2018～2019 学年上学期高三期末监测试卷
数学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $(2-\mathrm{i})^2-(1+3\mathrm{i})=$

A. $2-7\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $4-7\mathrm{i}$　　D. $4+\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<2,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{Z}\}$,则 A 中元素的个数为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 9

3. 在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}=-2a_n$,且 $a_2=1$,则 $a_n=$

A. 2^{n-2}　　B. $(-2)^{n-2}$

C. 2^{n-1}　　D. $(-2)^{n-1}$

4. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的离心率为 2,则其实轴长为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知 $f(x)$为奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=4^x-1$,则 $f(-\log_2 3)=$

A. -7　　B. 7　　C. -8　　D. 8

6. 曲线 $y=\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x$ 的对称轴方程为

A. $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

B. $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

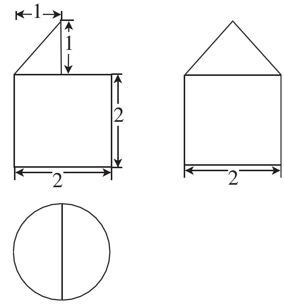
D. $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

7. 已知$\triangle ABC$是边长为 1 的等边三角形,D,E 分别为 AB,AC 的中点,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}=$

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{8}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{8}$

8. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为



A. $(6+\sqrt{2})\pi+\frac{1}{2}$

B. $(6+\sqrt{2})\pi+1$

C. $\frac{11+\sqrt{2}\pi}{2}+\frac{1}{2}$

D. $\frac{11+\sqrt{2}}{2}\pi+1$

9. 某公司安排甲、乙、丙、丁 4 人去上海、北京、深圳出差，每人仅出差一个地方，每个地方都需要安排人出差. 若甲不安排去北京，则不同的安排方法共有

A. 18 种　　B. 20 种　　C. 24 种　　D. 30 种

10. 函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2-3}$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值为

A. $\frac{e^3}{6}$　　B. e^2　　C. $\frac{e^3}{4}$　　D. $2e$

11. 在底面为直角三角形的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AC=CB=4$，点 D 为四边形 BB_1C_1C 对角线的交点，点 E 为平面 ABC 上一动点，则 A_1E+ED 的最小值为

A. 8　　B. $2\sqrt{14}$　　C. $2\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{10}$

12. 设 A_1,A_2,B_1 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右、上顶点，O 为坐标原点，D 为线段 OB_1 的中点，过 A_2 作直线 A_1D 的垂线，垂足为 H. 若 H 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{9}|OD|$，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.2	0.3	0.1	0.4

则 $EX=$ ▲ .

14. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y\leqslant 6,\\-1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为 ▲ .

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$，S_n 为其前 n 项和，则数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}\right\}$ 的前 9 项和 $T_9=$ ▲ .

16. 若函数 $f(x)=\left|\frac{2^x-2}{2^x+1}\right|-a$ 只有 1 个零点，则 a 的取值范围为 ▲ .

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

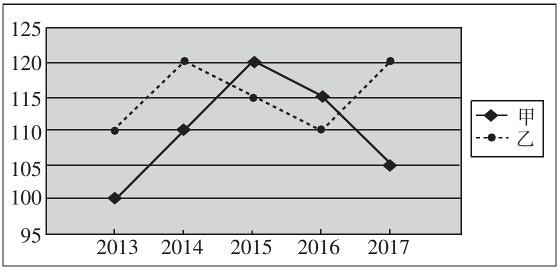
在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b\sin A\cos C+c\sin A\cos B=ac\sin B$.

（1）证明：$bc=a$；

（2）若$c=3$，$\cos C=\dfrac{1}{6}$，求AC边上的高.

18.（12 分）

甲、乙两人 2013－2017 这五年的年度体检的血压值的折线图如图所示.



（1）根据散点图，直接判断甲、乙这五年年度体检的血压值谁的波动更大，并求波动更大者的方差；

（2）根据乙这五年年度体检血压值的数据，求年度体检血压值y关于年份x的线性回归方程，并据此估计乙在 2018 年年度体检的血压值.

（附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$）

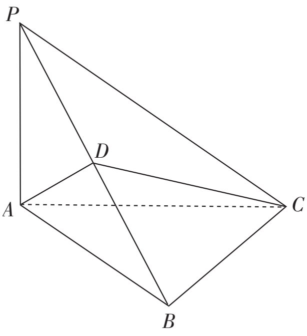
19.（12 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，且$PA=AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$.

（1）证明：三棱锥$P-ABC$为鳖臑；

（2）若D为棱PB的中点，求二面角$D-AC-P$的余弦值.

注：在《九章算术》中鳖臑是指四面皆为直角三角形的棱锥.



20.(12 分)

已知直线 $y=k(x-3)(k>0)$与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点,且 C 的准线与 x 轴交于点 M.

(1)证明:$9x_1+x_2\geqslant 18$;

(2)直线 MA,MB 的斜率分别记为 k_1,k_2,若 $k_2=-2k_1$,求 k.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}-x+a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)已知 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,令 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-(a-1)x-\frac{a}{x}$,若 $\exists a\in\mathbf{R}$,$g(x_1)+g(x_2)>t(x_1+x_2)$,求 t 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分,请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2t+1,\\y=|2t-1|\end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 M 的极坐标方程为 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2m\rho\sin\theta-m^2$.

(1)求 C 和 M 的直角坐标方程;

(2)若 C 与 M 恰有 4 个公共点,求 m 的取值范围.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|3x-a^2|+|3x-3|+a$.

(1)当 $a=-2$ 时,求不等式 $f(x)<0$ 的解集;

(2)若 $f(x)>17$,求 a 的取值范围.

2018～2019 学年上学期高三期末监测试卷

数学参考答案(理科)

1. A　$(2-\mathrm{i})^2-(1+3\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}-(1+3\mathrm{i})=2-7\mathrm{i}$.

2. B　$\because A=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}$，$\therefore A$ 共有 4 个元素.

3. B　$\because a_{n+1}=-2a_n, a_2=1$，$\therefore a_1=-\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=-\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-2}$.

4. D　由 $e=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}=2$，得 $a^2=\frac{1}{3}$，则 $2a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. C　$f(-\log_2 3)=-f(\log_2 3)=-(2^{2\log_2 3}-1)=-(9-1)=-8$.

6. A　$y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$，令 $3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，得 $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

7. B　因为$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1\times1\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$.

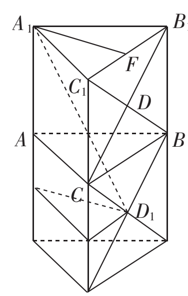
8. D　由三视图可知，该几何体由半个圆锥与一个圆柱体拼接而成，所以该几何体的表面积 $S=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+$

$\frac{3}{2}\pi+4\pi=\frac{11+\sqrt{2}}{2}\pi+1$.

9. C　若安排一人去北京，有 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$ 种；若安排两人去北京，有 $C_3^2A_2^2=6$ 种. 故总共有 $18+6=24$ 种.

10. A　$f'(x)=\frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$，当 $2\leqslant x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)_{\min}=f(3)=\frac{e^3}{6}$.

11. B　如图，点 D 关于平面 ABC 的对称点为 D_1，连接 A_1D_1. 设 F 为 B_1C_1 的中点，则 $A_1F=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 由题意得，$DE=D_1E$，所以 $A_1E+ED=A_1E+ED_1$，当 A_1,E,D_1 三点共线时，A_1E+ED_1 取最小值，此时 $A_1E+ED_1=A_1D_1=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$.



12. C　直线 A_1D 的方程为 $y=\frac{b}{2a}(x+a)$，直线 A_2H 的方程为 $y=-\frac{2a}{b}(x-a)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{b}{2a}(x+a), \\ y=-\frac{2a}{b}(x-a), \end{cases}$ 得 $y=\frac{4a^2b}{4a^2+b^2}$. $\because\frac{16}{9}|OD|=\frac{16}{9}\times\frac{b}{2}=\frac{8b}{9}$，$\therefore\frac{4a^2b}{4a^2+b^2}=\frac{8b}{9}$，

$\therefore a^2=2b^2$，$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 1.7　$EX=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.1+3\times0.4=1.7$.

14. 7　作出约束条件表示的可行域，由图可知，当直线 $z=2x+y$ 过点$(-1,9)$时，z 取得最大值 7.

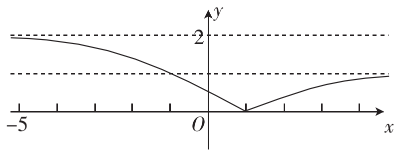
15. $\frac{27}{55}$　因为 $a_n=2n$，所以 $S_n=n(n+1)$.

因为$\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$，

所以 $T_9=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_9}-\frac{1}{S_{10}}=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{10}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{110}=\frac{27}{55}$.

16. $[1,2)\cup\{0\}$　设函数 $g(x)=\left|\frac{2^x-2}{2^x+1}\right|=\begin{cases}\frac{2^x-2}{2^x+1}, x\geqslant 1,\\ \frac{2-2^x}{2^x+1}, x<1\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{3}{2^x+1}, x\geqslant 1\\ \frac{3}{2^x+1}-1, x<1\end{cases}$，作出 $g(x)$ 的图象，如图所示，令

$f(x)=\left|\frac{2^x-2}{2^x+1}\right|-a=0$，得 $g(x)=a$，数形结合可得 $a\in[1,2)\cup\{0\}$.



17. (1)证明：因为 $\sin B\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos B=c\sin A\sin B$，$\sin A>0$，…………………… 2分

所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=c\sin B$，…………………… 3分

所以 $\sin A=c\sin B$，…………………… 4分

故 $a=bc$. …………………… 5分

(2)解：因为 $c=3$，$a=bc$，

所以 $a=3b$，$\cos C=\frac{10b^2-9}{6b^2}$. …………………… 7分

又 $\cos C=\frac{1}{6}$，所以$\frac{10b^2-9}{6b^2}=\frac{1}{6}$，解得 $b=1$，…………………… 9分

所以 $a=c=3$，$b=1$，…………………… 10分

所以 AC 边上的高为$\sqrt{9-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$. …………………… 12分

18. 解：(1)甲的波动更大. …………………… 1分

甲这五年年度体检的血压值的平均值为$\frac{100+110+120+115+105}{5}=110$，…………………… 3分

其方差为$\frac{(100-110)^2+(110-110)^2+(120-110)^2+(115-110)^2+(105-110)^2}{5}=50$. …………………… 5分

(2)$\because \bar{x}=2015$，$\bar{y}=115$，…………………… 6分

$\therefore \hat{b}=\frac{(-2)\times(-5)+(-1)\times 5+1\times(-5)+2\times 5}{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}=1$，…………………… 8分

$\hat{a}=115-2015=-1900$. …………………… 9分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=x-1900$. …………………… 10分

当 $x=2018$ 时，$\hat{y}=2018-1900=118$，…………………… 11分

故可估计乙在 2018 年年度体检的血压值为 118. …………………… 12分

19. (1)证明：$\because AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，

$\therefore AB\perp BC$，$\triangle ABC$ 为直角三角形. …………………… 1分

$\because PA\perp$平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$，$PA\perp AB$，$\triangle PAB$，$\triangle PAC$ 均为直角三角形. …………………… 3分

$\because AB\cap PA=A$，$\therefore BC\perp$平面 PAB. …………………… 4分

又 $PB\subset$平面 PAB，$\therefore BC\perp PB$，$\triangle PBC$ 为直角三角形. …………………… 5分

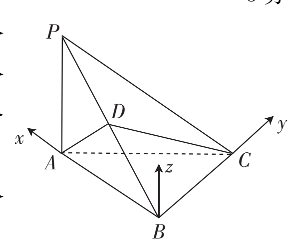
故三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑. …………………… 6分

(2)解：以 B 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $B-xyz$，

如图所示，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(1,0,1)$，…………………… 7分

则$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+2y=0,\end{cases}$ …………………………………… 8 分

令 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. …………………………………… 9 分

易知平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$,…………………………………… 10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………… 11 分

由图可知二面角 $D-AC-P$ 为锐角,则二面角 $D-AC-P$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………… 12 分

20.(1)证明:联立$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x-3)\end{cases}$得 $k^2x^2-(6k^2+4)x+9k^2=0$,…………………………………… 1 分

则 $x_1x_2=\dfrac{9k^2}{k^2}=9$. …………………………………… 2 分

从而 $9x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{9x_1x_2}=18$,…………………………………… 3 分

当且仅当 $9x_1=x_2$,即 $x_1=1,x_2=9$ 时,等号成立,…………………………………… 4 分

故 $9x_1+x_2\geqslant 18$. …………………………………… 5 分

(2)解:由(1)知,$x_1+x_2=\dfrac{6k^2+4}{k^2}$,…………………………………… 6 分

$\because k_2=-2k_1$,点 M 的坐标为$(-1,0)$,…………………………………… 7 分

$\therefore\dfrac{y_2}{x_2+1}=-\dfrac{2y_1}{x_1+1}$,则 $2k(x_1-3)(x_2+1)+k(x_2-3)(x_1+1)=0$,…………………………………… 8 分

即 $x_1+5x_2=18$,…………………………………… 9 分

又 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2+4}{k^2}$,$\therefore x_2=3-\dfrac{1}{k^2}$,…………………………………… 10 分

由 $k^2x_2^2-(6k^2+4)x_2+9k^2=0$,

得 $k^2(9-\dfrac{6}{k^2}+\dfrac{1}{k^4})-(6k^2+4)(3-\dfrac{1}{k^2})+9k^2=\dfrac{5}{k^2}-12=0$. …………………………………… 11 分

$\because k>0$,$\therefore k=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$. …………………………………… 12 分

21.解:(1)$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=-\dfrac{x^2-ax+a}{x^2}(x>0)$. …………………………………… 1 分

(ⅰ)当 $a^2-4a\leqslant 0$,即 $0\leqslant a\leqslant 4$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;

…………………………………… 2 分

(ⅱ)当 $a^2-4a>0$,即 $a<0$ 或 $a>4$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$. …………………………………… 3 分

①当 $a<0$ 时,在$(0,\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$上 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;在$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$上 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减. …………………………………… 4 分

②当 $a>4$ 时,在$(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2})$和$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$上 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;在$(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$上 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增. …………………………………… 5 分

(2)$g(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$,则 $g'(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{x}$,…………………………………… 6 分

由(1)可知,$x_1+x_2=a$,$x_1x_2=a$,且 $a>4$. …………………………………… 7 分

则 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1+\ln x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-a(x_1+x_2)$

$=a\ln(x_1x_2)+\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-a(x_1+x_2)$

$=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$， …………………………………………………………… 8 分

从而$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\ln a-\frac{1}{2}a-1$． …………………………………………… 9 分

令 $h(a)=\ln a-\frac{1}{2}a-1,a>4$,则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$.

因为 $a>4$,所以 $h'(a)<0$, …………………………………………………………… 10 分

所以 $h(a)$在$(4,+\infty)$上单调递减,则 $h(a)<h(4)$,即 $h(a)<\ln 4-3$. ………………… 11 分

因为$\exists a\in\mathbf{R}$,$g(x_1)+g(x_2)>t(x_1+x_2)$,即 $t<\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}$,所以 $t<\ln 4-3$,

即 t 的取值范围为$(-\infty,\ln 4-3)$. …………………………………………………… 12 分

22.解:(1)由 $y=|2t-1|=|2t+1-2|$,得 $y=|x-2|$,

故 C 的直角坐标方程为 $y=|x-2|$. ……………………………………………………… 2 分

由 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2m\rho\sin\theta-m^2$,得 $x^2+y^2=4x+2my-m^2$,

故 M 的直角坐标方程为$(x-2)^2+(y-m)^2=4$. ………………………………………… 4 分

(2)当 C 和 M 相切时,圆 M 的圆心到直线 $y=x-2$ 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}=2$, ………………… 6 分

且 $m>0$,则 $m=2\sqrt{2}$. …………………………………………………………………… 7 分

当 C 与 M 恰有 3 个公共点时,$m=2$. ……………………………………………………… 9 分

故当 C 与 M 恰有 4 个公共点时,m 的取值范围为$(2,2\sqrt{2})$. …………………………… 10 分

23.解:(1)当 $a=-2$ 时,$f(x)=|3x-4|+|3x-3|-2=\begin{cases}5-6x,x\leqslant 1\\-1,1<x<\frac{4}{3}\\6x-9,x\geqslant\frac{4}{3}\end{cases}$, ……………………… 3 分

故不等式 $f(x)<0$ 的解集为$(\frac{5}{6},\frac{3}{2})$. ……………………………………………… 5 分

(2)$\because f(x)=|3x-a^2|+|3x-3|+a\geqslant|(3x-a^2)-(3x-3)|+a=|a^2-3|+a$, ……………… 7 分

$\therefore |a^2-3|+a>17$, …………………………………………………………………… 8 分

则 $a^2-3>17-a$ 或 $a^2-3<-17+a$,解得 $a<-5$ 或 $a>4$,

故 a 的取值范围为$(-\infty,-5)\cup(4,+\infty)$. ……………………………………………… 10 分

2018～2019 学年上学期高三期末监测试卷

数学参考答案(理科)

1. A　$(2-\mathrm{i})^2-(1+3\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}-(1+3\mathrm{i})=2-7\mathrm{i}$.

2. B　$\because A=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}$，$\therefore A$ 共有 4 个元素.

3. B　$\because a_{n+1}=-2a_n, a_2=1$，$\therefore a_1=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_n=-\dfrac{1}{2}\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-2}$.

4. D　由 $e=\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}=2$，得 $a^2=\dfrac{1}{3}$，则 $2a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. C　$f(-\log_2 3)=-f(\log_2 3)=-(2^{2\log_2 3}-1)=-(9-1)=-8$.

6. A　$y=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{6})$，令 $3x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，得 $x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

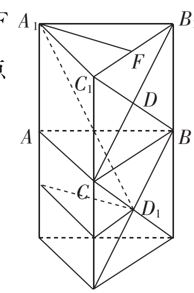
7. B　因为 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\times1\times1\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}$.

8. D　由三视图可知，该几何体由半个圆锥与一个圆柱体拼接而成，所以该几何体的表面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi+\dfrac{3}{2}\pi+4\pi=\dfrac{11+\sqrt{2}}{2}\pi+1$.

9. C　若安排一人去北京，有 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$ 种；若安排两人去北京，有 $C_3^2A_2^2=6$ 种. 故总共有 $18+6=24$ 种.

10. A　$f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$，当 $2\leqslant x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)_{\min}=f(3)=\dfrac{e^3}{6}$.

11. B　如图，点 D 关于平面 ABC 的对称点为 D_1，连接 A_1D_1. 设 F 为 B_1C_1 的中点，则 $A_1F=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 由题意得，$DE=D_1E$，所以 $A_1E+ED=A_1E+ED_1$，当 A_1,E,D_1 三点共线时，A_1E+ED_1 取最小值，此时 $A_1E+ED_1=A_1D_1=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$.



12. C　直线 A_1D 的方程为 $y=\dfrac{b}{2a}(x+a)$，直线 A_2H 的方程为 $y=-\dfrac{2a}{b}(x-a)$，

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{b}{2a}(x+a), \\ y=-\dfrac{2a}{b}(x-a), \end{cases}$ 得 $y=\dfrac{4a^2b}{4a^2+b^2}$. $\because\dfrac{16}{9}|OD|=\dfrac{16}{9}\times\dfrac{b}{2}=\dfrac{8b}{9}$，$\therefore\dfrac{4a^2b}{4a^2+b^2}=\dfrac{8b}{9}$，

$\therefore a^2=2b^2$，$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 1.7　$EX=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.1+3\times0.4=1.7$.

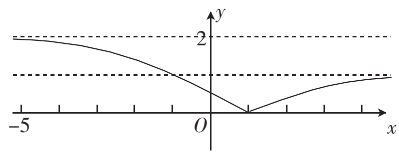
14. 7　作出约束条件表示的可行域，由图(图略)可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $(-1,9)$ 时，z 取得最大值 7.

15. $\dfrac{27}{55}$　因为 $a_n=2n$，所以 $S_n=n(n+1)$.

因为 $\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$，

所以 $T_9=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_9}-\dfrac{1}{S_{10}}=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{10}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{110}=\dfrac{27}{55}$.

16. $[1,2)\cup\{0\}$　设函数 $g(x)=|\frac{2^x-2}{2^x+1}|=\begin{cases}\frac{2^x-2}{2^x+1},x\geqslant1,\\ \frac{2-2^x}{2^x+1},x<1\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{3}{2^x+1},x\geqslant1\\ \frac{3}{2^x+1}-1,x<1\end{cases}$,作出 $g(x)$ 的图象,如图所示,令 $f(x)=|\frac{2^x-2}{2^x+1}|-a=0$,得 $g(x)=a$,数形结合可得 $a\in[1,2)\cup\{0\}$.



17. (1)证明:因为 $\sin B\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos B=c\sin A\sin B$,$\sin A>0$,…… 2 分

所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=c\sin B$,…… 3 分

所以 $\sin A=c\sin B$,…… 4 分

故 $a=bc$.…… 5 分

(2)解:因为 $c=3$,$a=bc$,

所以 $a=3b$,$\cos C=\frac{10b^2-9}{6b^2}$.…… 7 分

又 $\cos C=\frac{1}{6}$,所以 $\frac{10b^2-9}{6b^2}=\frac{1}{6}$,解得 $b=1$,…… 9 分

所以 $a=c=3$,$b=1$,…… 10 分

所以 AC 边上的高为 $\sqrt{9-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$.…… 12 分

18. 解:(1)甲的波动更大.…… 1 分

甲这五年年度体检的血压值的平均值为 $\frac{100+110+120+115+105}{5}=110$,…… 3 分

其方差为 $\frac{(100-110)^2+(110-110)^2+(120-110)^2+(115-110)^2+(105-110)^2}{5}=50$.…… 5 分

(2)$\because \bar{x}=2015$,$\bar{y}=115$,…… 6 分

$\therefore \hat{b}=\frac{(-2)\times(-5)+(-1)\times5+1\times(-5)+2\times5}{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}=1$,…… 8 分

$\hat{a}=115-2015=-1900$.…… 9 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=x-1900$.…… 10 分

当 $x=2018$ 时,$\hat{y}=2018-1900=118$,…… 11 分

故可估计乙在 2018 年年度体检的血压值为 118.…… 12 分

19. (1)证明:$\because AB=BC=2$,$AC=2\sqrt{2}$,$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$,

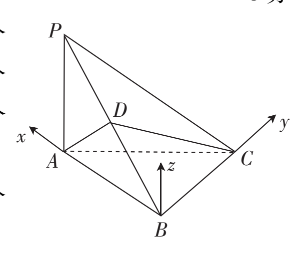
$\therefore AB\perp BC$,$\triangle ABC$ 为直角三角形.…… 1 分

$\because PA\perp$ 平面 ABC,$\therefore PA\perp BC$,$PA\perp AB$,$\triangle PAB$,$\triangle PAC$ 均为直角三角形.…… 3 分

$\because AB\cap PA=A$,$\therefore BC\perp$ 平面 PAB.…… 4 分

又 $PB\subset$ 平面 PAB,$\therefore BC\perp PB$,$\triangle PBC$ 为直角三角形.…… 5 分

故三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑.…… 6 分



(2)解:以 B 为坐标原点,建立空间直角坐标系 $B-xyz$,

如图所示,则 $A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$D(1,0,1)$,…… 7 分

则 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+2y=0,\end{cases}$ …………………………………………………… 8 分

令 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. …………………………………………………… 9 分

易知平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$, …………………………………… 10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………… 11 分

由图可知二面角 $D-AC-P$ 为锐角,则二面角 $D-AC-P$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 12 分

20.(1)证明:联立$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x-3)\end{cases}$得 $k^2x^2-(6k^2+4)x+9k^2=0$, …………………… 1 分

则 $x_1x_2=\dfrac{9k^2}{k^2}=9$. …………………………………………………… 2 分

从而 $9x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{9x_1x_2}=18$, …………………………………………… 3 分

当且仅当 $9x_1=x_2$,即 $x_1=1,x_2=9$ 时,等号成立, ………………………………… 4 分

故 $9x_1+x_2\geqslant 18$. …………………………………………………… 5 分

(2)解:由(1)知,$x_1+x_2=\dfrac{6k^2+4}{k^2}$, ………………………………………… 6 分

∵$k_2=-2k_1$,点 M 的坐标为$(-1,0)$, …………………………………………… 7 分

∴$\dfrac{y_2}{x_2+1}=-\dfrac{2y_1}{x_1+1}$,则 $2k(x_1-3)(x_2+1)+k(x_2-3)(x_1+1)=0$, ………… 8 分

即 $x_1+5x_2=18$, …………………………………………………… 9 分

又 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2+4}{k^2}$,∴$x_2=3-\dfrac{1}{k^2}$, ………………………………………… 10 分

由 $k^2x_2^2-(6k^2+4)x_2+9k^2=0$,

得 $k^2(9-\dfrac{6}{k^2}+\dfrac{1}{k^4})-(6k^2+4)(3-\dfrac{1}{k^2})+9k^2=\dfrac{5}{k^2}-12=0$. ……………………… 11 分

∵$k>0$,∴$k=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$. …………………………………………………… 12 分

21.解:(1)$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=-\dfrac{x^2-ax+a}{x^2}(x>0)$. …………………………… 1 分

(ⅰ)当 $a^2-4a\leqslant 0$,即 $0\leqslant a\leqslant 4$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;

…………………………………………………………………… 2 分

(ⅱ)当 $a^2-4a>0$,即 $a<0$ 或 $a>4$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$. ……… 3 分

①当 $a<0$ 时,在$(0,\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$上 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;在$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$上 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减. …………………………………………………… 4 分

②当 $a>4$ 时,在$(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2})$和$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$上 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;在$(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2})$上 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增. ………………………………… 5 分

(2)$g(x)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$,则 $g'(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{x}$, …………………………… 6 分

由(1)可知,$x_1+x_2=a$,$x_1x_2=a$,且 $a>4$. ………………………………………… 7 分

则 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1+\ln x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-a(x_1+x_2)$

$=a\ln(x_1x_2)+\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-a(x_1+x_2)$

$=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$, ………………………………………………………………………… 8 分

从而 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\ln a-\frac{1}{2}a-1$. ……………………………………………………… 9 分

令 $h(a)=\ln a-\frac{1}{2}a-1, a>4$,则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$.

因为 $a>4$,所以 $h'(a)<0$, ………………………………………………………………… 10 分

所以 $h(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减,则 $h(a)<h(4)$,即 $h(a)<\ln 4-3$. ……………………… 11 分

因为 $\exists a\in\mathbf{R}, g(x_1)+g(x_2)>t(x_1+x_2)$,即 $t<\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}$,所以 $t<\ln 4-3$,

即 t 的取值范围为 $(-\infty,\ln 4-3)$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由 $y=|2t-1|=|2t+1-2|$,得 $y=|x-2|$,

故 C 的直角坐标方程为 $y=|x-2|$. ……………………………………………………………… 2 分

由 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2m\rho\sin\theta-m^2$,得 $x^2+y^2=4x+2my-m^2$,

故 M 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-m)^2=4$. ……………………………………………… 4 分

(2)当 C 和 M 相切时,圆 M 的圆心到直线 $y=x-2$ 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}=2$, ……………… 6 分

且 $m>0$,则 $m=2\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………… 7 分

当 C 与 M 恰有 3 个公共点时,$m=2$. ……………………………………………………… 9 分

故当 C 与 M 恰有 4 个公共点时,m 的取值范围为 $(2,2\sqrt{2})$. ………………………………… 10 分

23. 解:(1)当 $a=-2$ 时,$f(x)=|3x-4|+|3x-3|-2=\begin{cases}5-6x, x\leqslant 1\\ -1, 1<x<\frac{4}{3}\\ 6x-9, x\geqslant\frac{4}{3}\end{cases}$, ……………………… 3 分

故不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(\frac{5}{6},\frac{3}{2})$. ……………………………………………………… 5 分

(2)$\because f(x)=|3x-a^2|+|3x-3|+a\geqslant|(3x-a^2)-(3x-3)|+a=|a^2-3|+a$, ……………… 7 分

$\therefore |a^2-3|+a>17$, ………………………………………………………………………… 8 分

则 $a^2-3>17-a$ 或 $a^2-3<-17+a$,解得 $a<-5$ 或 $a>4$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-5)\cup(4,+\infty)$. …………………………………………………… 10 分