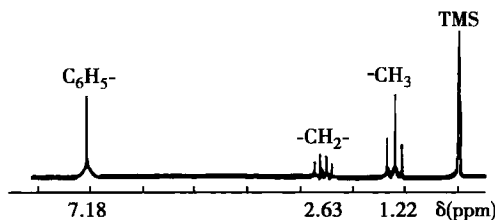


图 19-12 乙基苯¹H核的磁共振谱



场强还随外磁感应强度而改变(因为化学位移是由外磁场所感生的)。另外,还随着其他测量条件和每套设备而有所不同,因此很难用频率或场强的绝对值来表示化学位移的大小。为了消除这种影响,通常选择适当的参考物质,以其谱线的位置为标准来确定化学位移的相对大小。并用化学位移 δ 来表示这种共振吸收的外磁场值的不同,于是

$$\delta = \frac{B_0' - B_0}{B_0'} \times 10^6 \quad (19-11)$$

单位是百万分之一(part of permillion, ppm), B_0' 、 B_0 分别表示参考物质和样品发生共振时的外加磁场,对 ^1H 谱常用四甲基硅(CH_3) $_4\text{Si}$ (tetramethylsilane, TMS)作为参考物质,因为它只有一个峰,屏蔽作用强,而且一般化合物的峰大都出现在它的左边,所以用它的信号作化学位移的零点,其数量级在 10^{-6} 左右。这样,氢原子核处于不同化合物中,发生磁共振的频率不同,相差范围约 10ppm,图 19-13 是几种化合物中 ^1H 的化学位移。

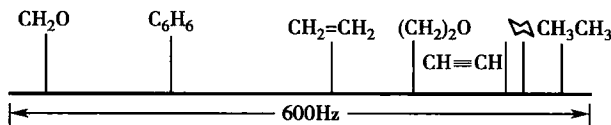


图 19-13 几种化合物中 ^1H 核的化学位移

化学位移可反映分子结构,如某未知样品的磁共振谱,如果在某一化学位移处出现谱线,就说明可能有某一化学基团存在,图 19-12 中 $-\text{CH}_3$ 基团的谱线出现在 1.22ppm 处, $-\text{CH}_2$ -基团的谱线出现在 2.63ppm 处, C_6H_5 -基团的谱线出现在 7.18ppm 处,于是可推知是 $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{CH}_3$ (乙基苯)的磁共振谱。

三、自旋-自旋劈裂

图 19-14 是硝基丙烷的磁共振谱,从图中可看到 CH_3 -基团有三条谱线, $-\text{CH}_2$ -基团有 6 条谱线,而靠近 $-\text{NO}_2$ 基团的次甲基则有三条谱线。这种吸收峰分裂为多重线是由基团间核自旋磁矩的相互作用引起的,这种作用称为自旋-自旋劈裂(spin-spin splitting)。这种分裂与化学位移不同,它与外磁感应强度无关。图中 CH_3 -基团通过结合电子与 $-\text{CH}_2$ -中的两个氢核发生相互作用,使由于化学位移已经分裂的谱线又进一步分裂成三条谱线, $-\text{CH}_2$ -基团则受到 CH_3 -和 $-\text{CH}_2$ -基团中五个氢核的作用而分裂成六条谱线,靠近 $-\text{NO}_2$ 基团的 $-\text{CH}_2$ -则只受到左边 $-\text{CH}_2$ -基团中两个氢核的作用而分裂成三条线。所以对自旋量子数 $I=1/2$ 的氢核,分裂的谱线的条数有一个简单的规律,即某一原子核集团的等价核数为 n ,则另一集团的原子核的谱线受到这 n 个等价核的作用就分裂为 $n+1$ 条谱线。按照这个规律,很容易解释图 19-12 中乙基苯的吸收谱线进一步分裂的谱线数目。从谱线分裂可以了解分子中基团间

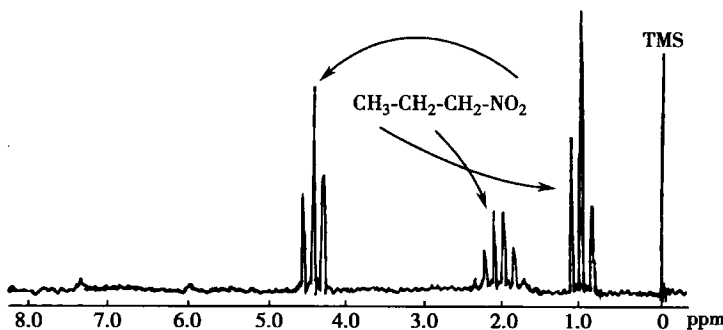


图 19-14 硝基丙烷的磁共振谱



彼此关系,确定相对排列位置,提供分子结构的信息。

化学位移、自旋-自旋劈裂和第一节介绍的核磁弛豫过程是磁共振在化学应用中的基础,它在磁共振波谱分析中是十分重要的,但对它的解释有较为专门的理论,这里只作了简要介绍。

四、磁共振波谱仪

磁共振波谱仪是用来观测在磁场和 RF 作用下的原子核,按连续波扫频和扫场的程序,使处于不同化学环境的原子核分别发生能级跃迁,而获得原子核对射频的共振吸收图的仪器。检测这种吸收的方法有两种:一种叫做吸收法,它是当样品中的原子核向邻近能级跃迁而吸收能量时,发射回路的负载发生变化,将这种变化记录下来;另一种叫做感应法,它是原子核由低能级吸收能量跃迁到高能级,返回低能级时释放的射频波,在样品周围设有接收线圈,测量这个线圈中由于样品吸收或释放能量时产生的感生电动势,就是磁共振信号。由于研究对象和要求不同,仪器的结构也不完全一样,下面只介绍常用于测量化学位移和谱线分裂用的高分辨磁共振波谱仪。

1. 仪器组成部分

(1) 磁场系统:仪器要求有一个能产生高场强(早年用过永磁铁,目前主要用超导磁场,其磁场通常在 1.5T 以上)、高均匀度(homogeneity)和稳定度(stability)的主磁场。保持主磁场磁感应强度 B_0 不变,并在其上叠加一个可以在小范围内连续改变磁感应强度的装置,如图 19-15 中用的扫描线圈,叫做亥姆霍兹线圈(Helmholtz's coil),使磁场缓慢地改变 ΔB ,而进行 $B_0 + \Delta B$ 的扫描。

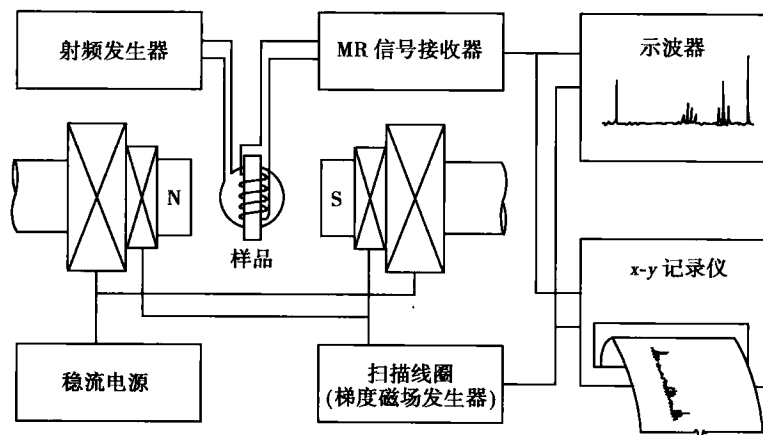


图 19-15 磁共振波谱仪示意图

(2) 射频发生器:辐射频率约 30~1000MHz。对射频发生器要求辐射频率、振幅的稳定性高以及尽可能低的噪音。常见的 ^1H 核谱仪,其射频波频率和相应的磁场有

射频波频率(MHz)	21.290	63.870	85.160	149.030	323.608
外磁感应强度(T)	0.50	1.50	2.00	3.50	7.60

(3) 射频接收器:当射频的角频率 ω 与外磁感应强度满足样品的核跃迁条件时,原子核吸收能量。置于与辐射线圈垂直位置的接收线圈感应到核吸收或放出的电磁波信号,经放大、检波、再放大,最后送到显示系统。

(4) 显示系统:经放大后的信号,可在示波器显示出来,或与扫描线圈做同步运动的自动记录装置描绘成曲线。此曲线就是按样品中核发生共振吸收的位置和参与吸收核的数



目,用 x 、 y 坐标轴显示出来而获得该样品的磁共振谱图。图中横坐标表示射频频率或磁感应强度的相对值,单位是 ppm,纵坐标是共振吸收强度。

2. 仪器的主要性能指标

(1) 射频频率:指工作频率。频率高,化学位移宽,分辨率高。如工作频率是 60MHz 的 ^1H 谱仪,1ppm 的化学位移用频率表示是 60Hz,用磁场表示是 $1.4 \times 10^{-6}\text{T}$ 。而 300MHz 的 ^1H 谱仪,1ppm 的化学位移用频率表示是 300Hz,用磁场表示是 $7.1 \times 10^{-6}\text{T}$ 。

(2) 稳定度(stability):指工作条件不变时,仪器连续画谱,谱线漂移的情况,常以每小时漂移的频率多少表示,如较先进的谱仪标有 $0.01\text{Hz} \cdot \text{h}^{-1}$ 。

(3) 分辨率(resolving power):指共振吸收线中分裂情况,线越细,分裂越好,分辨率越高。如用 100MHz 的 ^1H 谱仪,测定邻位二氯苯四个氢核和产生的特定吸收线的半高宽,如图 19-16 中的箭头所示作为分辨本领的指标,100MHz 的 ^1H 谱仪的分辨本领可达 0.3Hz。

(4) 灵敏度(sensitivity):是指仪器检出弱信号的能力,是磁共振波谱仪重要性指标之一,常用 1% 乙苯中 $-\text{CH}_2-$ 的四重峰中的最高峰与噪声之比来定义,叫做信噪比,用符号 S/N 表示。提高灵敏度可采用计算机累加法(computer of average

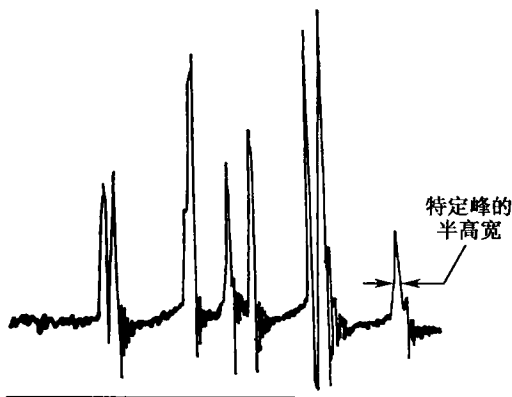


图 19-16 邻位二氯苯磁共振谱

transients, CAT)和脉冲傅里叶变换法(pulse of Fourier transform, PFT)。所谓 CAT 是用计算机将多次扫描的波谱叠加起来,由于噪声是无规则的,而信号是每次叠加的,按统计规律,在多次叠加后, S/N 提高倍数 = (累加次数) $^{1/2}$ 。PFT 则是用短而强的脉冲频谱激发样品中所有同类核,产生的共振信号是一个随时间变化的复合信号 $f(t)$,而用连续波扫描所得到的信号 $f(\omega)$ 是频率的函数,两者之间的关系是

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (19-12)$$

构成傅里叶变换对,即从一个脉冲信号可得到一个 $f(t)$ 的时间函数,用一系列脉冲所得到的 $f(t)$ 再用计算机累加,最后进行傅里叶变换得到 $f(\omega)$,可显著提高信噪比。

第三节 磁共振成像原理

一、磁共振成像的基本方法

磁共振成像的方法很多,无论哪一种成像方法都是基于这样一种指导思想,即怎样用磁场值来标定受检体共振核的空间位置。为了实现这一目的,人们在均匀的主磁场中叠加一个随位置坐标而变化的磁场,这个磁场称为线性梯度场(linear magnetic field gradients)*。由拉莫尔公式可知,沿梯度场方向的位置不同,共振频率不同,于是可以通过梯度场来建立起共振信号与空间位置之间的对应关系。为了重建一幅层面图像,即要建立起不同点的共振信号与位置坐标一一对应关系,首先就要对观测的对象进行空间编码(spatial coding),把

* 由一对同轴直流线圈,每个线圈通以方向相反的电流,使其在轴线上产生线性梯度磁场,单位 $\text{T} \cdot \text{m}^{-1}$ 或 $\text{T} \cdot \text{cm}^{-1}$ 。



研究对象简化为由若干个称为体素(voxel)的小体积所组成,然后依次测量每个体素,或将体素排列成线条或面的信息量,再根据各体素的编码与空间位置一一对应关系实现图像的重建。下面介绍其成像过程。

1. 层面的选择 置成像物体于 z 轴方向的均匀磁场 B_0 中,在均匀磁场上,叠加一个同方向的线性梯度场 G_z ,磁感应强度沿 z 轴方向由小到大均匀改变,如图 19-17 所示。由图可知,垂直于 z 轴方向同一层面上的磁感应强度相同,不同层面(如图中的 1、2、3 层面)梯度场的强度不同(层面箭头的长短不同),方向是箭头所指方向。根据拉莫尔公式,可设计 RF 脉冲的频率,使 2 层面的氢核发生共振,1、3 层面的氢核因不满足拉莫尔公式而不发生共振。若把 RF 脉冲的频率设计为其他层面的拉莫尔频率时,也可以使其他层面的氢核分别发生共振,这一过程称为层面的选择,也叫做选片(selected slice),所以 G_z 称为选片梯度场。

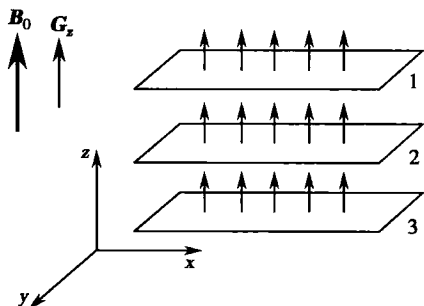


图 19-17 层面的选择

2. 编码(coding) 所谓编码就是把研究的物体层面分为若干个体素,把每个体素标定一个记号,就像一张电影票,上面标有几楼几排几号,有了这个编号,观众可以对号入座。设 z 表示楼层, y 表示排数, x 表示号码,常用 $n_z n_y n_x$ 来标定层面每个体素的标号。图 19-18 是经过选片后取出层面的若干个体素,由于整个层面处于相同的磁场中,故每个体素中的磁矩在磁场中旋进的频率和相位相同。此时沿 x 轴施加一个梯度很小的线性梯度场 G_x ,磁场沿 x 轴由小逐渐增大,显然层面中垂直于

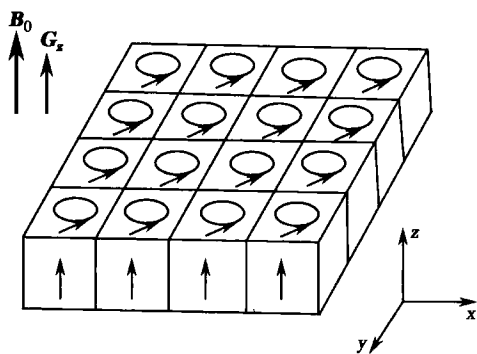


图 19-18 选片后层面的若干个体素

x 轴方向的同一条直线的磁场均相同,而不同直线磁场略有差异,磁矩旋进的速度也不一样,这就使各体素中磁矩旋进的相位发生变化,用这种相位差作为一种标记,可识别沿 x 轴方向的每一条直线各体素的 MR 信号,这一过程称为相位编码(phase coding),图 19-19 只取 x 轴方向一条直线的若干体素。在一定的时间后去掉 G_x ,此时各体素的磁矩仍保持原来的相位差,继续以相同的频率在磁场中旋进。若在接收信号时,再沿 y 轴方向施加一个梯度较大的线性梯度场。这时,层面上垂直于 y 轴方向的同一条直线的磁感应强度相同,而不同直线上的磁场则不同,磁矩旋进也有差异,图 19-20 只取沿 y 轴方向一条直线的若干体素,把磁矩旋进频率的差异作为一种标记,以识别垂直于 y 轴的各条直线上各体素的 MR 信号,这一过程称为频率编码(frequency coding)。由于每个体素具有一定的大小,故体素中各处的磁场也略有差异,但当体素取得足够小时,从宏观上看这种差异在理解成像过程时可以不考虑。

3. 图像重建 经过选片、相位编码和频率编码,把整个层面的体素一一进行标定。由于观察层面中的磁矩是在 RF 脉冲激励下旋进,停止 RF 脉冲照射时,各体素的磁矩在回到平衡态的过程中,磁矩的方向发生变化,在接收线圈中可感应出这种由于磁矩取向变化而产生的感应信号。这个信号是各体素带有相位和频率特征的 MR 信号的总和。为取得层面各

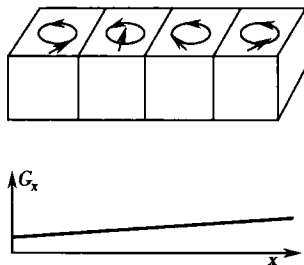


图 19-19 磁矩旋进相位的差异

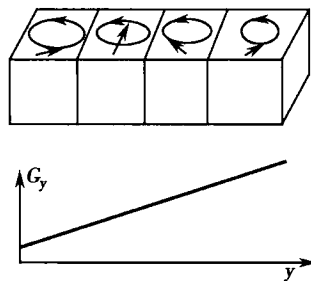


图 19-20 磁矩旋进频率的差异

体素 MR 信号的大小,需要利用信号所携带的相位编码和频率编码的特征,把各体素的信号分离出来,该过程叫做解码(decoding)。这一工作完全由计算机来完成,即计算机对探测到的 FID 信号进行二维傅里叶变换(2 dimension Fourier transform, 2DFT)处理,得到具有相位和频率特征的 MR 信号的大小,最后根据与层面各体素编码的对应关系,把体素的信号大小与对应的像素(pixel)依次显示在荧光屏上,信号大小用灰度等级表示,信号大,像素亮度大;信号小,像素亮度小。这样就得到一幅反映层面各体素 MR 信号大小的图像。图 19-21 是成像过程框图。

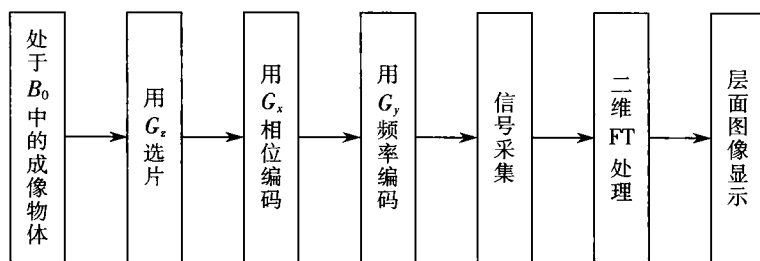


图 19-21 磁共振成像过程框图

二、人体的磁共振成像

1. 氢核是人体成像的首选核种 人体各种组织含有大量的水和碳氢化合物,所以氢核

的磁共振信号强度高,信噪比高,这是人们首选氢核作为人体成像主要核种的原因。人体中氢核的分布



表 19-2 几种人体组织、脏器含水比例

组织名称	含水比例(%)	组织名称	含水比例(%)
皮肤	69	肾	81
肌肉	79	心	80
脑灰质	83	脾	79
脑白质	72	肝	71
脂肪	80	骨	13

3. 人体不同组织的 T_1 、 T_2 值 表 19-3 和表 19-4 列出人体几种正常组织和病变组织的 T_1 、 T_2 值。从表中可以看出人体各种组织的 T_1 、 T_2 值是不相同的,这就提供了用 T_1 、 T_2 值来建立人体组织的分布图像的可能性。这种图像还与氢核的密度有关,所以称为 T_1 、 T_2 加权图像或 T_1 、 T_2 权重图像。人体正常组织与病变组织的含水量和 T_1 、 T_2 值均有所不同,所以可从图像中把病变组织识别出来,从中还可以判断病变的不同发展阶段,为临床诊断提供依据。

表 19-3 几种正常组织在 0.5T 情况下的 T_1 、 T_2 值范围

组织名称	T_1 (ms)	T_2 (ms)	组织名称	T_1 (ms)	T_2 (ms)
脂肪	240±20	60±10	主动脉	860±510	90±50
肌肉	400±40	50±20	骨髓(脊柱)	380±50	70±20
肝	380±20	40±20	胆道	890±140	80±20
胰	398±20	60±40	尿	2200±610	570±230
肾	670±60	80±10			

表 19-4 几种病变组织在 0.5T 情况下的 T_1 、 T_2 值范围

组织名称	T_1 (ms)	T_2 (ms)	组织名称	T_1 (ms)	T_2 (ms)
肝癌	570±190	40±10	前列腺癌	610±60	140±90
胰腺癌	840±130	40±10	膀胱癌	600±280	140±110
肾上腺癌	570±160	110±40	骨髓炎	770±20	220±40
肺癌	940±460	20±10			

人体组织的 MR 信号强度决定于这些组织中氢核密度和氢核周围的环境。这里所说的环境是指人体组织结构和生化病理状态。磁共振原理告诉我们, T_1 、 T_2 反映了氢核周围环境的信息,因此人体不同组织之间、正常组织与该组织中的病变组织之间氢核密度 ρ 和 T_1 、 T_2 三个参数的差异,是 MRI 用于临床诊断最主要的物理学基础。

三、如何产生氢核密度 ρ 和 T_1 、 T_2 加权图像

在 MRI 系统中把成像过程编成程序,即从选片到信号采集,这段程序在 MRI 过程中称为序列, MRI 的序列很多,最常使用的是自旋-回波(spin-echo, SE)序列和反转恢复(inversion recovery, IR)序列。

1. 自旋-回波序列 图 19-22 给出了 SE 序列和用该序列得到的 MR 信号。图中第一个 RF 脉冲为 90° , 在该脉冲作用下,宏观磁矩倒向 xy 平面,接着绕 z 轴旋进。从微观上看氢核磁矩的水平分量 M_{xy} 在 xy 平面内逐渐散开,最后达到彼此的相位完全错乱的状态。 90° 脉冲过后经 τ 时间,再施加一个 180° 脉冲,这时其旋进的速度和方向不变,故原来散开的氢核磁矩又重新聚集起来,于是 M_{xy} 由零开始增大,但达到最大后又散开,后又变为零,这段时间叫做自旋-回波时间,用 T_E 表示,这个信号叫做自旋-回波信号。每施加一个 180° 脉冲后,使得在 xy 平面相位错乱的氢核磁矩又重新聚集,并发出新的自旋-回波信号。这个信号的幅度与施加的 180° 脉冲的时刻有关,并随时间 t 的变化以 T_2 时间常数按指数规律衰减。在重复

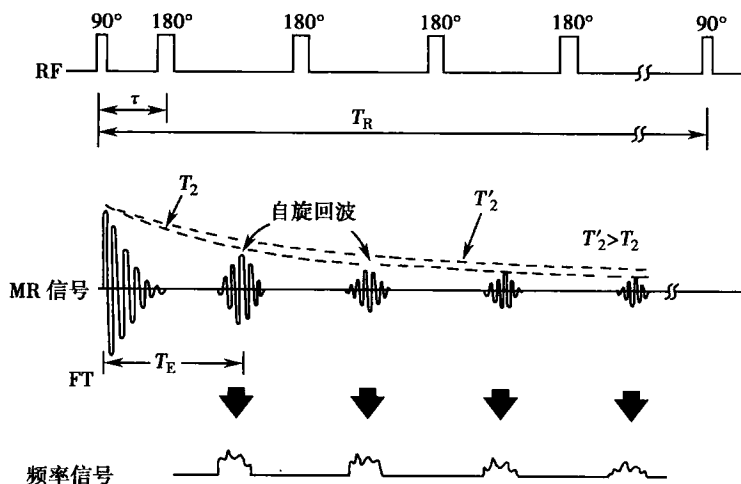


图 19-22 自旋-回波序列

时间(repetition time) T_R 内,磁矩 M 同时完成纵向弛豫过程,即以 T_1 为时间常数按指数规律宏观磁矩由零恢复到 M_0 的过程。由磁共振的原理可以证明,在自旋-回波脉冲序列作用下,MR 信号的幅度满足下式

$$A = A_0 \rho (1 - e^{-T_R/T_1}) e^{-T_E/T_2} \quad (19-13)$$

式中 A_0 为常数, ρ 是氢核密度,下面讨论三种情况。

(1) 当 $T_R \gg T_1$ 、 $T_E \ll T_2$ 时,式(19-13)可简化为

$$A = A_0 \rho \quad (19-14)$$

信号幅度仅取决于氢核密度,用这种信号重建的图像称为氢核密度图像。在实际操作中获得密度图像的典型数据是 $T_E \leq 30\text{ms}$, $T_R \geq 1500\text{ms}$ 。

(2) 当 $T_R \leq T_1$ 、 $T_E \ll T_2$ 时,式(19-13)可简化为

$$A = A_0 \rho (1 - e^{-T_R/T_1}) \quad (19-15)$$

信号幅度由氢核密度和 T_1 决定,用这种信号重建图像称为 T_1 加权图像(T_1 weighted imaging, T_1 WI)。当 T_R 取得愈短, A 受 T_1 的影响愈大,则称 T_1 加权愈重。在实际操作中,获得 T_1 加权图像的典型数据是 $T_R \leq 300\text{ms}$, $T_E \leq 30\text{ms}$ 。在 T_1 WI 中,若氢核密度差别不大,不予考虑时, T_1 大的地方 A 值较小,即图像呈现弱信号;反之, T_1 小的地方 A 值较大,即图像呈现强信号。因此,在 MRI 中,密度相同的组织,只要 T_1 存在差异,就可以通过 T_1 加权图像将其分辨开来。

(3) 当 $T_R \gg T_1$ 、 $T_E \geq T_2$ 时,式(19-13)可简化为

$$A = A_0 \rho e^{-T_E/T_2} \quad (19-16)$$

信号幅度由氢核密度 ρ 和 T_2 决定,用这种信号重建图像,称为 T_2 加权图像(T_2 weighted imaging, T_2 WI)。 T_E 取得愈长,幅度受 T_2 的影响愈大,则称 T_2 加权愈重。在实际操作中,获得 T_2 加权图像的典型数据是 $T_E \geq 60\text{ms}$, $T_R \geq 1500\text{ms}$ 。在 T_2 WI 中,若氢核密度差别不大,不予考虑时, T_2 大的地方 A 值较大,即图像呈现强信号;反之, T_2 小的地方 A 值较小,即图像呈现弱信号。因此,与 T_1 WI 类似,在 MRI 中,密度相同的组织,只要 T_2 存在差异,就可以通过 T_2 加权图像将其分辨开来。

用自旋-回波序列的优点是选用适当的 T_E 和 T_R ,可以用一个脉冲序列获得 ρ 图像和 T_1 、 T_2 加权图像,或者获得不同 T_1 、 T_2 加权程度的图像以及 T_1 、 T_2 同时加权的图像。

2. 反转恢复序列 IR 是用来产生 T_1 加权的磁共振图像,如图 19-23。图中 180° 脉冲是



使系统的 M_0 从 z 倒向 $-z$ 方向,然后在纵向宏观磁矩由 $-M_0$ 向 $+M_0$ 恢复过程中施加一个 90° 脉冲,目的是将这个时刻的纵向宏观磁矩变为横向宏观磁矩,以便使这个横向分量在吸收线圈中产生 FID 信号。这个序列的反转恢复时间 T_1 是指 180° 脉冲和 90° 脉冲之间的时间。在 T_1 时间内不同 T_1 的组织其 $-M_0$ 的恢复程度不同, T_1 短的组织恢复快,FID 信号强; T_1 长的组织恢复慢,FID 信号弱,因此不同组织其在图像中的对比度有明显差别。图 19-24 说明脑组织(brain tissue)和脑脊髓液(cerebrospinal fluid,CSF)纵向弛豫过程和 T_1 的关系,图中脑 T_1 小于 CSF T_1 。当采集信号时间 T_1 与它们的 T_1 相比足够大时,图像的对比度由质子密度 ρ 决定,由于它们的 ρ 相差无几,图像的对比度相差不大,如图 19-24(a);但若 T_1 与脑 T_1 相差无几,这时 T_1 对信号的权重加大,如图 19-24(b);所以 ρ 相近, T_1 不同的组织,用 IR 序列可以提高图像的对比度,鉴别 T_1 不同组织的能力。

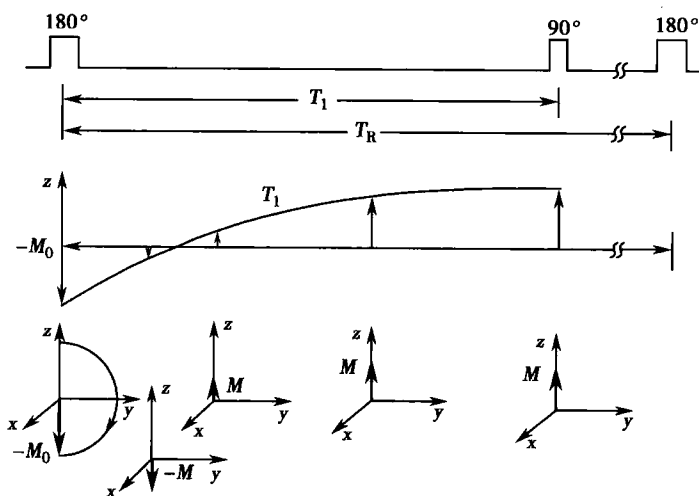
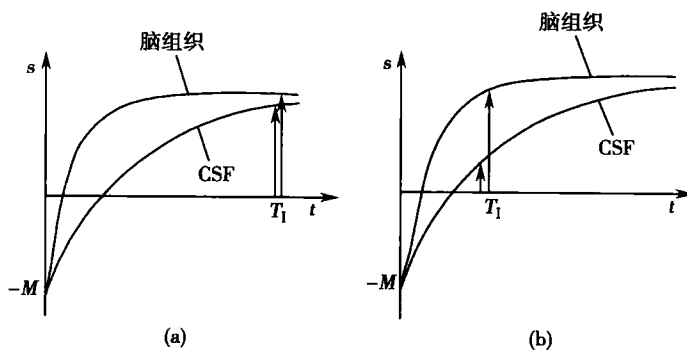


图 19-23 反转恢复序列

图 19-24 用 IR 序列选择不同的 T_1 对对比度的影响(a) $T_1 \gg \text{脑 } T_1$ (b) $T_1 \approx \text{脑 } T_1$

由此可以看出 MRI 与 X-CT、超声等影像相比的最大特点是多参数成像,改变成像序列参数或用不同序列成像可以得到不同的信息。因此 MRI 在临床中有很好的应用前景。

四、磁共振成像临床诊断的物理学依据

1. 氢核密度 ρ 、 T_1 和 T_2 的对比度 MR 信号的强度决定于参与共振的氢核数目和 T_1 、



T_2 值,所以组织中 ρ 的差异可以用来产生图像的对比度,如图 19-25。设具有相同 T_1 值而氢核密度不同的两种不同组织,由图可见除了开始时,在其他任一时刻去采集信号,由于氢核密度不同,造成宏观磁矩大小的差别,这是产生氢核密度对比度(contrast)的信号源。

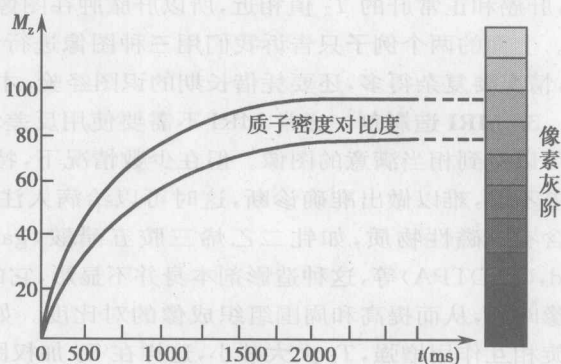


图 19-25 氢核密度不同形成的对比度

图 19-26(a)是脂肪、白质、灰质和脊髓的纵向宏观磁矩恢复曲线,由于它们的 T_1 值不同,故在采集信号时,各种组织的信号强度不同。脂肪的 T_1 最短,信号最强,脊髓的 T_1 长,信号最弱。因此,图像中像素的灰度等级,脂肪最亮、脊髓最暗,白质和灰质介于两者之间。

图 19-26(b)是大脑和脊髓在相同的 RF 脉冲功率作用下,由于它们的氢核相对含量和 T_2 值不同(大脑的 T_2 短,脊髓的 T_2 长),在不同时刻采集信号,其相对强度是不一样的,如 t_1 时刻表现出大脑的信号比脊髓强; t_2 时刻出现等强度的信号;而 t_3 时刻脊髓的信号反而比大脑强。反映在图像中的灰度为: t_1 时刻是大脑比脊髓亮, t_2 时刻二者灰度相同,而 t_3 时刻脊髓比大脑亮。因此在同一层面的 MR 图像,相同部位的组织,在不同时刻采集信号组建的图像,其相对亮度可以截然不同。

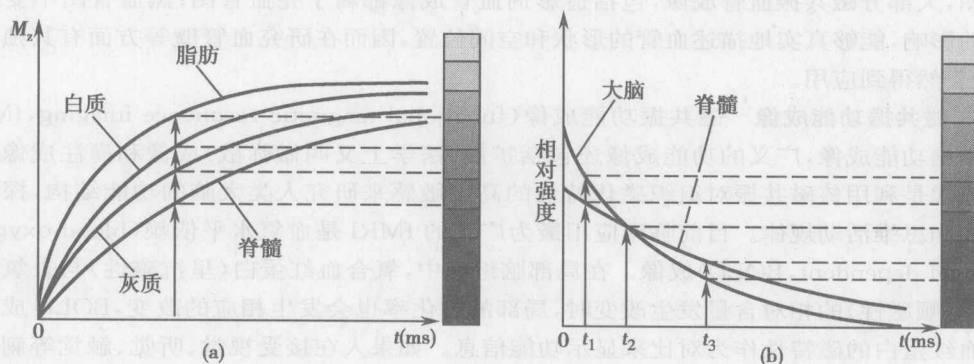


图 19-26 信号采集时间与信号强度

(a) T_1 值不同的组织形成的对比度 (b) T_2 值不同的组织形成的对比度

2. 氢核密度 ρ 、 T_1 、 T_2 三种图像进行诊断的物理学依据 因为密度图像所用的 MR 信号最强、最清晰,分辨率也最高。但是由于人体组织含水比例差别很小(表 19-2),所以图像反差不大,而更主要的是氢核周围的生化、病理信息在图像中反映甚少,其功能与 X-CT 图像相近,未能突出 MRI 的特点。但从表 19-3、19-4 可看出人体不同组织的 T_1 、 T_2 值差别远大于含水比例的差别,这就是 T_1 、 T_2 加权图像的反差比密度图像好的主要原因。同时 T_1 、 T_2 加权图像还能反映氢核周围分子结构、生化特征的信息。下面对用 SE 脉冲序列得到的三种图像加以说明:脂肪的氢核密度较高,在密度图像中比较明亮;脂肪的 T_1 值比其他组织短,所以在 T_1 加权图像中非常明亮;脂肪的 T_2 值与其他组织相差不大,所以在 T_2 图像中相对变暗。正常的肝组织与肝癌、肝脓肿由于氢核密度相差无几,所以在密度图像中没有明显的差别;在 T_1 加权图像中,由于肝脓肿 T_1 很长,肝癌次之,正常肝较短,所以三者灰度等级有明显差别,即肝脓肿最暗,肝癌次之,正常肝较为明亮;在 T_2 加权图像中,由于肝脓肿 T_2 最



长,肝癌和正常肝的 T_2 值相近,所以肝脓肿在图像中变得相当明亮,肝癌和正常肝差别却很小。上面的两个例子只告诉我们用三种图像进行诊断分析的物理学依据,在实际临床诊断中,情况要复杂得多,还要凭借长期的识图经验,才能做出正确的诊断。

3. MRI 造影剂 通常 MRI 不需要使用反差增强剂或称对比增强剂(contrast agents)便可以得到相当满意的图像。但在少数情况下,特别是在 T_2 加权图像中,医生仍觉得由于反差不够,难以做出准确诊断,这时可以给病人注射反差增强剂。MRI 中使用的反差增强剂含有顺磁性物质,如钆二乙烯三胺五醋酸(gadolinium-diethylene triamine penta acetic acid, Gd-DTPA)等,这种造影剂本身并不显影,它的作用在于可以改变组织内部氢核系统的弛豫时间,从而提高和周围组织成像的对比度。如在顺磁性物质存在的条件下,氢核自旋-自旋相互作用增强, T_2 大大减小,这样在 T_2 加权图像中含有顺磁性物质的部分与其他部位的反差便大大增强,有效改变病变部位组织的特征参数,明显提高 MR 图像的分辨力,为病灶的定位和疾病的诊断提供更多的信息。

4. 磁共振血管成像 磁共振血管成像(magnetic resonance angiography, MRA)是一种无创伤血管造影技术,它利用流动血液 MR 信号与周围静态组织 MR 信号的差异来建立图像对比度,因而不需要使用造影剂。磁共振血管成像方法主要有两大类:一类利用血流流入成像层面的信号增强效应,这种方法通常称为时间飞越法(time of flight, TOF) MRA,它能够提​​供血管初级的形态信息和血流速度的近似测量;另一类利用沿磁场梯度方向运动的自旋核产生的相位偏移效应,即相位对比法(phase contrast, PC) MRA,这种方法能够显示血管的精细结构和准确测量血流速度。另外,若按其血管信号强弱来分可分为亮血管图和黑血管图,大部分磁共振血管成像,包括造影剂血管成像都属于亮血管图;黑血管图不受血流状态的影响,能够真实地描述血管的形状和空间位置,因而在研究血管壁等方面有其独特优点,故仍然得到应用。

5. 磁共振功能成像 磁共振功能成像(functional magnetic resonance imaging, fMRI)主要指脑功能成像,广义的功能成像还包括扩散(医学上又叫做弥散)成像和灌注成像。脑功能成像是利用核磁共振对组织磁化特性的高度敏感来研究人类大脑的功能结构,探索人的认知和思维活动规律。目前临床应用最为广泛的 fMRI 是血氧水平依赖(blood oxygenation level dependent, BOLD)成像。在局部脑组织中,氧合血红蛋白(呈抗磁性)与去氧血红蛋白(呈顺磁性)的相对含量发生改变时,局部的磁化率也会发生相应的改变, BOLD 成像就是以血红蛋白的磁特性作为对比来显示功能信息。如果人在接受视觉、听觉、触觉等刺激或在进行各种思维活动时,相应的大脑皮层中枢被激活,其局部的血流量增加,但氧的消耗增加不明显,这就使得血液中的氧合血红蛋白增多,去氧血红蛋白减少,造成局部磁化率减小,在 T_2^* 加权图像上局部 MR 信号增加,从而显示出被激活的大脑中枢与非中枢区的磁化率对比。

6. 扩散成像 扩散是指物体系统内分子的热运动,扩散快慢可用扩散系数 D 来表示,它等于沿某一方向分子运动距离的平方平均值与相应扩散时间之比,单位是 $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。扩散成像(diffusion imaging, DI)就是利用层面内水分子 D 的变化来产生图像对比度。在同样的物理环境下,不同组织的 D 大小、分布和变化幅度也不相同,因此可以用 D 作为组织特性参数成像,称为扩散加权成像(diffusion weighted imaging, DWI)。另外,近年兴起的扩散张量成像(diffusion tensor imaging, DTI)技术是这方面的最新进展,它把分子扩散中的各向异性用张量来表示,对于三维空间,这个张量就是一个 3×3 矩阵,它不仅描述各个坐标轴方向的扩散快慢,而且表明坐标轴之间的相互影响关系。DTI 可用于脑梗死、多发性硬化和脑肿瘤等疾病的病理变化评估。

7. 灌注成像 灌注成像(perfusion imaging, PI)是利用流动效应为基础的 MR 成像方



法,用于测量区域的血容量。它与 MRA 的区别在于:MRA 的观察对象是血液的宏观流动,而 PI 的观察对象则是分子的微观活动。灌注成像的方法有两种:①对比剂团注示踪法灌注成像是通过跟踪造影剂的流动过程来对灌注过程进行测定;②动脉血流自旋标记法(arterial spin labeling, ASL)灌注成像实际上还是一种示踪剂技术,其示踪剂就是动脉血流。

五、磁共振成像系统

磁共振成像系统主要由三大部分组成。

1. 磁场系统

(1) 静磁场:这是磁共振成像系统的关键部件。成像中对它的指标、工艺都有很高的要求。对整体成像其腔孔直径在 1m 左右;磁感应强度一般为 0.15T~3.0T;腔孔成像范围内磁场的均匀度(magnetic field homogeneity)要求在 1ppm~10ppm。目前有三种类型的磁体:常导电磁体,磁感应强度可达到 0.2T,均匀度可满足 MRI 的基本要求,但耗电耗水量大;永磁体,磁感应强度可达到 0.3T,在磁体极面严格加工要求的情况下,其均匀度可以满足要求,且使用这种磁体没有昂贵和复杂的附加设备,操作维护比较简单、方便;超导磁体,磁场有 0.5、1.0、1.5、1.8、2.0、3.0T 等,有很高的均匀度,但造价较高,维护比较复杂。

(2) 梯度场:用来产生并控制磁场中的梯度,以实现磁共振信号的空间编码,这个系统有三组线圈,产生 x 、 y 、 z 三个方向的梯度场,线圈组的磁场叠加起来,可以形成任意方向的线性梯度场。

最近几年许多厂家出于介入诊断、介入治疗和增加病人舒适感等方面的需要,推出宽大的开放式的磁共振成像仪,其硬件主要是在主磁场、梯度磁场和扫描床架等方面的布局做了改进,目前其功能除不具有在体获得波谱的功能外,其他功能几乎与封闭式磁共振成像仪一样。

2. 射频系统 这个系统由射频发生和控制、MR 信号接收和控制等部分组成。

(1) 射频发生器:这部分是用来产生短而强的射频场,以脉冲方式施加到成像的物体中,使其氢核磁矩产生磁共振现象。主要包括:①射频振荡器,这是一种能产生非常稳定频率的振荡器,为发生器提供稳定的射频源,为脉冲程序器提供时钟;②发射门,可对射频振荡进行调节,它受脉冲程序器控制;③脉冲功率放大器,为得到所需频谱范围和幅度的射频脉冲,需要功率放大器把射频脉冲放大到所需的功率;④脉冲程序器,能精确地给出所需的各种单脉冲和脉冲序列,以控制发射门,使其按一定的时序发送所需要的射频脉冲。最后通过发射线圈向成像物体发射这种射频脉冲。

(2) 射频接收器:当射频发生器发射的射频满足磁共振条件时,射频场与成像物体中的氢核磁矩发生相互作用,进行能量交换,使宏观磁矩 M 偏离平衡态。射频脉冲过后, M 将回到其平衡位置,在接收线圈中感应出 MR 信号,这个信号很弱,经放大后进入图像重建系统。

3. 图像重建系统 这部分的作用是进行图像处理,给出所激发层面的组织分布图像。工作过程如下:由射频接收器送来的信号经 A/D 转换器,把模拟信号转变为数字信号,便于贮存和用计算机进行累加运算,经过累加的 MR 信号,在目前的 MRI 中都采用傅里叶变换或快速傅里叶变换,得到具有相位和频率特征的 MR 信号大小,然后根据与观测层面体素的对应关系,经计算机运算和处理,得到层面像素数据,再经过 D/A 转换,加到图像显示器,按信号的大小用不同的灰度等级显示出欲观测的层面图像。

第四节 磁共振技术在医学中的应用

MR 技术在医学中的应用相对较晚,但由于这项技术的最大优势是一种能在生理条件

下,动态地研究生命现象,而且对生物系统无任何损伤,这就使其在医学研究和临床应用中迅速成为一个极具潜力的新领域。下面根据研究对象不同,在方法和技术上的不同特点和要求,将其分成四个方面。

一、分子水平

用磁共振波谱技术研究生物分子,在生物分子结构、构象、探讨构象与功能的关系方面,可以取得其他技术很难得到的信息。如在分子遗传学中,用高分辨的磁共振波谱仪对组蛋白与核酸 DNA 这两种在真核细胞染色体中含量较多的重要生物分子进行研究。当这两种生物分子相互作用后,在波谱图中的高场和低场区质子峰均消失,启示组蛋白以非特异性的方式与 DNA 双螺旋结构作紧密结合,显示出组蛋白在 DNA 模板活力的抑制作用,是遗传基因表达调控中的非特异性抑制的生理功能。这就表明用高分辨的磁共振技术研究蛋白质、肽和核酸等生物分子结构开辟了一条新的途径。现在这项技术已发展成为一整套以二维磁共振技术为基础,距离几何(distance geometry)计算机模拟为辅助手段的测定溶液中蛋白质构象的新方法。在临床应用方面,生物大分子氢核磁共振谱的研究,已成为某些疾病诊断的一种有效的辅助手段,如观察正常人和肿瘤病人的血清磁共振谱,统计结果发现,磁共振谱中肿瘤病人的 α 、 β 谱线面积之比的平均值一般大于 2.20,而正常人是 1.85 ± 0.06 。 α 谱线的高度 h 与宽度 $\Delta\nu$ 之比,正常人的血清 1.3 ± 0.3 ,而白血病人血清大于 1.8,因此从谱线包围面积和谱线高宽的比值,可以作为诊断某些疾病的重要依据。

二、细胞水平

用磁共振波谱技术可在保持细胞完整的条件下,观察细胞器中如 Na^+ 、 K^+ 、 Ca^{2+} 、 NH_4^+ 等无机离子的浓度和水分、磷、钠的数量;准确监测像 Na^+ 、 K^+ 、 Li^+ 、 H^+ 等的跨膜传输过程,动态地测定细胞中三磷酸腺苷(ATP)、二磷酸腺苷(ADP)、磷酸肌酸(PCr)等能量代谢水平的变化。像磷这种元素在人体化合物中占着重要的地位,这是因为 ATP、PCr 和无机磷酸盐(Pi)是细胞储存化学能的分子,或者说是细胞活动的主要能源,从其相对浓度能够确定细胞的能量状态。如人体脏器,正常组织细胞内这几种化学物质的浓度是十分稳定的,但一旦发生病变或消耗过大,它的浓度便发生变化。图 19-27 是活体腿肌的磷谱,其中(a)是休息状态;(b)是剧烈锻炼后 2min;(c)是恢复后的磷谱。I 是 β -ATP, II 是 α -ATP, III 是 γ -ATP, IV 是 PCr, V 是 Pi 。从图中可以看到这三种情况 α 、 β 、 γ -ATP 三个磷原子的峰值变化不大, Pi 是由于运动时 ATP 释放能量,从 ATP 脱落下来的,所以峰值反而升高。PCr 是肌肉细胞赖以使 ADP 转变成 ATP 的分子,当肌肉失去外部能源时,谱中 PCr 峰值下降,用于将 ATP 维持到一个恒定的水平,只有当 PCr 耗尽之后,ATP 的水平才下降。对 ATP 变化过程的研究,可促使人们探讨活体组织断绝能源后的可逆性恢复,这对人体器官和组织移植是很有价值的。在这一领域里,目前只需切取一小部分组织就可以了解有无癌细胞、癌细胞和正常细胞分界处的状况,各种生物物质或药物等化合物的增减,细胞活动情况,并能提供人工脏器和组织的适应性等信息。

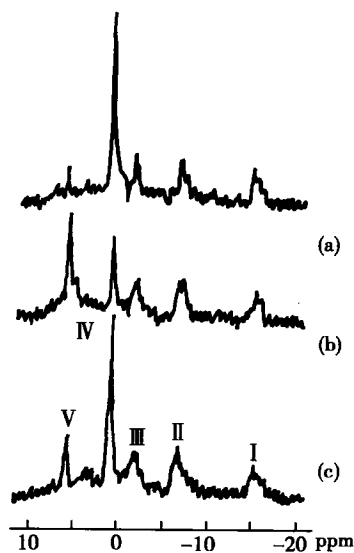


图 19-27 活体腿肌的磷谱



三、组织水平

组织水平的研究,已从离体发展到在体的研究。其主要手段是采用空间定域磁共振谱(spatial localized spectroscopy, SLS)技术,这项技术的关键是空间定域,实现空间定域的基本方法有:表面线圈法,梯度静磁场法和二维傅里叶空间相位和幅度编码方法,所以人们把这三种方法结合起来使用,推出一些使用性更强的 SLS 新方法,如空间定域多脉冲方法、隔层层扫表面线圈方法等。并集中对在体生物活组织中 ^{31}P 的磁共振信号的检测,进而研究组织代谢状况,探索在临床诊断中的应用。

在这一领域里从采集磁共振信号的差异,可以对正常组织自旋-晶格弛豫时间 T_1 、自旋-自旋弛豫时间 T_2 值发生变化的机制进行解释。如 MRI 中正常组织与病变组织 T_1 、 T_2 值的差别远远大于含水比例的差别,这是 T_1 、 T_2 加权图像反差比密度图像好的根本原因,但正常与有病变组织 T_1 、 T_2 值差异的原因并不十分清楚。在 SLS 技术实验中,可知磁共振信号中自由水和束缚水不能产生分离的信号,只是一个平均信号,它的 T_1 值是由自由水和束缚水的平均值决定的。由于组织中水含量的增加主要是增加了自由水的相对丰度,故组织的 T_1 值随着水含量的增加而增大。在同一种脏器或组织中,有肿瘤病变时比正常组织 T_1 值有明显增加,这是由于水含量不正常增加的结果。如正常肝的 $T_1 = 140 \pm 170\text{ms}$,原发或继发肝癌的 $T_1 = 300 \pm 450\text{ms}$ 。对 T_2 值的研究也表明,随着组织中水含量的增加, T_2 值有如 T_1 同样的变化趋势。可见肝癌的弛豫时间比正常肝长。正常组织与肿瘤组织弛豫时间不同的原因除了上面分析的自由水比例增加以外,还有可能与生长速度的差异,以及水分子中质子与组蛋白和核酸特殊结合等有关。在这一研究领域里,一些高档的 MRI 设备中均有 SLS 技术的功能,即具备成像和波谱双重功能,但在识读生物大分子的波谱时,至今在临床中的作用尚未能充分得到体现。一是生物大分子结构本身很复杂,磁场不够高,谱线堆积在一起,很难说明问题;二是波谱工作者不熟悉生物学、医学,而医学人员又缺乏识谱知识,这种情况在国内外不同程度存在,所以这项功能有待进一步开发。

四、整体水平

整体水平的研究主要是指 MRI 技术,它的突出优势是能提供和 X-CT 相媲美的解剖学图像,同时还能提供与生化、病理有关的信息。如今这项技术可提供氢核密度 ρ 、 T_1 、 T_2 和组织流动等四个参数的图像,可分别成像,也可将其中两者加权成像。 ρ 的成像主要提供观测层面组织脏器的形态和位置,而 T_1 、 T_2 因含有丰富的生化代谢信息,通过与 ρ 结合成像,可得到体内组织细胞代谢的生化蓝图,检测诸如炎症、良性和恶性病变等病灶的性质。组织流动参数的成像可反映体内血流状况,对循环系统疾病诊断有特殊意义。这项技术具有许多独到之处,如脊柱、心电图门控心脏 MRI 等更是其他医学影像技术难以相比。像心电图门控的心脏 MRI 是用 MRI 技术来获得心动周期的任意相位的心脏图像,它是基于心脏搏动和瓣膜振动规律的。在实施这项技术时要考虑两个问题:一是磁场脉冲可能对心电图产生感应电流;二是可能存在外部射频噪声的影响。为了防止这些干扰,可用滤波器加以消除,同时精确掌握心脏门控与 R 波的时间关系,以获得严格同步的信号,使图像质量大大提高,从而确立了心电图门控的 MRI 技术地位。在正常情况下心脏每分钟跳动 60~90 次,每次心脏收缩持续时间为 380~400ms,用心电图的 R 波触发典型的反转恢复脉冲序列,可以得到心脏收缩末期或舒张前期的心脏图像。如在 R 波触发后延长到 500~600ms 时才提取 FID 信号,还可以获得舒张期的心脏图像。当然在这种情况下应考虑舒张期持续时间的可变性。由于在 R 波触发脉冲序列后,通过时间延迟线路任意控制提取信号的时间,所以借助心电图门控的心脏 MRI 技术,可以清晰显示整个心脏搏动过程中任意时间的心内结构。采



用这项技术能显示心肌梗死的形态变化,急性心肌梗死因局部心肌缺血而使其弛豫时间明显减少,故在受影响的心肌呈现比正常心肌较暗的区域,同时伴有局部心室扩张现象。某些严重的心肌梗死可在晚期引起局部动脉瘤改变,使受影响的心肌明显变薄,不能收缩,甚至

面图像中得到证实。从 20 世纪 90 年代以来进入临床的 MRI 设备,很多具备这项功能,因为这项技术不仅能反映心脏功能的形态变化,还能提供心肌机能和代谢的信息,所以是一种比较理想的心脏成像技术。

目前 MRI 技术正在对肺和脑功能成像进行研究,并已取得一系列可喜的研究进展。从理论上讲,MRI 是一种多核种的成像技术,除 ^1H 核的 MRI 外, ^{31}P 、 ^{23}Na 、 ^{19}F 等的 MRI 已在实验室得到满意的图像。而 MR 显微技术更是诱人的研究方向,目前其分辨率可达到 $6\mu\text{m}$,已能实现单细胞的 MRI,可直接观察活体细胞中的细胞核的变化。化学位移的 MRI 能提供更精细的组织结构和生化代谢信息。因此可以这样说:MR 技术的医学科学研究和临床应用,是一项跨学科的研究领域,至今尚未充分发挥其潜在优势,还存在许多研究领域和空白,亟待人们去开发和探索。

第二十章 生物非线性动力学简介

学习要求:

1. 理解非线性动力学的基本概念,如运动参量、相空间、吸引子等。
2. 了解非线性动力学理论中的一些基础知识,如混沌运动、分形、分数维等。
3. 了解非线性动力学在医学实际应用中的某些重要方法。

人们在科学实践的过程中,注意到一种非常奇特的运动行为,它貌似随机,是非周期的运动,但又来自确定的演化规律;它能够放大任何微小的扰动,具有对扰动的极端敏感性,但又可以在短期内加以预报,因此处于这种运动状态的系统能够实现控制,这种运动被称为混沌(chaos)。混沌产生的原因是由于事物间的相互影响、相互制约、相互依存关系。这种关系反映在系统的演化规律上,则表现为非线性的规律。

非线性动力学的研究对象是具有非线性演化规律的系统。非线性动力学(nonlinear dynamics)理论对自然界现象(如湍流、气候、地震、生命、经济、生长现象等)的研究起着极大的影响。自然界的普遍联系使得运动演化更普遍的表现为非线性现象。自组织现象、分叉现象、随机共振等现象都无法用线性系统理论加以解释。同时,由于生命系统是高度非线性的系统,因此非线性理论在生命科学的研究中得到了日益广泛的应用。

本章将介绍一些非线性动力学理论的基本概念和基本知识,但不涉及过多的数学,而是运用更为科普性的方法来讲述基本内容。通过生物非线性动力学的学习,可以使我们初步具备在以后实际工作中发现非线性现象的观察与辨别能力。因此学习本章内容重点是理解基本的概念,理解基本现象的特征,避免过多在数学细节上的纠缠。只有这样才能真正从实质上理解一些看似抽象的概念。比如:相空间方法不同于传统空间运动描述法之处是,它注重研究经过长时间演化后系统运动所达到的稳态行为,因此要求我们把学习的重点放在吸引子概念的建立和运动的定性分类上;混沌运动不同于简单运动的最大特点是它的貌似随机性、服从确定性演化规律,因此就要求我们重点是掌握它的状态参量变化的特征,它与其他运动的区别点等;学习分形的主要目的是理解分数维的概念以及分形不同于传统几何体形态的特点等,要从维数的普遍定义结合具体例子来打破传统经验维数对我们思维的限制。至于非线性研究与生命科学的结合的一些例子,大多数是处于研究状态的结果,主要是为了开拓知识面,可作为科普阅读材料和以后深入学习的参考。

第一节 运动及其相空间描述

宇宙万物处于永不停息的运动变化之中。以牛顿为代表的经典力学理论在三维空间中建立了描述机械运动的完整理论,爱因斯坦的相对论发展了经典的确定性理论,将描写运动的空间扩展到时间轴。同时,在描述物质系统运动的空间方法中还有相空间(states space)理论。

一、相空间

1. 质点直线运动的相空间描述 现在来考虑如何描述一个质点沿一条直线的运动过



程。一般情况下,质点相对于参照系的位置,速度和加速度每时每刻都在发生着变化。在每一时刻,其运动状态都可以用这三个物理量的值来表征。从长时间来看,这三个物理量的变化规律也能够表征运动过程的演化趋势。把能够表征运动状态及其演化规律的运动量称为状态参量(states variable)。

在匀加速直线运动过程中,质点位移,速度和加速度随时间的变化规律可以表述为:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2}at^2 \\ v &= v_0 + at \\ a &= \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (20-1)$$

其中 $x-t$ 曲线是抛物线, $v-t$ 曲线为直线。另外还可以用三个状态参量作为独立变量,构成一个三维的坐标空间,将质点在每一时刻的位置,速度和加速度值作为一个此空间中的坐标点。从长时间来看,质点的运动状态的演化,对应于一条有一定延伸趋势的轨道。如图 20-1,在 $t=0.0$ 秒时,运动状态在相空间中的坐标为 $(1.0, 0.0, 2.0)$,在图 20-1 中对应于 A 点。在 $t=9.0$ 时,状态坐标 $(82, 18, 2)$ 对应于 B 点。从 A 到 B 经历了一系列的状态改变。这些中间状态点构成了从 A 到 B 的一条轨道。这条轨道不仅包含了质点的实际空间位置的变化规律,而且反应了整个运动状态的演化趋势。将所有状态参量联合构成的抽象的空间称为相空间。质点每一时刻的运动状态就与相空间中的一个点对应起来,

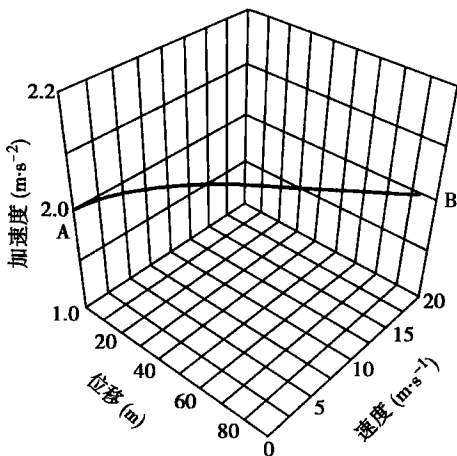


图 20-1 一维质点运动的相空间

而在某时段内运动状态的变化过程与相空间中的一段轨道对应,运动的演化趋势与相空间中的轨道延伸趋势对应。

2. 弹簧振子振动的相空间描述 描写振子的运动状态,一般选它偏离平衡位置的距离和速度作为状态参量,由于运动发生在一维直线上,因此状态参量为两个一维的物理量,这时的相空间是由位移和速度联合构成的平面直角坐标空间。弹性振子在仅受到弹性力作用时,它将依初始时刻的位移及速度,作周期运动,如图 20-2(a)(b)。每时每刻的位移和速度坐标会对应于上述相空间中的一个点,而从长时间来看,各个不同时刻的运动状态点构成了一条轨道。从分析可知,这条轨道是一个以坐标原点为中心的椭圆或圆,如图 20-2(c)。振子初始状态坐标位于这个椭圆轨道上。由于轨道是封闭的,因此运动会表现出周而复始的周期性。不仅是简谐振动的相空间轨道是封闭的,所有形式的周期运动的相空间轨道必然是封闭的。

实际上振子除了受到弹簧的弹性力外,还受到阻尼力的作用。在初始时刻,给振子初始的位移及速度,则在后续的运动中,由于阻尼力会消耗掉振子的运动能量,使得振子的位移和速度不断减小,最终恢复到静止状态,如图 20-3(a)(b)。图中位移和速度都表现出了衰减的振荡过程,并最终达到静止状态。如果从相空间来看,运动轨道为一条趋向原点的螺旋线,这条螺旋线起始于初始状态坐标,终止于原点,如图 20-3(c)。无论初始状态如何,振子的长时间演化最终都会趋向原点。因此原点是系统演化的极限状态。轨道趋向原点的曲线是螺旋线,这种方式对应于衰减的振荡,把具有这种运动变化趋势的极限位置称为焦点。除了焦点外,非线性系统的极限稳态还有结点、中心、鞍点等。

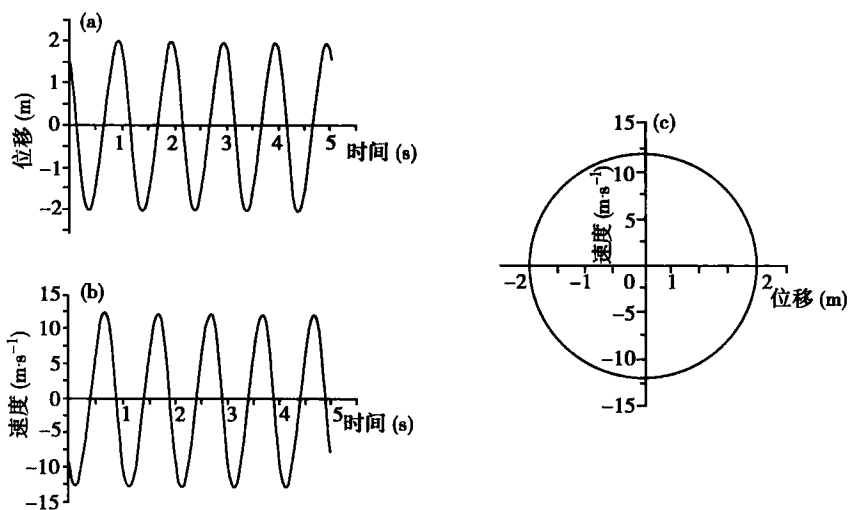


图 20-2 简谐振动运动状态变化

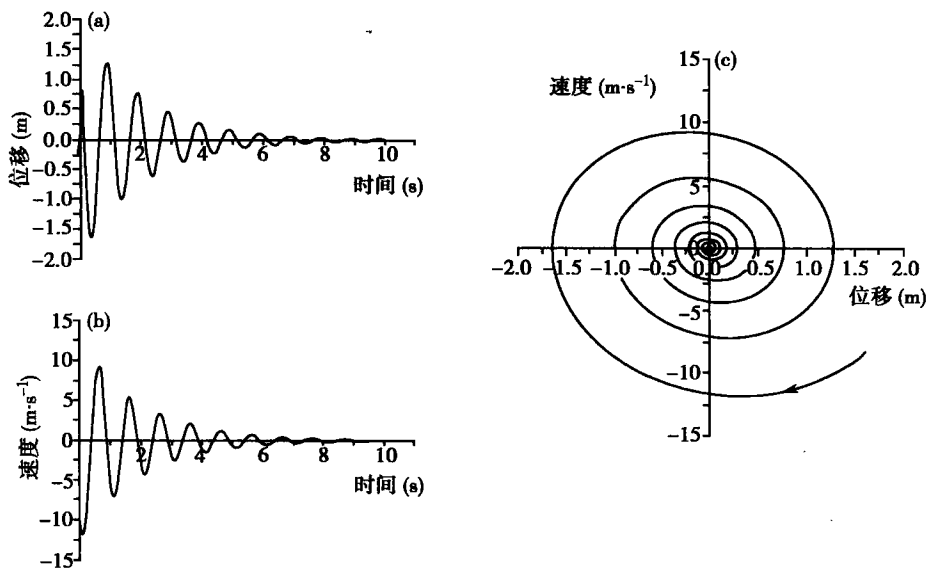


图 20-3 阻尼振动运动状态变化

如果要使得振子保持周期运动,就要施加一个周期的外驱动力。振子在外加驱动力作用下,保持与驱动力周期相同的周期运动。虽然在初始时刻,振子有初始的位移和速度,但在阻尼力和周期驱动力的作用下,振子的运动状态会最终趋向于一个周期与外加驱动力相同的周期振荡,且这个振荡与振子初始状态无关。如图 20-4(a)(b),振子的位移和速度变化都会趋向于一个周期振荡。图 20-4(c)表示了相空间中运动状态的变化过程,图中实线的椭圆是最终稳定下来的周期振荡,它的周期与外加驱动周期相同,螺旋线表示振子状态趋向于稳定周期运动的过程。

定态运动对应于相空间中的一个点,周期运动对应于相空间中的一条封闭的轨道,运用相空间表示法可以将运动的动态变化过程形象地表达出来。同时,运动的演化趋势也与相空间中运动最终达到的状态有关。

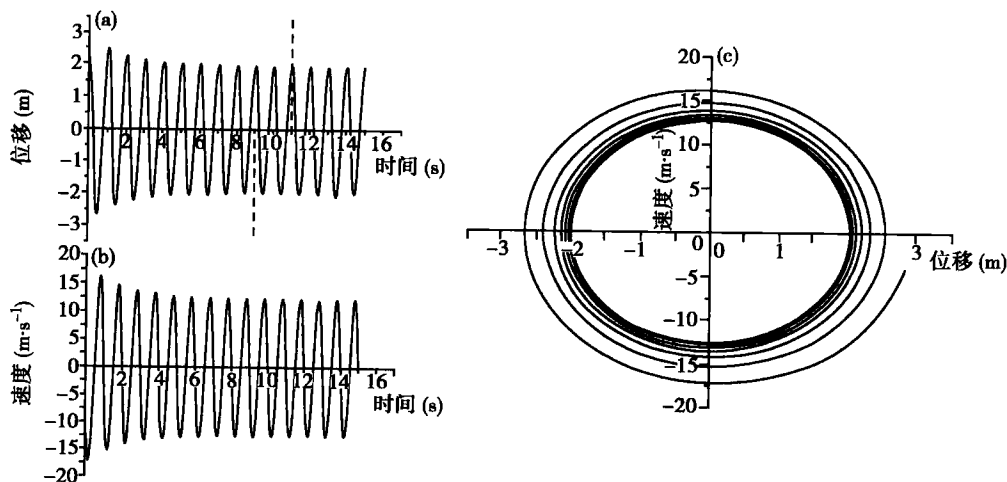


图 20-4 周期驱动的阻尼振动运动状态变化

二、吸引子

从上面的分析我们发现,如果弹簧振子最终趋向于定态,则在相空间中的轨道会趋向于一个特殊的点,即原点,即使振子赋予不同的初值,轨道都会最终趋于该点。该点周围的相轨道都会趋向于它,这个点称为不动点(fixed point)。当振子处于静止时,即使偶尔受到外界的扰动,使得运动状态偏离不动点,但一旦把扰动撤掉,运动状态又会趋近于不动点,并最终恢复静止。就好像是在相空间中存在一个吸引点,它会把周围的轨道都吸引到它所在处,我们称这个特殊的位置为吸引子(attractor)。

除了存在不动点类型的吸引子外,还存在周期的吸引子,从图 20-4(c)中可见,受到阻尼力和周期驱动力的弹性振子的运动状态也被吸引到相空间中的一个封闭的轨道上。把这种周期吸引子称为稳定极限环(limit cycle)。任何稳定的周期运动都对应于其相空间中的稳定极限环。

吸引子是物质系统运动的稳态运动行为在相空间中的反映。稳态运动是系统从初始状态出发,经历了长时间演化后最终达到的运动状态。对于无外驱动的阻尼振子来说,其长时间演化将趋向静止,即趋向不动点吸引子。而在外周期驱动作用下,其运动状态将趋向一个周期运动,即极限环吸引子。除了上述两类吸引子外,还存在准周期吸引子和奇怪吸引子,其中奇怪吸引子对应于一种称为混沌运动的演化状态。

运动的相空间表示法可以表达出运动的演化趋势。对于不同定性性质的运动,其相空间中所对应的吸引子也不同。从一般意义上来说,运动是指物质系统的存在状态不断随时间演化的过程,尽管不同的物质系统的存在形式有差别,但现今的研究表明各种空间尺度的系统的演化趋势存在跨越尺度的普遍规律,从运动的定性性质上分,一般认为存在定态、周期、准周期、混沌和湍流运动。除湍流外,在机械运动、物理运动、化学运动、生物运动和社会运动中均可发现上述四种运动规律。

第二节 混沌运动

自然界中大量的存在可以用周期运动来近似描述的演化过程,如宇宙中星体的运动,地球上节气的周而复始的变化,生物体内生物钟的调节作用等等。这种运动的最大特点是:满



足近似的周期性,可以在较高的误差精度内预报未来的演化趋势。只要能够得到演化规律的方程,就能从运动状态预言出未来的演化情况。

量子力学的确立及其在微观世界研究中所取得的成果,揭示出了经典确定论观点在认识微观世界的规律中所表现出的局限性。庞加莱(Poincare)在研究三个星体相互作用下的运动规律时提出:复杂的相互作用有可能产生一种不可预报的运动行为。洛伦兹发现:在描写大气热对流运动的非线性方程中,出现了一种不规则的运动行为,这种运动可以用确定的方程描述,但不可能对其长期的运动做出预报。生态学简单的非线性模型中也出现了这类服从确定性规律但又表现为类似随机性变化的运动过程。这些发现以及非线性运动规律在自然界中的普遍存在性,促使人们对服从非线性规律的运动进行了大量的研究,开始认识到自然界中还存在另一类貌似随机的确定性运动,即混沌运动。在生物界也普遍存在混沌运动,如正常人心率的变异性,神经系统电信息活动的普遍混沌性,流行病发展的混沌变化,DNA分子的混沌态。混沌理论被誉为二十世纪继相对论、量子力学之后的第三次科学革命,它不仅适用于宇观天体和微观粒子,而且适用于我们看得见、摸得着的中观世界,使得人们对以往被忽视、但又普遍存在的一大类运动有了新的认识。

一、混沌运动行为

混沌运动的最突出特点是确定性系统中出现的貌似无规则的、类似随机的现象。这里给出两个混沌运动的例子。

1. 虫口模型的混沌 假定有某种昆虫,每年夏季成虫产卵后全部死亡,第二年春天每个虫卵孵化成一只虫子。设第 n 年的虫口数目为 x_n ,每只成虫平均产卵 a 个,考虑到生存条件对虫口的限制作用,虫口的方程是

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (20-2)$$

设某第一年虫口为 x_1 ,则第二年为 $x_2 = ax_1(1 - x_1)$,依次类推,就可以计算出每年的虫口数量。这个函数关系反应的种群变化机制是:当虫口出生率较小时,生存环境相对宽松,因此虫口数量增长较快;当出生率较大时,由于有限的生存环境使得虫口数量反而下降。图20-5为取不同 a 值时虫口逐年的变化情况,(a)为定态, $a=2.0$;(b)为周期变化,每两年虫口数量重复一次, $a=3.2$;(c)为另一种周期变化,虫口每四年重复一次, $a=3.5$;(d)为混沌变化,呈现完全的不规则性, $a=3.8$ 。但这种貌似随机的变化是从一个确定性的演化规律中产生出来的,并非是随机扰动の結果。因为,如果把第 n 年虫口数量作为横轴,把第 $n+1$ 年虫口数量作为纵轴,生成坐标点,如 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, x_{n+1}), \dots$,则混沌状态时这些坐标点都落在式(20-2)的曲线上,这说明前后点之间存在确定的函数关系。这里显示非线性的确定性特征的方法是延迟嵌入方法,即对非线性系统的某个运动参量进行等时间间隔或非等时间间隔地采样,得到 n 个值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$,这个数列称为时间序列。如果要重新建立 d 维的相空间,则将前后测到的 d 个值组成一个 d 维的相空间点,如当 $d=3$ 时,从上述时间序列重新建立的第一个相空间点为 (x_1, x_2, x_3) ,第二个为 $(x_2, x_3, x_4), \dots$ 第 i 个点为 (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) 等等,共可生成 $n-d+1$ 个点。随着测量时间的增加,可以得到重新建立的相空间中的一系列点,这些点在新的重构的相空间的演化趋势与产生这些时间序列的原始系统的相空间中的轨道演化趋势一致。上述从一维运动参量的变化值中建立新的相空间的过程称为相空间重构(reconstruction of states space)。上面生成相空间的方法称为延迟嵌入(delay embedding)。运用相空间重构方法可以等价地得到原始相空间中系统演化的某些规律。

2. 神经元放电活动的混沌 神经系统由神经元构成,神经系统的信息发生、传导和处理功能的实现有赖于神经元放电活动。以下是描写神经元放电活动的一个物理模型:

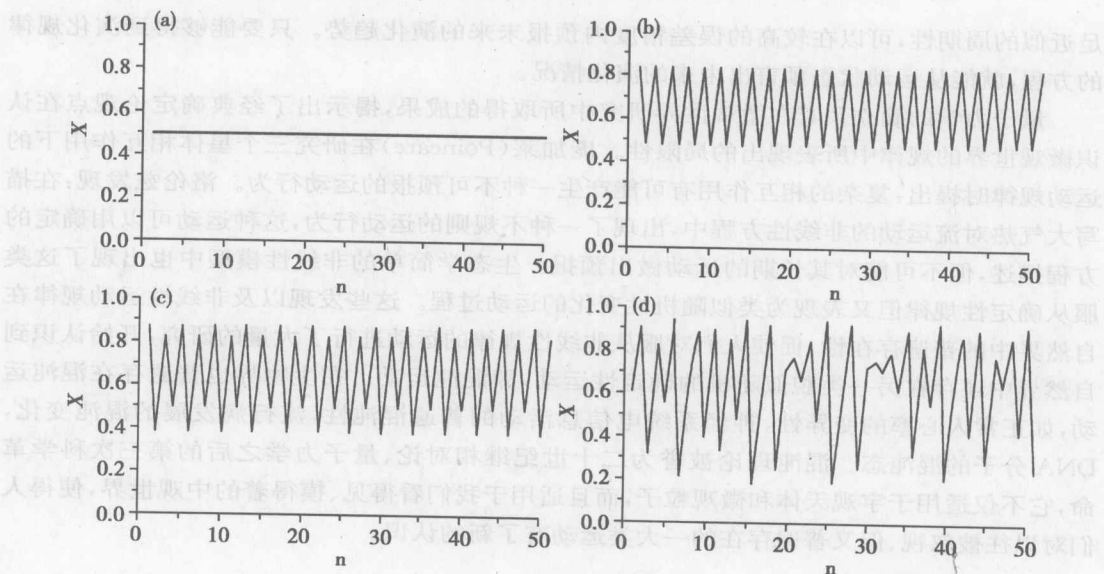


图 20-5 虫口模型的不同振荡模式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax^3 - bx - y - z + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y \\ \frac{dz}{dt} &= r[s(x - x_0) - z] \end{aligned} \right\} \quad (20-3)$$

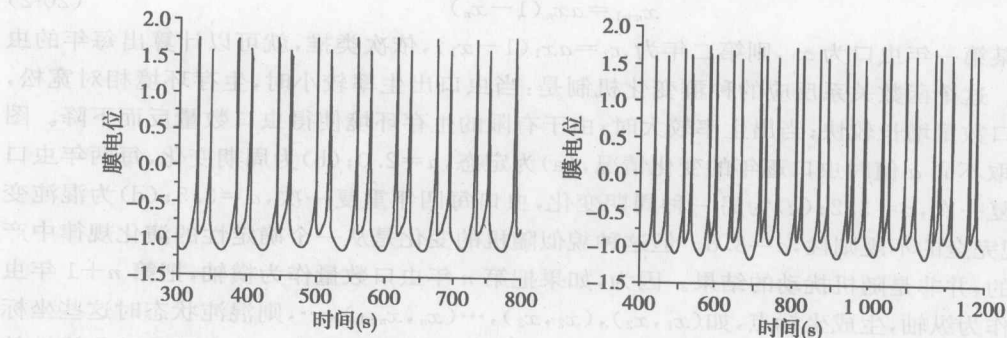


图 20-6 神经元膜电位放电振荡

其中 a, b, c, d, r, s, x_0 均为常数, 当这些常数取某些值时, 神经元放电模型呈现出周期的放电样式, 而在某些值时却呈现混沌, 如图 20-6。

从上述例子可知, 同一非线性系统的参数取不同值时, 可能存在定态、周期和混沌运动。而且随着参数的变化, 系统的运动可以从一种定性行为转化为另一种定性行为, 如当虫口模型的 a 逐渐增大时, 虫口的变化从定态到周期二, 又到周期四, 到混沌。非线性系统的参数变化引起的运动定性行为的突变现象称为分岔 (bifurcation)。图 20-7 中, 为取不同 a 值时虫口的变化

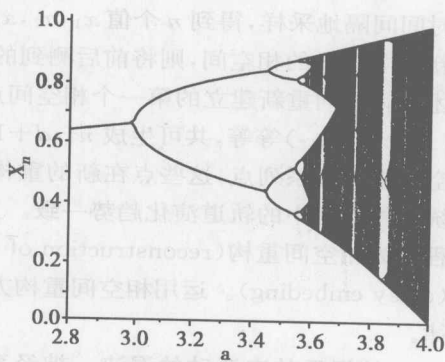


图 20-7 虫口模型的分岔图



情况。横轴是 a 值,纵轴为相应 a 值时虫口所取的值。对于定态,一定 a 值对应一个虫口值;对于周期二, a 处对应有两个虫口值,依次类推会随 a 的增大出现周期四,周期八,周期十六等等,这种周期运动随参数变化而发生的周期倍化的定性性质的变化过程称为倍周期分叉。对于混沌,取一定 a 值可以有无数多的、分布在一定值范围的虫口值。

二、奇怪吸引子

描写混沌运动同样要借助相空间方法。混沌运动首先表现为状态参量在一定范围内的振荡过程,因此它的相轨道在相空间一定区域来回游荡。同时由于非周期性,使得轨道永不封闭。图 20-8 中为洛伦兹混沌对应的相空间吸引子。它呈现蝴蝶状,轨道被吸引在这个区域内来回游走。这种吸引子既有一定的分布形状,但又不同于不动点和极限环,称为奇怪吸引子(strange attractor)。

在奇怪吸引子内部,相邻轨道间指数的发散开,对轨道的任何一点小扰动都会使得后来的演化轨道与不加扰动的轨道偏离很多,正是这一点使得对混沌运动的长时间预报成为不可能。这种对扰动的放大效应称为混沌的初值敏感性,也称蝴蝶效应。在相空间中,不动点的维数是 0,极限环的维数是 1,而混沌对应的奇怪吸引子的维数是分数维(fractal dimension)。我们把具有分数维的几何对象称为分形(fractal)。自然界中广泛存在具有分数维的几何体,如白云、山脉、河流支流、神经及毛细血管网等。

对混沌运动的研究,是人们认识自然界演化规律的过程从低级向高级、从简单到复杂的必然产物。混沌作为一个科学概念,它不等同于概率意义上的随机,其本质是确定性的。

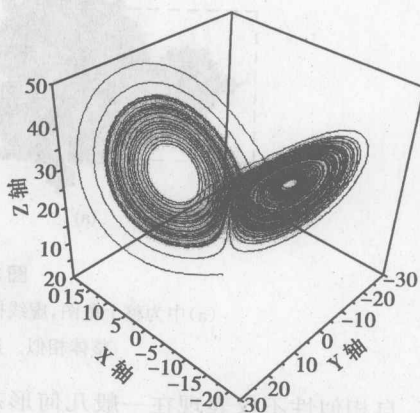


图 20-8 洛伦兹吸引子



一、自相似性

自相似性是指：一个几何体的局部与其整体具有结构相似性。它是分形的最显著特征。图 20-9 是一个分形图形(龟图)，从整体来看，类似龟形。如果注意其头部可发现其仍为一个与整体相似的龟形，图 20-9(b)为头部的放大图，与整体形似且仍可以由头部无限放大下去，其局部结构与整体具有无限的自相似性。

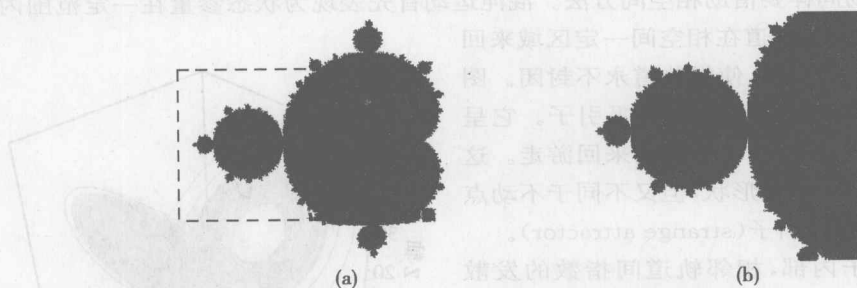


图 20-9 龟图的自相似性

(a)中为整个龟图，虚线框内被放大为(b)图 (b)中头部结构与龟图整体相似。这种放大过程可以无限进行下去

自相似性不仅表现在一般几何形态中，而且奇怪吸引子也具有自相似性。因此混沌动力学具有分形特征。图 20-10 为虫口模型的分岔图。在图中，随着出生率参数的改变，虫口的数量的变化模式由周期一到周期二，再到周期四、周期八...，最后进入混沌。在每次周期模式分岔转变为新的周期模式后，其周期数是原来的两倍，把这种分岔过程称为倍周期分岔(period doubling-bifurcation)。当继续增加参数值时，又会进入周期三，并经历一系列周期模式的分岔过程后再次进入混沌。如果放大周期三窗口中的每一个分支的分岔过程，会发现其也经历了倍周期分岔过程，在此过程中同样包含了周期一、周期二、周期四...混沌，周期三等，而每一个倍周期分岔过程又与总体的分岔趋势相同。这说明非线性系统的分岔过程中也会包含分形特征。

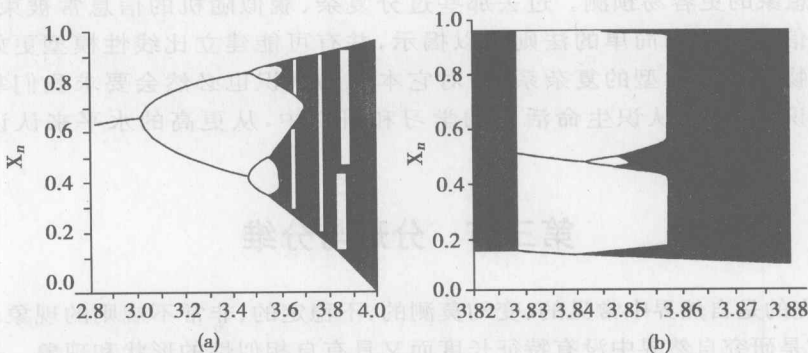


图 20-10 虫口模型分岔过程中的分形

值得注意的是，如果在生成分形的动力学过程中有随机扰动加入，就会破坏原来的自相似性，使得形态表现为某种程度的不规则。这种生成的分形称为随机分形。它虽然不具有严格的自相似性，但它来自于分形发生机制。它与具有自相似性的分形同样具有一个重要的性质，即具有非整数的维数——分数维。



二、分数维

分数维(fractal dimension)这一概念,是曼德尔布洛特(B. Mandelbröt)提出的。它不仅对自然科学的各个领域,而且对社会科学也有很大影响。在经典欧几里德几何中,我们可以用直线、圆锥、球等这一类规则的形状去描述诸如墙、车轮、道路、建筑物等物体,然而在自然界中却存在着许许多多极其复杂的形状,如山不是锥,云不是球,闪电不是折线,雪花边缘也不是圆等;再如宇宙中点点繁星所构成的集合更非经典几何所能描述的,它们不再具有我们早已熟知的数学分析中的连续、光滑这些基本性质了。这类奇形怪状长期以来被认为是“不可名状的”或“病态的”。其图形不能用传统的几何语言来描述,但可以谈分形所具有的特征。

如图 20-11 所示去掉中间三分之一的康托(Cantor)集(简称三分康托集)是一种人们最了解,同时也是最容易构造的分形,然而,它却显示出许多最典型的分形特征。它是从单位区间出发,通过一系列不断地去掉部分子区间的过程构造出来的。设 E_0 是闭区间 $[0, 1]$, E_1 表示由此除去中间 $1/3$ 之后得到的集,即 E_1 包含 $[0, 1/3]$

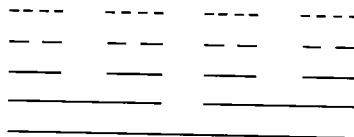


图 20-11 康托集合

和 $[2/3, 1]$ 两个区间,分别去掉这两个区间的中间 $1/3$ 而得到 $[0, 1/9]$ 、 $[2/9, 1/3]$ 、 $[2/3, 7/9]$ 、 $[8/9, 1]$ 四个区间,按此方法继续下去,则 E_k 是由 2^k 个长度各为 3^{-k} 的区间组成的。三分康托集 F 是由属于所有 E_k 的数组成的,不可能画出带有无穷小细节的 F 自身,所以 F 的图形实际上只是一个 k 充分大时对 F 较好逼近的 E_k 的图形。它具有自相似性,有“精细结构”,即它包含有任意小比例的细节。越放大康托集的图形,间隙就越清楚地呈现在我们面前。虽然 F 在某种意义上是相当大的集(是不可数的无穷集),然而它的大小不适于用通常的长度等来度量,用任何合理定义的长度, F 总是长度为零。

经典的几何方法和计算方法已经不适合用来研究分形,需要另外的方法。对分形研究的主要方法是它的许多形式的维数。首先我们看一长为 L 的线,若用一长为 r 的“尺”去量,结果为 N 尺,即 $N(r) = L/r \propto r^{-1}$ 。若要测量一面积为 A 的物体,就要用 $r \times r$ 的小方块去量,才能给出确定的 N 值,其 N 值为 $N(r) = A/r^2 \propto r^{-2}$ 。如果不是用小方块去测量而还是用长度为 r 的尺去直接测量,那是测不出这块面积的大小的。从数学的角度来看无异于提出“一块面积有多长这样一个问题”。由此可见,测量任何一个物体时都必须用一个适合于它的“尺”去量度,才能给出正确的数值。数学家们把这个事实归纳为下述结论:对于任何一个有确定维数的几何体,若用与它相同维数的“尺”去量度,则可得到一确定的数值 N ,若用低于它维数的“尺”去量它,其结果为无穷大,若用高于它维数的“尺”去量它,其结果为零。其数学表达式为

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (20-4)$$

由此得

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \left(\frac{1}{r} \right)} \quad (20-5)$$

式中的 D 称为豪斯道夫维数,它可以为整数,如对于点、线、面、体的豪斯道夫维数分别是 0、1、2、3。它也可以为分数,通常将豪斯道夫维数是分数的物体称为分形,所以维数为分数是分形的另一个重要特征。如康托(Cantor)集的豪斯道夫维数是 0.6309。

一般来说,一个分形的分数维越大,其几何结构越复杂。例如:肺从气管尖端成倍地反复分支,使末端的表面积变得非常大。分数维越大表面积越大且气体交换的效率越高,但因表面凹凸变得更加明显使空气流通随之变坏。因此分维数高低要兼顾这两个因素。大脑表



面有各种不同大小的沟回,其分维数在 2.73~2.79。人肺分形的分维数是 2.30。毛细血管网、神经纤维网等都具有一定分数维值。实际研究中还存在其他的对维数的定义方法。

第四节 生物系统非线性现象

一、心脏搏动的电振荡特性

心脏的搏动表明它是一个振荡系统。这种搏动具有自律性,即其振荡并不是由于外加周期刺激形成的。切断连接心脏的神经,甚至把心脏摘除放在培养中,都仍然观察到它搏动。因此心脏是一个相对独立的振荡系统。从它的弛豫振荡看,它具有高度的非线性。

心脏中存在多处具有自律性的起搏点。右心房上端静脉窦部的窦房结是心脏的最主要振荡,它激发的心搏动称为窦性心律,其频率是 $60\sim 100\text{次}\cdot\text{min}^{-1}$ 。房室交界处的房室结和再下面心室上的浦肯野纤维等都是具有自律性的起搏位置,但其固有频率较低,分别是 $60\sim 80\text{次}\cdot\text{min}^{-1}$ 和 $30\sim 40\text{次}\cdot\text{min}^{-1}$ 。整个心脏实际是由多个振子耦合形成的复杂非线性振荡系统。正常情况下,窦房结的电振荡起着支配作用,它所产生的电兴奋依次传导于结间束、房室结、房室束和浦肯野纤维而引起整个心房和心室的肌细胞发生兴奋,从而引起心脏的同频率的机械收缩。所以健康人的心律是窦性心律。当窦房结出现病理情况或其他部位的自律活动加强到一定程度时,心脏搏动就出现病态,如心律失常、心动过速、心动过缓和心动不规律。

到目前为止,人们虽然对心脏的搏动规律和实质已有较多了解,但还未能对每个起搏点建立起标准的振荡方程,故仍未建立统一的心脏振荡方程。人们对心脏自律振荡的形成机制运用非线性动力学建模方法进行了诸多研究。范德波尔(Vander Pol)提出了心脏振荡的范德波尔方程,但不能准确表示心脏振荡图形的细节。随后提出的玻恩霍菲-范德波尔方程虽有改进但仍未达到更理想的模拟效果。毕勒-路特根据 $H-H$ 方程建立了一个专用于哺乳动物的心室肌动作电位的数学模型,能得到与心电非常类似的振荡形式,它可以较好地描述心室肌兴奋过程。

针对心脏搏动节律的形成机制,提出了圆映象模型,并发现了诸如锁相振荡和混沌模式,并在鸡胚心实验中得到了验证,启发人们对心律失常发生机制的分析。传统医学认为,正常心脏是处在窦房结与其他自律性起搏点之间的 1:1 锁相同步状态。然而近来研究表明,心脏搏动表现出一定程度的混沌性。而一些心力衰竭病人死前数分钟以至数日的心跳反而变得极规则。但纤颤振荡却极其复杂,也同时表现出明显的混沌性。心脏正常搏动的混沌性产生机制是什么?心脏病理状态下的混沌性与正常状态存在哪些差别?其发生机制是什么?这些都是有待研究的问题。这要求生命科学家与数理科学家的有机合作。

二、可兴奋细胞的振荡和混沌

1. 神经电兴奋过程的动力学模型 可兴奋细胞是指在外界刺激下状态(通常是用细胞膜内外电位差标志,简称膜电位)可发生显著变化的细胞。细胞受刺激前后的状态分别称为静息状态(rest state)和兴奋状态(excited state)。可兴奋细胞在动植物中都有,如动物中的神经轴突和各种肌肉,植物中某些藻类(如丽藻)和含羞草等。而哺乳动物的心肌更是不需刺激可以自动交替地处于静息和兴奋两状态(振荡)的自动兴奋细胞,肌肉的动作、感觉的传递和心脏的搏血功能等就是依靠细胞的可兴奋性,可见可兴奋细胞对动物活动和生存的重要性。我们仅对典型的可兴奋细胞——神经细胞工作过程中出现的振荡和混沌予以介绍。

比较起来,枪乌贼巨轴突(轴突是神经细胞的主要组成部分)最为粗大,便于插入电极进



行测量研究,因此它成为了最早也是研究得最多的可兴奋细胞。20 世纪 50 年代霍治金(Hodgkin)和赫胥黎(Huxley)对枪乌贼巨轴突进行了大量的经典性研究工作。这些工作奠定了神经冲动和传导的实验和理论基础。这不仅对各种神经轴突具有普遍意义,同时也揭示了各种可兴奋细胞的一些共同基本规律。

神经细胞在静息时内部相对于膜外具有负电位,其值在 $-90 \sim -60\text{mV}$ 。此电位称为静息电位(rest potential),细胞处于极化状态。当细胞受到的刺激超过某一定的阈值时,电位将发生突变而形成的脉冲成一正脉冲。脉冲幅值称为动作电位(action potential),其值与刺激强弱无关,大约在 $30 \sim 60\text{mV}$ 。此脉冲沿神经传导到大脑就引起对刺激的感觉。由于轴突只可能处于静息电位或动作电位这两种可能的状态,因此它实际上是双稳态并具有全或无的特点。

经过大量实验和分析,霍治金和赫胥黎确认神经轴突膜上具有两种主要让金属离子通过的通道—— K^+ 通道和 Na^+ 通道(实际上钙离子通道也很重要,特别是对各类肌肉细胞)。此外,膜中也还有次要的让其他离子通过(形成所谓漏电流)的通道。霍治金和赫胥黎研究发现, K^+ 通道和 Na^+ 通道的电导不是恒定的,它们强烈地依赖于膜电位。这是由于两通道中存在着几个为膜中有机分子所控制的开关,开关打开或关闭的概率与膜电位有关。由此并为了很好地拟合实验结果,霍治金和赫胥黎提出了如下的描述神经轴突电位变化的四个变量的微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} I &= C \frac{dV}{dt} + \bar{g}_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) - \bar{g}_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) - \bar{g}_{\text{L}} (V - V_{\text{L}}) \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h \end{aligned} \right\} \quad (20-6)$$

式(20-6)中参数 $\alpha_n, \beta_n, \alpha_m, \beta_m, \alpha_h, \beta_h$ 均为膜电位 V 的函数, C 表示膜电容, I 表示膜电流, $V_{\text{Na}}, V_{\text{K}}$ 分别表示 Na^+ 离子和 K^+ 离子的浓差电位, V_{L} 表示其他通道各种离子引起的有效可逆电位, n, m, h 分别表示 Na^+ 离子和 K^+ 离子的通道开通概率, $\bar{g}_{\text{Na}}, \bar{g}_{\text{K}}, \bar{g}_{\text{L}}$ 表示各通道的最大电导。

式(20-6)称为霍治金-赫胥黎方程,简称 $H-H$ 方程。霍治金和赫胥黎用式(20-6)很好地表征轴突电位变化的规律。此外,他们还导出了刺激引起局部电位跃变沿神经的传导方程。

2. 神经轴突中的振荡和混沌 在周期外力作用下,神经轴突和丽藻均可振荡甚至出现混沌。可兴奋细胞在适当条件下(如浸入适当的盐溶液中)也可自行振荡或出现混沌。相原等人在 $H-H$ 方程中引入温度改正系数和膜外液中 Ca^{2+} 等二价离子浓度的有效浓度引起的电位变化。他们发现,适当地选择外液成分可使轴突发生自持振荡。让轴突内部 K^+ 和 Na^+ 浓度分别维持 400mM 和 50mM , 外液由 $1:3.5$ 的自然海水(含有 460mM 的 Na^+ 、 10mM 的 K^+ 、 10mM 的 Ca^{2+} 和 53mM 的 Mg^{2+})和 550mM 的 NaCl 溶液配成,这样外液的 K^+ 、 Na^+ 、 Ca^{2+} 和 Mg^{2+} 的浓度分别是 2.22mM 、 530mM 、 2.22mM 和 11.78mM , $V_{\text{K}} = -125.05\text{mV}$, $V_{\text{Na}} = 56.85\text{mV}$, V_{L} 的值正好是使静息电位是 -60mV 。实验观察到自持振荡。而解 $H-H$ 方程结果也得到自持振荡。

相原等人又在上述条件下加周期性刺激,即令

$$I = A \sin 2\pi f_s t \quad (20-7)$$

把 A 和 f_s 取作可调参数,解方程(20-6),则可得到三分频(3P)振荡(振荡频率 f_N 等于 $f_s/3$,即系统锁频到外力的第三分频上);在 f_s 接近 f_N 或比 f_N 大很多时,可以得到准周期



振荡;不规则振荡,相图上的采样点显示是奇怪吸引子,因此这时的振荡是混沌。对巨轴突的实验观测,也得到类似的结果。这也表明方程(20-6)可以很好地表征巨轴突的特性。

上述过程也大致指出了可能是由倍周期分岔通向混沌。相原对巨轴突的实验(f_s 等于 100Hz , A 由 $70\mu\text{A} \cdot \text{cm}^{-2}$ 变到 $40\mu\text{A} \cdot \text{cm}^{-2}$),也观察到如下的序列: $1p \rightarrow 2p \rightarrow 4p \rightarrow 8p \rightarrow 16p \rightarrow$ 混沌 $\rightarrow 12p \rightarrow 24p \rightarrow$ 混沌。

另一通向混沌的道路是阵发混沌。米斯(Mees)等对没有出现自持振荡(处于静息电位下)时的枪乌贼巨轴突加周期性刺激,结果也出现混沌。柴(Chay)建立了可兴奋细胞的另一个模型。在此模型中, Na^+ 通道中的钙离子流起着重要作用。柴认为,细胞膜上主要是三种通道:可让 Na^+ 和 Ca^{2+} 通过的通道、 K^+ 通道和电导不依赖于电压但依赖于膜内钙离子浓度的 K^+ 通道。因此这个模型有可能更适合于钙离子起着重要作用的各类肌肉细胞和胰岛 β 细胞。

三、生物混沌控制

所谓混沌控制,就是要把某动力学系统的混沌性态转化为事先确定的定态状态或周期性态,甚至非周期性态或新的混沌性态,并实现稳定的控制。要强调的是,混沌控制并非仅要消除混沌运动,而要达到事先确定的非混沌或混沌运动。混沌控制的共同特点是利用混沌的初值敏感性,对混沌系统施加与时间有关的连续小扰动来实现对混沌的稳定控制。

1. 心脏混沌控制 心脏是人体最重要的器官,其健康与否同人体健康关系极大。发生心脏猝死时。心脏没有预兆就会出现致命性心律失常,这种猝死在美国每年要夺去 40 万人的生命。大多数情况下是由于心动过速,而且通常起于心室。一般在心电图上退化为低幅、不规则的波形模式,反映出在心脏里出现了“纤维性颤动”。心脏纤维性颤动对生存前景威胁最大。有人用模拟法测得多振子耦合系统在高频作用下出现纤颤前,先有倍周期分岔。一般认为,纤维性颤动就是混沌。这一点很重要,因为识别该种现象,将其看作是混沌,可能产生新的治疗措施。

过去对待一个呈现混沌的系统主要策略是建立这个系统的模型,并尽可能详细,以便鉴定出关键参数,然后改变这些参数,直到使系统脱离混沌控制。然而这种策略对系统来讲是受限的,因为治疗模型是已知的,它并非呈现不可更改的参数变化。因此新的对策是使系统不脱离混沌统治,而是应用混沌来控制系统。这一改进的关键是由于混沌运动必然包含一些不稳定周期运动。一个混沌系统在这些不稳定运动中的任一点不会停留太久,而是不停地从一种周期运动切换到另一种周期运动。理论预言:在适当的时刻施加微小的扰动,有可能将系统控制在某个周期轨道附近,从而有效地改变系统的混沌行为,使之规则化。这个理论的正确性首先在磁弹体和激光器的混沌控制中得到了证实。因此,可以研究一种“混沌起搏器”以调节心搏的不规则性,也就是说,控制心脏混沌的方法可以由一个灵巧的起搏器完成,它能恢复心脏节律使其达到正常。“混沌起搏器”有严格理论指导的,它不是强电击,它的基础就是牵一发而动全身的所谓混沌系统对初始条件的极端敏感依赖性。

2. 脑电混沌控制 脑电图是脑神经细胞群电生理活动在大脑皮层或头皮表面的总体反映。现在医院中脑电图已成为一项常规检查。它对脑损伤、脑血栓、神经官能症等疾病提供诊断、预后和治疗信息,也常用来做睡眠、麻醉深度等的监护。尽管 CT、MRI 等新技术不断出现,脑电图在脑功能评估方面的作用仍是不可替代的。与脑和神经有关的疾病很多,给患者带来极大的痛苦和危害,比如癫痫病就是非常典型的一种。目前医疗界还没有治疗癫痫病的有效方法。许多深受其害的癫痫病患者不得不面临痛苦的选择:要么忍受癫痫一次次发作所带来的痛苦;要么做手术切除大脑中的病灶部位。做手术可以使得癫痫不再发作,但要冒很大的风险,有可能导致运动、记忆和语言功能的部分丧失,给认知功能造成永久性



伤害。现在,混沌控制的研究与进展为癫痫病患者带来了希望,并有可能使他们摆脱这种困境。研究发现在适当时刻向海马神经元施以精确控制的电脉冲,海马神经元的放电行为更接近周期性,或者相反更呈现出混沌特性。这两种倾向分别称为控制和反控制。有人预测,反控制最有希望预防癫痫病发作,因而有可能为局部性癫痫的治疗提供一种全新方法。控制和反控制实验的成功,自然使研究者想到建立一个装置以监测癫痫病灶的放电情况,一旦发现癫痫发作的征兆,就进行控制,以避免其发作。这些研究成果可能会在多年以后导致一项可植入装置的出现。该装置既能预测,也能防止癫痫的发作。进一步还可使这种装置按程序工作,并有一定的智能性,它能够根据经验进行学习,采取适合不同患者的最佳策略,避免癫痫的发作。

思考题与习题二十

- 20-1 什么是运动参量?
- 20-2 什么是相空间? 试举例说明。
- 20-3 用相空间描述运动与经典动力学描述方法的差别在哪里?
- 20-4 试举例说明不动点与极限环分别对应于实际的哪类运动?
- 20-5 吸引子与运动的演化趋势之间的关系是什么?
- 20-6 混沌运动的特征是什么? 主要有哪些定性性质?
- 20-7 什么是分形? 它的主要特征是什么?
- 20-8 分形与混沌运动有什么关系?
- 20-9 自相似性是指什么? 具有自相似性的几何对象与点、线、面、体的本质差别是什么?
- 20-10 试说明为什么分形具有分数维?

(杨继庆)

参考文献

1. 杨福家. 原子物理学. 第3版. 北京:高等教育出版社,2000.
2. 胡新珉. 医学物理学. 第5版. 北京:人民卫生出版社,2001.
3. 倪光炯. 改变世界的物理学. 上海:复旦大学出版社,1998.
4. A. P. 费伦奇. 狭义相对论. 张大卫,译. 北京:人民教育出版社,1979.
5. 程守洙. 普通物理学. 北京:高等教育出版社,2001.
6. 刘克哲. 物理学. 北京:高等教育出版社,1999.
7. 王惠文. 激光与生命科学. 北京:北京理工大学出版社,1995.
8. 王殿福译. 液晶的最新技术:物性·材料·应用·北京:化学工业出版社,1991.
9. 王鸿儒. 物理学. 第2版. 北京:人民卫生出版社,2000.
10. 邓明成. 新编大学物理学. 北京:科学出版社,2002.
11. 卢德馨. 大学物理学. 北京:高等教育出版社,1998.
12. 刘普和. 医学物理学. 北京:人民卫生出版社,1989.
13. 刘骥. 医用生物物理学. 北京:人民卫生出版社,1998.
14. 朱翠玲. 现代医学与现代医学仪器. 北京:中国医药科技出版社,1990.
15. 朱翠玲. 现代医学影像学. 济南:山东科学技术出版社,2000.
16. 陆果. 基础物理学(上、下卷)北京:高等教育出版社,1997.
17. 吴熙载译. 液晶与生物结构. 北京:科学出版社,1983.
18. 陈力. 生物电子显微术教程. 北京:北京师范大学出版社,1997.
19. 陈炳恒. 立体定向放射神经外科学. 北京:北京出版社,1984.
20. 杨子彬. 生物医学工程学. 哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,2000.
21. 胡纪湘. 医用物理学. 第4版. 北京:人民卫生出版社,1995.
22. 胡逸民. 肿瘤放射物理学. 北京:原子能出版社,1999.
23. 赵凯华. 新概念物理教程:力学. 北京:高等教育出版社,2000.
24. 徐国祥. 激光医学. 北京:人民卫生出版社,1998.
25. 张三慧. 大学物理学. 第2版. 北京:清华大学出版社,2000.
26. 龚尔璋. 医用物理学. 北京:科学技术文献出版社,1993.
27. 黄继英. 磁共振成像原理. 西安:陕西科学技术出版社,1997.
28. 谢毓章. 液晶物理学. 北京:科学出版社,1998.
29. 褚圣麟. 原子物理学. 北京:人民教育出版社,1979.
30. Kane J W et al. Life Science Physics. New York:John Wiley & Sons,1978.
31. 易明. 光学. 北京:高等教育出版社,1999.
32. 林景辉. 核医学. 北京:北京医科大学出版社,2002.
33. 王焕定. 有限元法基础. 北京:高等教育出版社,2002.
34. 梁励芬. 大学物理简明教程. 上海:复旦大学出版社,2002.
35. Hai-Ming Yang, Jie Wu, Jin-Yi Li, et al. Role of nucleation of bile liquid crystal in gallstone formation. World J Gastroenterol, 2003, 9(8):1791-1794.
36. Hai-Ming Yang, Jie Wu, Jin-Yi Li, et al. Optic properties of bile liquid crystals in human body. World J Gastroenterol, 2000, 60:248-251.
37. 曾仁端, 金红. 磁共振技术在医学中的应用. 世界医疗器械杂志, 2000, 6(4).



38. Paul A, Tipler. Physics for Scientists and Engineers. 4th ed. New York: W. H. Freeman and company/worth Publishers, 1999.
39. 欧阳钟灿, 刘寄星. 从肥皂泡到液晶生物膜. 长沙: 湖南教育出版社, 1994.
40. 杨海珉. 胆汁液晶与胆囊结石. 昆明: 云南科技出版社, 2003.
41. 喀蔚波. 医用物理学. 北京: 高等教育出版社, 2005.
42. Hai-Ming Yang, Jie Wu, Jin-Yi Li, et al. Otic properties of bile liquid crystals in human body, World J Gastroentero, 2000, (6): 248-251.
43. Hai-Ming Yang, Jie Wu, Jin-Yi Li, et al. Role of nucleation of bile liquid crystal in gallstone formation. World J Gastroenterol, 2003, 9(8): 1791-1794.
44. Wu Jie, Zhau Jianli, He Lijun, et al. Crystallogeny Fundamentals of the cholesterol gallstone. Progress in natural science, 2005, 17(5): 112-116.
45. 张泽宝. 医学影像物理学. 第2版. 北京: 人民卫生出版社, 2005.
46. 黄大同. 现代医学成像—原理与技术. 北京: 中国教育文化出版社, 2005.
47. 熊吟涛. 热力学. 北京: 高等教育出版社, 1983.
48. 杨福家. 原子核物理. 第2版. 上海: 复旦大学出版社, 2002.
49. Edward Ott. Chaos in Dynamical Systems. London: Cambridge University Press, 1993.
50. Holger Kantz, Thomas schreiber. Nonlinear Time Series Analysis. London: Cambridge University Press, 1993.
51. 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础. 长春: 东北师范大学出版社, 1997.
52. 陈士华, 陆启安. 混沌动力学初步. 武汉: 武汉水利出版社, 1998.
53. 刘秉正. 生命过程中的混沌. 长春: 东北师范大学出版社, 1999.
54. 郑伟谋, 郝柏林. 从抛物线谈起. 上海: 上海科学技术出版社, 1993.
55. 梁绍荣. 普通物理学. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2005.
56. 王松龄. 流体力学. 北京: 中国电力出版社, 2004.
57. 李椿. 热学. 北京: 人民教育出版社, 1978.
58. 胡新珉. 医学物理学. 第6版. 北京: 人民卫生出版社, 2004.

中英文对照

阿伏伽德罗常量
阿伏伽德罗定律
艾里斑
爱因斯坦光电效应方程
爱因斯坦-斯托克司关系式
安培环路定律

百万分之一
半波带法
半波损失
半价层
半衰期
半透膜
保守力
贝可勒尔
倍周期分叉
本构关系
泵
比电离
比活度
比结合能
毕奥-萨伐尔定律
编码
标记原子
标识 X 射线
表面活性物质
表面能
表面吸附
表面张力
波长
波的叠加原理
波的干涉
波的强度
波动方程
波腹
波函数

A

Avogadro constant
Avogadro's law
Airy disk
Einstein's photoelectric equation
Einstein-Stokes' relation
Ampere circular law

B

part of per million, ppm
half wave zone method
half-wave loss
half value layer
half life
semipermeable membrane
conservative force
Becquerel, Bq
doubling bifurcation
constitutive relationship
pump
specific ionization
specific activity
specific binding energy
Biot Savart law
coding
tracer atom
characteristic X-ray
surfactant
surface energy
surface absorption
surface tension
wavelength
superposition principle of wave
interference of wave
wave intensity
wave equation
antinode
wave function



波节
波面
波前
波数
波速
波线
玻耳兹曼常量
玻耳兹曼能量分布定律
伯努利方程
薄透镜
不动点
不对称指数
不可逆过程
不确定度
不确定关系
布拉格定律
布儒斯特角
部分偏振光

参照系(或参考系)

层流

场强叠加原理

场源电荷

超导

超导量子干涉仪

超声波

超声心动图

超重

沉降率

冲量

初相

除极

触变性

窗口

窗宽

窗位

磁场

磁场强度

磁导率

磁感应强度

磁感应线

node

wave surface

wave front

wave number

wave velocity

wave ray

Boltzmann constant

Boltzmann energy distribution law

Bernoulli's equation

thin lens

fixed point

asymmetry index, AI

irreversible process

uncertainty degree

uncertainty relation

Bragg's law

Brewster's angle

partial polarization light

C

reference frame

laminar flow

superposition principle of field intensity

charge of field source

superconductivity

superconducting quantum interference device,

SQUID

ultrasonic wave

ultrasonic cardiogram

hypergravitation

sedimentation rate

impulse

initial phase

depolarization

thixotropy

window

window width

window level

magnetic field

magnetic field strength

permeability

magnetic induction

magnetic induction line



磁共振成像

magnetic resonance imaging, MRI

磁共振功能成像

functional magnetic resonance imaging, fMRI

磁共振信号

MR signal

磁共振血管成像

magnetic resonance angiogram, MRA

磁化

magnetization

磁介质

magnetic medium

磁矩

magnetic moment

磁链

magnetic flux linkage

磁量子数

magnetic quantum number

磁能

magnetic energy

磁能密度

magnetic energy density

磁偶极子

magnetic dipole

磁通量

magnetic flux

磁旋比

gyromagnetic ratio

次声波

infrasonic wave

脆性

brittleness

D

单摆

simple pendulum

单光子发射型计算机断层摄影

single photon emission computed tomography,
SPECT

单色辐出度

monochromatic radiant exitance

单轴晶体

uniaxial crystal

当量剂量

equivalent dose

导体

conductor

道尔顿定律

Dalton's law

德布罗意波长

de Broglie wavelength

等厚干涉

equal thickness interference

等厚条纹

equal thickness fringes

等倾条纹

equal inclination fringes

等熵过程

isentropic process

等体过程

isochoric process

等体热容

heat capacity at constant volume

等温过程

isothermal process

等效原理

equivalence principle

等压过程

isobaric process

等压热容

heat capacity at constant pressure

第二节点

secondary nodal point

第二类永动机

perpetual motion machine of the second kind

第二主点

secondary principal point

第二主平面

secondary principal plane

第一节点

primary nodal point

第一类永动机

perpetual motion machine of the first kind



第一主点	primary principal point
第一主平面	primary principal plane
电场	electric field
电场强度	electric field strength
电场线	electric field line
电磁泵	electromagnetic pump
电磁波	electromagnetic wave
电磁波谱	electromagnetic spectrum
电磁感应	electromagnetic induction
电磁流量计	electromagnetic flow meter
电磁振荡	electromagnetic oscillation
电导率	conductivity
电导纳	electrical admittance
电光效应	electro optical effect
电荷	electric charge
电极化率	electric susceptibility
电介质	dielectric
电介质的极化	dielectric polarization
电离	ionization
电离比值	specific ionization
电离辐射	ionizing radiation
电流	electric current
电流密度	electric current density
电流强度	electric current strength
电偶层	electric double layer
电偶极矩	electric dipole moment
电偶极子	electric dipole
电容	capacitance
电容率	permittivity
电容器	condenser
电渗流	electroosmotic flow, EOF
电势	electric potential
电势差	electric potential difference
电势能	electric potential energy
电势梯度	electric potential gradient
电视显像管	cathode-ray tube, CRT
电通量	electric flux
电位移矢量	electric displacement vector
电位移通量	electric displacement flux
电泳	electrophoresis
电子对产生	electron pair production
电子对效应	electron pairing effect
电子对湮没	electron pair annihilation



电子非定域化

电子俘获

电子光谱

电子显微镜

电阻抗

电阻率

叠加原理

定态

定轴转动

动力学

动量

动量定理

动量守恒定律

动脉血流自旋标记法

动能

动能定理

动生电动势

动态空间重现技术

动态平衡

动压

动作电位

短程力

断裂点

对比度

对称操作

对称性

对应原理

多普勒效应

多叶光栏

electron delocalization

electron capture, EC

electron spectrum

electron microscope

impedance

resistivity

superposition principle

stationary state

fixed-axis rotation

dynamics

momentum

theorem of momentum

law of conservation of momentum

arterial spin labeling, ASL

kinetic energy

theorem of kinetic energy

motional electromotive force

dynamic spatial reconstruction, DSR

dynamic equilibrium

dynamical pressure

action potential

short range force

fracture point

contrast

symmetry operation

symmetry

correspondence principle

Doppler effect

multi leaf collimator, MLC

E

Auger electron

Stopping potential

2dimension Fourier transform, 2DFT

dichroism

F

angle of divergence

emission computed tomography, ECT

Farad, F

Faraday's law of electromagnetic induction

normal acceleration

antiphase

俄歇电子

遏止电势

二维傅里叶变换

二向色性

发散角

发射型计算机断层摄影

法拉

法拉第电磁感应定律

法向加速度

反相



反转恢复	inversion recovery, IR
范(塑)性形变	plastic deformation
方均根速率	root mean square speed
放大镜	magnifier
放射性核素	radioactive nuclide
放射性核素成像	radionuclid imaging, RI
放射性活度	radioactivity
放射性平衡	radioactive equilibrium
放射性衰变	radioactive decay
非常光	extraordinary light
非线性动力学	nonlinear dynamics
菲克第一定律	Fick's first law
菲涅耳衍射	Fresnel's diffraction
肺磁图	magnetopneumogram, MPG
肺泡	pulmonary
分辨率	resolving power
分叉, 分岔	bifurcation
分数量子霍尔效应	fractional quantum Hall effect
分数维	fractal dimension
分形	fractal
分子磁矩	molecular magnetic moment
分子电流	molecular current
分子动理论	molecular kinetic theory
分子光谱	molecular spectrum
分子力	molecular force
汾丘里流量计	Venturimeter
封闭系统	closed system
冯·克利青常数	Klaus Von Klitzing constant
夫琅禾费衍射	Fraunhofer's diffraction
伏特	Volt, V
幅度调制显示	amplitude modulation display
辐出度	radiant exitance
辐射权重因子	radiation weighting factor
辐射跃迁	radiation transition
负晶体	negative crystal
复极	repolarization
傅里叶变换	Fourier transform
傅里叶分析	Fourier analysis

G

钆二乙烯三胺五醋酸	gadolinium diethylene triamine penta acetic acid, Gd
概率	DTPA
	probability



概率密度	probability density
干涉	interference
感生电场	induction field
感生电动势	induced electromotive force
感应电场	induced electric field
感应电流	induction current
刚体	rigid body
高斯定理	Gauss's theorem
高斯面	Gauss's surface
戈瑞	Gray, Gy
功	work
功率	power
共振	resonance
共轴球面系统	coaxial spherical system
孤立系统	isolated system
固有长度	proper length
固有角频率	natural angular frequency
固有时	proper time
管电流	tube current
管电压	tube voltage
贯穿系数	transmission coefficient
惯性	inertia
惯性参照系	inertial reference frame
惯性力	inertial force
惯性系	inertial frame
灌注成像	perfusion imaging, PI
光程	optical path
光程差	optical path difference
光弹效应	photo elastic effect
光的衍射	diffraction of light
光电流	photoelectric current
光电效应	photoelectric effect
光电子	photo electron
光多普勒效应	optical Doppler effect
光谱	spectrum
光矢量	light vector
光速不变原理	principle of constancy of light velocity
光学谐振腔	optical resonant cavity
光栅	grating
光栅常量	grating constant
光栅方程	grating equation
光栅光谱	grating spectrum
光轴	optical axis



光子
广义相对论
广义相对性原理
归一化条件
国际辐射单位和测量委员会

国际辐射防护委员会

过阻尼

哈勃定律
亥姆霍兹线圈
焓
耗散结构
核磁共振
核磁矩
核磁子
核力
核衰变
核素
核素发生器
核子
核自旋
黑洞
黑体
黑体辐射
横波
横模
横向磁化矢量
红细胞
宏观磁化矢量
宏观量
厚透镜
互感
互感电动势
滑环技术
化学位移
环境
恢复系数
辉度调制显示
回波
回磁比

photon
general relativity
principle of general relativity
normalization condition
International Commission on Units and Measurements,
ICRU
International Commission on Radiological Protection,
ICRP
over damping

H

Hubble's law
Helmholts coil
enthalpy
dissipative structure
nuclear magnetic resonance, NMR
nuclear magnetic moment
nuclear magnetron
nuclear force
nuclear decay
nuclide
isotope generator
nucleon
unclear spin
black hole
black body
black body radiation
transverse wave
transverse mode
transverse magnetization vector
red blood cell
macroscopic magnetization vector
macroscopic quantity
thick lens
mutual inductance
mutual induced electromotive force
slipping
chemical shift
environment
coefficient of restitution
brightness modulation display
echo
gyromagnetic ration



回路电压定律
回旋加速器
惠更斯原理
混沌
霍耳效应

loop voltage law
cyclotron
Huygens' principle
chaos
Hall effect

J

伽利略变换
机械波
机械能
机械能守恒定律
机械运动
基本统计假设
基础代谢率
基尔霍夫定律
基模
基频
基态
激发
激发态
激发医学
激光
激光流式细胞计
激光扫描共聚焦显微镜
激光细胞生物学
激活介质
级联衰变
极化
极化电场
极限环
计算机累加法
剂量当量
加速度
钾泵
检偏器
简谐波
简谐振动
简约眼
焦度
焦耳
角动量
角动量守恒定律
角放大率

Galilean transformation
mechanical wave
mechanical energy
law of conservation of mechanical energy
mechanical motion
fundamental statistical postulate
basal metabolic rate, BMR
Kirchhoff's law
fundamental mode
fundamental frequency
ground state
excitation
excited state
laser medicine
laser
laser flow cytometry
laser scanning confocal microscope
laser cellular biology
active medium
cascade decay
polarization
polarization electric field
limited circle
computer of average transients. CAT
dose equivalent
acceleration
 K^{+} pump
analyzer
simple harmonic wave
simple harmonic vibration
reduced eye
focal power
Joule, J
angular momentum
law of conservation of angular momentum
angular magnification



角加速度	angular acceleration
角量子数	angular quantum number
角频率	angular frequency
角速度	angular velocity
接触角	contact angle
节点	nodal point
节点电流定律	node current law
结合能	binding energy
截止频率	cutoff frequency
解码	decoding
介电常量	dielectric constant
进动	precession
近点	near point
近视眼	near sight
近轴光线	paraxial rays
精细结构	fine structure
静电场	electrostatic field
静电场的环路定理	circular theorem of electrostatic field
静力学	statics
静能	rest energy
静息电位	resting potential
静息状态	rest state
静压	static pressure
静质量	rest mass
局域惯性系	partial inertial frame
距离几何	distance geometry
绝热过程	adiabatic process
均匀度	homogeneity

K

卡诺定理	Cannot theorem
卡诺循环	Cannot cycle
开尔文表述	Kelvin statement
开放系统	open system
康普顿波长	Compton wavelength
康普顿效应	Compton effect
抗磁质	diamagnetic substance
抗压强度	compressive strength
抗张强度	tensile strength
可逆过程	reversible process
可压缩性	compressibility
克尔效应	Kerr effect
克劳修斯表述	Clausius statement



空化作用
空间编码
空间定域磁共振谱
空间心电图向量环
控制论
库仑定律
扩散
扩散成像
扩散系数
扩散张量成像

拉德
拉曼散射
拉莫尔方程
拉莫尔频率
朗德因子
雷姆
雷诺数
楞次定律
离子对
离子迁移率
里德伯常数
理想流体
理想气体
理想气体微观模型
理想气体状态方程
力臂
力矩
力学
立体放射神经外科
粒子数反转分布
连续 X 射线
连续性方程
亮度
量纲
量子
量子霍尔效应
量子力学
量子数
临界阻尼
灵敏度
零结果实验

cavitation
spatial coding
spatial localized spectroscopy, SLS
spatial electrocardiovector loop
cybernetics
Coulomb's law
diffusion
diffusion imaging, DI
coefficient of diffusion
diffusion tensor imaging, DTI

L

rad
Raman scattering
Larmor equation
Larmor frequency
Landeg factor
Rem
Reynold's number
Lenz's law
ionic pair
ionic mobility
Rydberg Constant
ideal fluid
ideal gas
micro model of an ideal gas
equation of state of an ideal gas
level arm
torque
mechanics
stereotactic radioneurosurgery, SRNS
population inversion distribution
continuous X ray
equation of continuity
brightness
dimension
quantum
quantum Hall effect
quantum mechanics
quantum number
critical damping
sensitivity
null experiment



流场
流管
流体
流体动力学
流线
流阻
螺旋扫描
洛埃德镜
洛伦兹变换
洛伦兹力
洛伦兹收缩
洛施密特常量

field of flow
tube of flow
fluid
hydrodynamics
streamline
flow resistance
helical scanning
Lloyd's mirror
Lorentz transformation
Lorentz force
Lorentz contraction
Loschmidt constant

M

马赫数
马赫锥
马吕斯定律
迈克耳孙干涉仪
迈斯纳效应
迈耶公式
麦克斯韦方程组
麦克斯韦速率分布函数
麦克斯韦速率分布律
脉搏波
脉冲傅里叶变换
脉压
毛细管电泳
毛细管凝胶电泳
毛细管区带电泳
毛细现象
每搏输出量
密度梯度
明视距离
模数
目镜

Mach number
Mach cone
Mauls law
Michelson interferometer
Messier effect
Mayer formula
Maxwell's equations
Maxwell speed distribution function
Maxwell speed distribution law
pulse wave
pulse of Fourier transform, PFT
pulse pressure
capillary electrophoresis
capillary gel electrophoresis, CGE
capillary zone electrophoresis, CZE
capillarity
stroke volume
gradient of density
comfortable visual distance
analog/digital, A/D
eyepiece

N

钠泵
脑磁图
脑脊髓液
脑组织
内聚力
内力

Na^+ pump
magnetoencephalogram, MEG
cerebrospinal fluid, CSF
brain tissue
cohesive force
internal force



内摩擦

内能

内转换

内转换电子

能级

能量

能量均分定理

能量密度

能量退降

能量最小原理

能斯特方程

逆循环

黏弹性

黏度

黏滞力

牛顿第二定律

牛顿第三定律

牛顿第一定律

牛顿环

牛顿流体

扭转

internal friction

internal energy

internal conversion, IC

internal conversion electron

energy level

energy

equipartition theorem of energy

energy density

degradation of energy

principle of least energy

Nernst equation

inverse cycle

viscoelasticity

viscosity

viscous force

Newton's second law

Newton's third law

Newton's first law

Newton's ring

Newtonian fluid

torsion

O

欧姆定律

Ohm's law

P

泊松比

泊松公式

泊肃叶定律

泡利不相容原理

碰撞

皮托管

偏光显微镜

偏振度

偏振光

偏振面

偏振片

频率

频率编码

频谱

频谱分析

平衡态

平均动脉压

Poisson ratio

Poisson formula

Poiseuille's law

Pauli's exclusion principle

collision

Pitot tube

polarizing microscope

degree of polarization

polarized light

plane of polarization

polaroid

frequency

frequency coding

frequency spectrum

spectral analysis

equilibrium state

mean arterial pressure



平均碰撞频率
平均平动动能
平均寿命
平均速度
平均速率
平均自由程
普朗克常量
谱线宽度

mean collision frequency
average transnational kinetic energy
mean lifetime
mean velocity
mean speed
mean free path
Planck's constant
line width

Q

奇异吸引子
气体栓塞
起偏器
迁移率
迁移速度
欠阻尼
强等效性原理
强激光
切变模量
切连科夫辐射
切向加速度
切应变
切应力
球面像差
驱动力
屈服应力
屈光度
取向极化
去极化
全息术
缺级
群速度

strange attractor
air embolism
polarizer
mobility
drift velocity
underdamping
strong equivalence principle
High Reaction level laser, HRLL
shear modulus
Cherenkov radiation
tangential acceleration
shear strain
shear stress
spherical aberration
driven force
yield stress
diopter
orientation polarization
depolarization
holography
missing order
group velocity

R

热传导
热辐射
热机
热力学
热力学第二定律
热力学第一定律
热力学概率
热力学过程
热力学系统

heat conduction
thermal radiation
heat engine
thermodynamics
second law of thermodynamics
first law of thermodynamics
thermodynamic probability
thermodynamic process
thermodynamic system



热量
热运动
热致液晶
韧致辐射
容积导电
溶致液晶
蠕变
瑞利判据
弱激光

塞曼效应
散光眼
扫描电子显微镜
扫描隧穿显微镜
色偏振
色像差
熵
熵产生
熵流
熵增加原理
射程
射频
射线探测器
生物半衰期
生物衰变常量
声波
声强
声强级
声压
声阻抗
失重
时飞法
时间常数
时间膨胀
时间序列
实际气体
示踪原子
势阱
势垒
势能
试探电荷
视角

heat
thermal motion
thermotropic liquid crystal
bremsstrahlung
volume conduction
lyotropic liquid crystal
creep
Rayleigh's criterion for resolution
low reaction level laser, LRL

S

Zeeman effect
astigmatism
scanning electron microscope
scanning tunneling microscope, STM
chromatic polarization
chromatic aberration
entropy
entropy production
entropy flow
principle of entropy increase
range
radio frequency, RF
detector
biological half life time
biological decay constant
sound wave
sound intensity
intensity level of sound
sound pressure
acoustic impedance
null gravity
time of flight, TOF
time constant
time dilation
time series
real gas
tracer atom
potential well
potential barrier
potential energy
test charge
visual angle



视力	visual acuity
收缩压	systolic pressure
收尾速度	terminal velocity
受激辐射	stimulated radiation
受激辐射光放大	light amplification by stimulated emission of radiation (laser)
受激态	excited state
受迫振动	forced vibration
舒张压	diastolic pressure
输运过程	transport process
束缚电荷	bound charge
数模	digital/analog, D/A
数值孔径	numerical aperture, NA
数字减影血管造影	digital subtraction angiography, DSA
衰变常数	decay constant
双折射	birefringence
双轴晶体	biaxial crystal
顺磁质	paramagnetic substance
瞬时速度	instantaneous velocity
瞬时心电向量	twinkling electrocardiovector
斯特藩-波耳兹曼定律	Stetam Boltzmann law
斯托克司定律	Stokes' law
四甲基硅	$(\text{CH}_3)_4\text{Si}$ (tetramethylsilane, TMS)
速度	velocity
速度梯度	velocity gradient
速率	speed
速率分布函数	speed distribution function
塑性	plasticity
塑性形变	plastic deformation
隧道效应	tunnel effect
锁模	mode locking

T

T_1 加权	T_1 weighted
T_2 加权	T_2 weighted
弹性	elasticity
弹性极限	elastic limit
弹性介质	elastic medium
弹性模量	modulus of elasticity
弹性碰撞	elastic collision
弹性形变	elastic deformation
调 Q	Q modulation
调幅波	amplitude modulated wave



调节	accommodation
调强适形放射治疗	intensity modulated radiation therapy, IMRT.
态参量	state parameter
态函数	state function
体变模量	bulk modulus
体素	voxel
体应变	volume strain
体应力	volume stress
铁磁质	ferromagnetic substance
听觉区域	auditory region
听阈	threshold of hearing
同步辐射	synchronous radiation
同核异能素	isomer
同量异位素	isobar
同时性的相对性	relativity of simultaneity
同位素	isotope
同位素丰度	isotope abundance
同相	in phase
同中子异位素	isotone
统计物理	statistical physics
统一原子质量单位	unified atomic mass unit, u
痛阈	threshold of feeling
透镜	lens
透射电子显微镜	transmission electron microscope
湍流	turbulent flow
退行红移	recessional redshift
椭圆偏振光	elliptically polarized light

W

瓦特	Watt, W
外界	surroundings
外力	external force
完全非弹性碰撞	perfectly inelastic collision
微观量	microscopic quantity
维恩位移定律	Wien displacement law
位矢	position vector
位移	displacement
位移电流	displacement current
位移极化	displacement polarization
温度梯度	temperature gradient
稳定度	stability
稳定核素	stable nuclide
稳定流动	steady flow



稳恒电流	steady current
稳态	steady state
无辐射跃迁	radiationless transition
无极分子	nonpolar molecule
无序性	disorder
物镜	objective

X

X 射线计算机横断层成像	X-ray computer aid transverse tomography
X 射线谱	X-ray spectrum
X 射线摄谱仪	X-ray spectrograph
X 射线摄影	X-ray roentgenography
X 射线透视	X-ray fluoroscopy
吸收光谱	absorption spectrum
吸收剂量	absorbed dose
吸引子	attractor
狭义相对论	special relativity
纤镜	fibre scope
线系限	series limit
线性衰减系数	linear attenuation coefficient
线性梯度场	linear field gradients
相差显微镜	phase contrast microscope
相对磁导率	relative permeability
相对介电常量	relative permittivity
相对论质量	relativistic mass
相对生物效应	relative biological effectiveness, RBE
相对性	relativity
相对性原理	relativity principle
相干波	coherent wave
相干波源	coherent sources
相干长度	coherent length
相干光	coherent light
相干面积	coherent area
相干时间	coherence time
相空间	states space
相空间重构	reconstruction of states space
相速度	phase velocity
相位	phase
相位编码	phase coding
相位对比法	phase contrast, PC
响度级	loudness level
像差	aberration
像素	pixel



效率
谐频
心磁图
心电场
心电偶
心电图
信息熵
兴奋状态
形变
旋磁比
旋光率
旋光色散
旋光性
旋进(或进动)
选片
薛定谔方程
寻常光
循环
循环过程

压电效应
压缩率
压缩率
压稳态
压应力
湮没
延迟弹性
延迟嵌入
衍射
阳极
杨氏模量
液晶
以太
因果律
阴极
引力波
引力红移
引力坍缩
应变
应力
应力松弛
荧光显微镜

efficiency
harmonic frequency
magnetocardiogram, MCG
cardio electric field
cardio electric dipole
electrocardiogram, ECG
message entropy
excited state
deformation
gyromagnetic ratio
specific rotation
rotatory dispersion
optical activity
precession
selected slice
Schrodinger equation
ordinary light
cycle
cycle process

Y

piezoelectric effect
compressibility
compressibility
metastable state
compressive stress
annihilation
delayed elasticity
delay embedding
diffraction
anode
Young's modulus
liquid crystal
aether
causality
cathode
gravitational wave
gravitational red shift
gravitational collapse
strain
stress
stress relation
fluorescence microscope



有极分子
有限元分析法
有效半衰期
有效衰变常量
有旋电场
右旋
宇称
阈频率
阈值条件
原子光谱
原子核
圆二色性
圆偏振光
远点
远视眼
运动学

polar molecule
finite element method
effective half life time
effective decay constant
curl electric field
right handed rotation
parity
threshold frequency
threshold condition
atomic spectrum
atomic nucleus
circular dichroism
circularly polarized light
far point
far sight
kinematics

Z

载流子
暂态过程
造影剂
展性
张力
张应变
张应力
照射量
真空磁导率
真空电容率
振动面
振幅
正比极限
正电子发射型计算机断层摄影
正晶体
正循环
质点
质量保证
质量定容热容
质量定压热容
质量厚度
质量控制
质量亏损
质量数
质量衰减系数

carrier
transient state process
contrast medium
malleability
tension
tensile strain
tensile stress
exposure
permeability of vacuum
permittivity of vacuum
plane of vibration
amplitude
proportional limit
positron emission tomography, PET
positive crystal
positive cycle
particle
quality assurance, QA
mass heat capacity at constant volume
mass heat capacity at constant pressure
mass thickness
quality control, QC
mass defect
mass number
mass attenuation coefficient



质能关系	mass energy relation
质谱仪	mass spectrometer
质子	proton
致冷机	refrigerator
致冷系数	refrigerator coefficient
滞后	hysteresis
中央处理系统	central process unit
中子	neutron
肿瘤放射治疗	radiation oncology
重复时间	repetition time
重力势能	gravitational potential energy
周期	period
主量子数	principal quantum number
主平面	principal plane
主折射率	principal refractive index
驻波	standing wave
柱面透镜	cylindrical lens
转动	rotation
转动惯量	moment of inertia
状态参量	states variable
状态方程	equation of state
准静态过程	quasi-static process
准直器	collimator
自发辐射	spontaneous radiation
自感	self-inductance
自感电动势	self-induced emf
自然光	natural light
自旋磁量子数	spin magnetic quantum number
自旋-回波	spin-echo
自旋-晶格弛豫时间	spin-lattice relaxation time
自旋量子数	spin quantum number
自旋-自旋弛豫时间	spin-spin relaxation time
自旋-自旋劈裂	spin-spin splitting
自由度	degree of freedom
自由感应衰减	free induction decay, FID
自组织现象	self organization phenomenon
纵波	longitudinal wave
纵模	longitudinal mode
纵向磁化矢量	longitudinal magnetization
阻抗图	impedance plethysmogram
阻尼系数	damped coefficient
阻尼振动	damped vibration
组合层析成像法	zeugmatography



最大允许剂量

maximum permissible dose,MPD

最概然速率

the most probable speed

左旋

left handed rotation

附录:常用物理常数

真空中光速

$$c=3.00\times10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

真空介电常数

$$\epsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$$

真空磁导率

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$$

库仑定律恒量

$$K=8.99\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$$

引力常量

$$G=6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$$

阿伏伽德罗常量

$$N_A=6.022\times10^{23}\text{mol}^{-1}$$

普适气体常量

$$R=8.31\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

玻耳兹曼常数

$$k=1.38\times10^{-23}\text{J}\cdot\text{S}^{-1}$$

基本电荷

$$e=1.60\times10^{-19}\text{C}$$

电子静止质量

$$m_e=9.11\times10^{-31}\text{kg}$$

质子静止质量

$$m_p=1.673\times10^{-27}\text{kg}$$

中子静止质量

$$m_n=1.675\times10^{-27}\text{kg}$$

地球质量

$$5.98\times10^{24}\text{kg}$$

太阳质量

$$1.99\times10^{30}\text{kg}$$

月球质量

$$7.35\times10^{22}\text{kg}$$

斯特藩-玻耳兹曼常量

$$\sigma=5.67\times10^{-8}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$$

维恩位移常量

$$b=2.898\times10^{-3}\text{m}\cdot\text{K}$$

太阳辐射功率

$$M=6.9\times10^7\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$

普朗克常数

$$h=6.626\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{S}$$

$$\hbar=h/2\pi=1.055\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{S}$$

$$R_\infty=1.0973731\cdot534\text{m}^{-1}$$

里德伯常数

$$\alpha_0=0.529177249\times10^{-10}\text{m}$$

玻尔半径

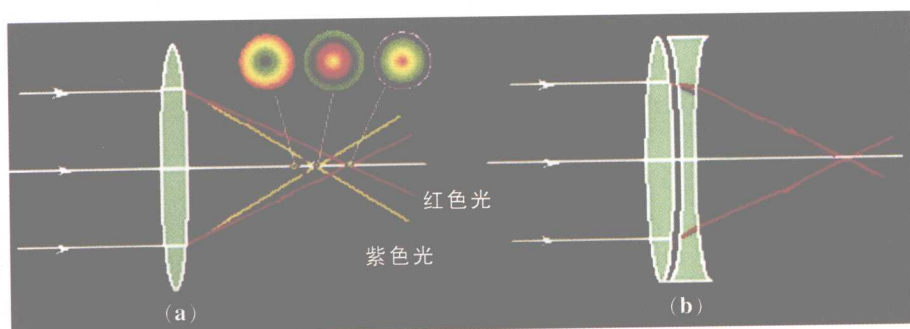
$$\lambda_c=2.426\times10^{-12}\text{m}$$

康普顿波长

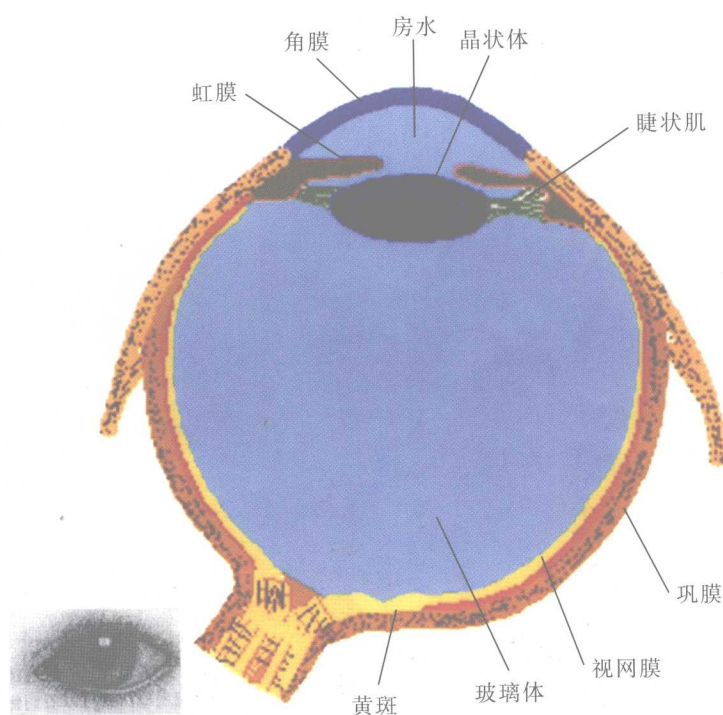
$$g=9.80\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

重力加速度





彩图 14-14 色像差及其矫正



彩图 14-15 眼和眼球的水平剖面