

2023年福建省厦门市思明区双十中学高考数学适应性试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5分) 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x - 1}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (5分) 若虚数 z 使得 $z^2 + z$ 是实数, 则 z 满足()

- A. 实部是 $-\frac{1}{2}$ B. 实部是 $\frac{1}{2}$ C. 虚部是 0 D. 虚部是 $\frac{1}{2}$

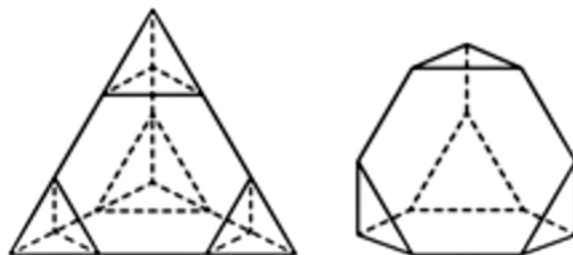
3. (5分) 平面向量 $\vec{a} = (-2, k)$, $\vec{b} = (2, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| = ()$

- A. 6 B. 5 C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{5}$

4. (5分) 设公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4 = 2a_5$, 则 $\frac{S_7}{S_4} = ()$

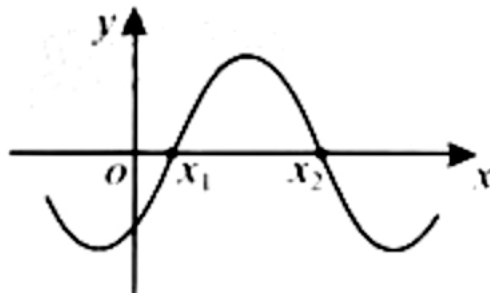
- A. $\frac{7}{4}$ B. -1 C. 1 D. $\frac{5}{4}$

5. (5分) 截角四面体是一种半正八面体, 可由四面体经过适当的截角而得到. 如图, 将棱长为6的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面截角得到所有棱长均为2的截角四面体, 则该截角四面体的体积为()



- A. $6\sqrt{2}$ B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{46\sqrt{2}}{3}$ D. $16\sqrt{2}$

6. (5分) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$. 在已知 $\frac{x_2}{x_1}$ 的条件下, 则下列选项中可以确定其值的量为()



- A. ω B. φ C. $\frac{\varphi}{\omega}$ D. $A \sin \varphi$

7. (5分) 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A, B 两点, 点 C 在 x 轴上, $\vec{CB} = 3\vec{F_2A}$, BF_2 平分 $\angle F_1BC$, 则双曲线 Γ 的离心率为()

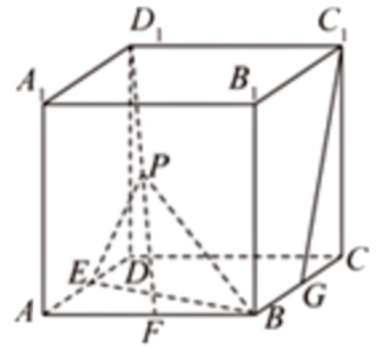
A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. (5分) 已知函数 $f(x) = \log_3(3^{x-1} + 3) - \frac{1}{2}x$ ，若 $f(a-1) \geq f(2a+1)$ 成立，则实数 a 的取值范围为()
 A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ C. $[-2, \frac{4}{3}]$ D. $(-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多个符合题目要求。全不选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

1. (5分) 已知圆 $M: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 12$ ，直线 $l: mx - y - 2m + 3 = 0$ ，直线 l 与圆 M 交于 A, C 两点，则下列说法正确的是()
 A. 直线 l 恒过定点 $(2, 3)$ B. $|\overrightarrow{AC}|$ 的最小值为4 C. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ 的取值范围为 $[-12, 4]$
 D. 当 $\angle AMC$ 最小时，其余弦值为 $\frac{1}{2}$

2. (5分) 如图，在棱长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别为棱 AD, AB, BC 的中点，点 P 为线段 D_1F 上的动点，则()



A. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 45° B. 存在点 P ，使得 $C_1G \parallel$ 平面 BEP
 C. 对任意点 P ，平面 $FCC_1 \perp$ 平面 BEP D. 点 B_1 到直线 D_1F 的距离为4

3. (5分) 在一次全市视力达标测试后，该市甲乙两所学校统计本校理科和文科学生视力达标率结果得到如表：

	甲校理科生	甲校文科生	乙校理科生	乙校文科生
达标率	60%	70%	65%	75%

定义总达标率为理科与文科学生达标人数之和与文理科学生总人数的比，则下列说法中正确的有()

A. 乙校的理科生达标率和文科生达标率都分别高于甲校
 B. 两校的文科生达标率都分别高于其理科生达标率
 C. 若甲校理科生和文科生达标人数相同，则甲校总达标率为65%
 D. 甲校的总达标率可能高于乙校的总达标率

4. (5分) 已知函数 $f(x) = \sin x + \ln x$ ，将 $f(x)$ 的所有极值点按照由小到大的顺序排列得到数列 $\{x_n\}$ ，对于正整数 n ，则下列说法中正确的有()

- A. $(n-1)\pi < x_n < n\pi$ B. $x_{n+1} - x_n < \pi$ C. $\left\{ \left| x_n - \frac{(2n-1)\pi}{2} \right| \right\}$ 为递减数列
D. $f(x_{2n}) > -1 + \ln \frac{(4n-1)\pi}{2}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

1. (5分) 已知 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影向量的坐标为 _____ .
2. (5分) 若两条直线 $l_1: y=3x+m$, $l_2: y=3x+n$ 与圆 $x^2+y^2+3x+y+k=0$ 的四个交点能构成矩形, 则 $m+n=$ _____ .
3. (5分) 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - ax^2, & x > 0 \\ -x^2 + (a-2)x + 2a, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围为 _____ .
4. (5分) 设 F 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, A, B 分别为双曲线 E 的左右顶点, 点 P 为双曲线 E 上异于 A, B 的动点, 直线 $l: x=t$ 使得过 F 作直线 AP 的垂线交直线 l 于点 Q 时总有 B, P, Q 三点共线, 则 $\frac{t}{a}$ 的最大值为 _____ .

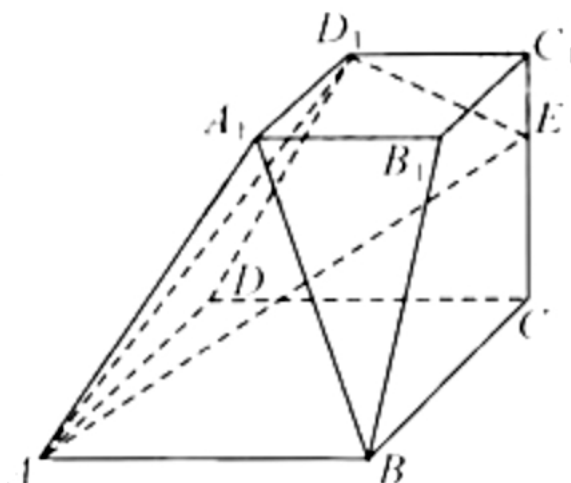
四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. (10分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1=1$, $2na_n - 2S_n = n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = 2^n - 1$, 令 $c_n = \frac{a_n^2}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

2. (12分) 如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面和上底面分别是边长为4和2的正方形，侧棱 CC_1 上点 E 满足 $\frac{C_1E}{C_1C} = \frac{1}{3}$.

(1)证明：直线 $A_1B \parallel$ 平面 AD_1E ;

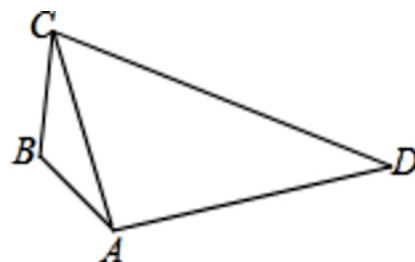
(2)若 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $CC_1=3$, 求直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值 .



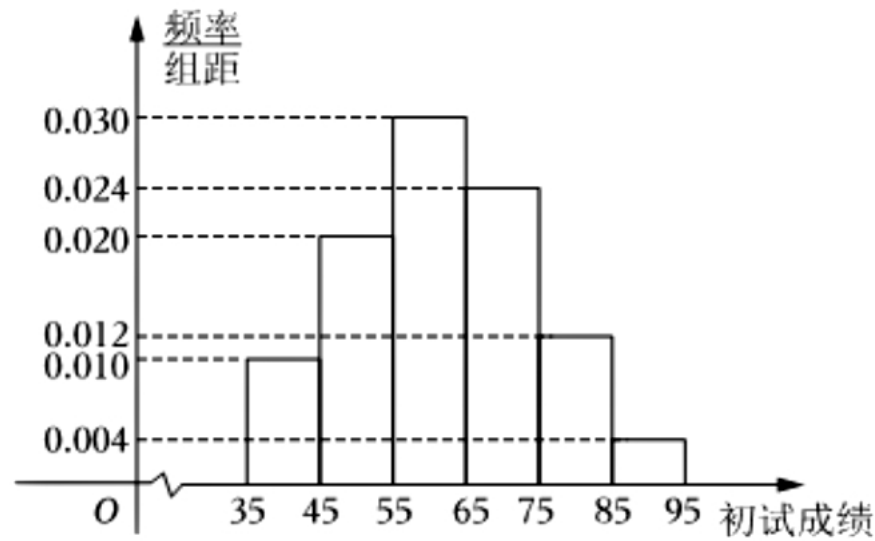
3. (12分) 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $AB=1$, $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$.

(1)当 $BC=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{7}$ 时，求 $\triangle ACD$ 的面积；

(2)当 $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$, $AD=2$ 时，求 $\cos \angle ACD$.



4. (12分) 某市举行招聘考试，共有4000人参加，分为初试和复试，初试通过后参加复试．为了解考生的考试情况，随机抽取了100名考生的初试成绩，并以此为样本绘制了样本频率分布直方图，如图所示．

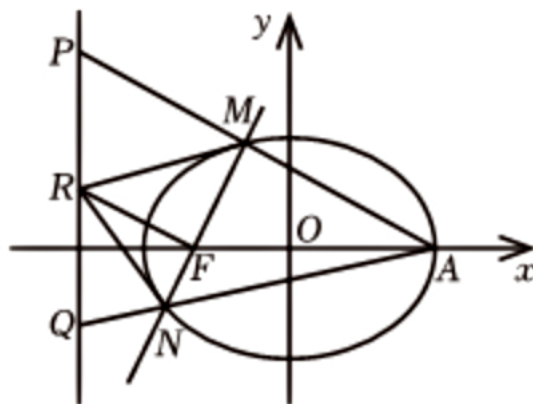


- (1)根据频率分布直方图，试求样本平均数的估计值；
- (2)若所有考生的初试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 为样本平均数的估计值， $\sigma \approx 13$ ，试估计初试成绩不低于88分的人数；
- (3)复试共三道题，第一题考生答对得5分，答错得0分，后两题考生每答对一道题得10分，答错得0分，答完三道题后的得分之和为考生的复试成绩．已知某考生进入复试，他在复试中第一题答对的概率为 $\frac{3}{4}$ ，后两题答对的概率均为 $\frac{3}{5}$ ，且每道题回答正确与否互不影响．记该考生的复试成绩为 Y ，求 Y 的分布列及均值．
- 附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则： $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$ ．

5. (12分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右顶点为 A ，左焦点为 F ，过点 F 作斜率不为零的直线 l 交椭圆于 M, N 两点，连接 AM, AN 分别交直线 $x = -\frac{9}{2}$ 于 P, Q 两点，过点 F 且垂直于 MN 的直线交直线 $x = -\frac{9}{2}$ 于点 R 。

(1) 求证：点 R 为线段 PQ 的中点；

(2) 记 $\triangle MPR, \triangle MRN, \triangle NRQ$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ，试探究：是否存在实数 λ 使得 $\lambda S_2 = S_1 + S_3$ ？若存在，请求出实数 λ 的值；若不存在，请说明理由。



6. (12分) 已知关于 x 的方程 $ax - \ln x = 0$ 有两个不相等的正实根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ 。

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 设 k 为常数，当 a 变化时，若 $x_1^k x_2$ 有最小值 e^e ，求常数 k 的值。

2023年福建省厦门市思明区双十中学高考数学适应性试卷 (答案)

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 解：∵ $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$,

∴ $A \cap B = \{1, 2\}$.

故选：B.

2. 解：设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$),

$z^2 + z = (a + bi)^2 + (a + bi) = a^2 + 2abi - b^2 + a + bi = a^2 + a - b^2 + (2ab + b)i$, $z^2 + z$ 是实数,

因此 $2ab + b = 0$, $b = 0$ (舍去) 或 $a = -\frac{1}{2}$.

故选：A.

3. 解：因为 $\vec{a} = (-2, k)$, $\vec{b} = (2, 4)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 + 4k = 0$, 解得 $k = 1$,

所以 $\vec{a} - \vec{b} = (-4, 3)$,

所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

故选：B.

4. 解：在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_5 = a_4 + a_6$, $a_4 = 2a_5$, 故 $a_6 = 0$,

又 $2a_6 = a_5 + a_7$, 故 $a_7 = -a_5$,

则 $S_7 = S_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S_4$, 故 $\frac{S_7}{S_4} = 1$.

故选：C.

5. 解：截角四面体的体积为大正四面体的体积减去四个相等的小正四面体体积,

因为棱长为1的正四面体的高 $h = \sqrt{1 - (\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

则棱长为1的正四面体的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$,

所以该截角四面体的体积为 $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}$.

故选：C.

6. 解：令 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) = 0$,

根据“五点法”可得： $\omega x_1 + \varphi = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$,

$\omega x_2 + \varphi = 2k_2\pi + \pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$,

则 $\omega x_1 = 2k_1\pi - \varphi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $\omega x_2 = 2k_2\pi + \pi - \varphi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$,

则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2k_1\pi - \varphi}{2k_2\pi + \pi - \varphi}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, 设 $\frac{x_1}{x_2} = m$ (m 为常数),

则 $\varphi = \frac{2k\pi + \pi}{m-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, 再根据 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ 确定 φ 的取值.

故选：B.

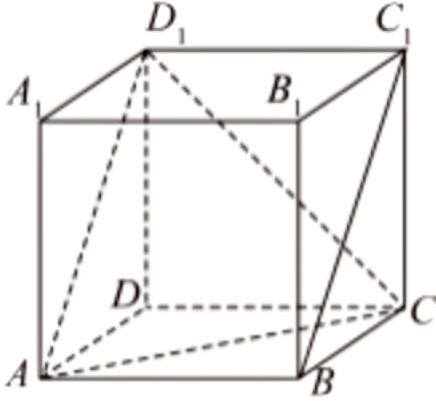
7. 解：因为 $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{F_2A}$ ，所以 $\triangle F_1AF_2 \sim \triangle F_1BC$ ，
 设 $|F_1F_2| = 2c$ ，则 $|F_2C| = 4c$ ，设 $|AF_1| = t$ ，则 $|BF_1| = 3t$ ， $|AB| = 2t$ ，
 因为 BF_2 平分 $\angle F_1BC$ ，由角平分线定理可知， $\frac{|BF_1|}{|BC|} = \frac{|F_1F_2|}{|F_2C|} = \frac{2c}{4c} = \frac{1}{2}$ ，
 所以 $|BC| = 2|BF_1| = 6t$ ，所以 $|AF_2| = \frac{1}{3}|BC| = 2t$ ，
 由双曲线定义知 $|AF_2| - |AF_1| = 2a$ ，即 $2t - t = 2a$ ， $t = 2a$ ，①
 又由 $|BF_1| - |BF_2| = 2a$ 得 $|BF_2| = 3t - 2a = 2t$ ，
 所以 $|BF_2| = |AB| = |AF_2| = 2t$ ，即 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形，
 所以 $\angle F_2BC = \angle ABF_2 = 60^\circ$ ，
 在 $\triangle F_1BF_2$ 中，由余弦定理知 $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{|BF_1|^2 + |BF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2 \cdot |BF_1| \cdot |BF_2|}$ ，
 即 $\frac{1}{2} = \frac{4t^2 + 9t^2 - 4c^2}{2 \cdot 2t \cdot 3t}$ ，化简得 $7t^2 = 4c^2$ ，
 把①代入上式得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$ ，所以离心率为 $\sqrt{7}$ 。
 故选：A。

8. 解：根据题意，函数 $f(x) = \log_3(3^{x-1} + 3) - \frac{1}{2}x = \log_3(3^{\frac{x-2}{2}} + 3^{\frac{2-x}{2}})$ ，
 有 $f(4-x) = \log_3(3^{\frac{x-2}{2}} + 3^{\frac{2-x}{2}}) = f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，
 设 $t = 3^{\frac{x-2}{2}}$ ， $g(t) = t + \frac{1}{t}$ ，则 $y = \log_3[g(x)]$ ，
 当 $x > 2$ 时， $\frac{x-2}{2} > 0$ ，则 $t > 1$ ，函数 $g(x) = t + \frac{1}{t}$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数， $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，
 故函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数，
 若 $f(a-1) \geq f(2a+1)$ 成立，则有 $|a-1-2| \geq |2a+1-2|$ ，解可得 $-2 \leq a \leq \frac{4}{3}$ ，即 a 的取值范围为 $[-2, \frac{4}{3}]$ ；
 故选：C。

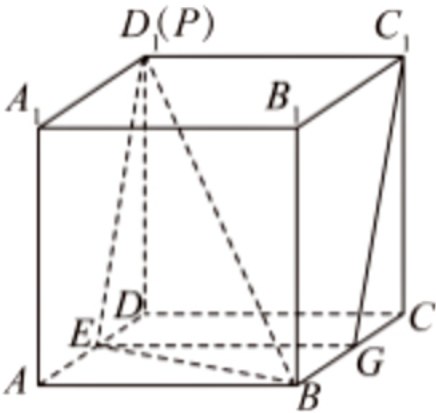
二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多个符合题目要求。全不选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

1. 解：对于A：由 $l: mx - y - 2m + 3 = 0 (m \in R)$ 整理得 $m(x-2) - y + 3 = 0$ ，
 当 $\begin{cases} x-2=0 \\ -y+3=0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 时，不论 m 为何值时 $m(x-2) - y + 3 = 0 (m \in R)$ 都成立，
 所以直线 l 过定点 $(2, 3)$ ，故A正确；
 对于B：因为直线 l 过定点 $K(2, 3)$ ，将定点代入圆 $C: (2-4)^2 + (3-5)^2 = 8 < 12$ ，
 所以定点 $K(2, 3)$ 在圆C的内部， $|KM| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$ ，
 当直线 $AC \perp MK$ 时， $|AC|$ 取得最小值，此时 $|AC| = 2\sqrt{12-8} = 4$ ，故B正确；
 对于D：设直线 l 过的定点 $K(2, 3)$ ，当 $KM \perp AC$ 时， $\angle AMC$ 最小，
 由余弦定理可得 $\cos \angle AMC = \frac{12+12-16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ ，故D错误；
 对于C： $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MC}| \cos \angle AMC$ ，又 $\cos \angle AMC \in [-1, \frac{1}{3}]$ ，
 $\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \in [-12, 4]$ ，故C正确。
 故选：ABC。

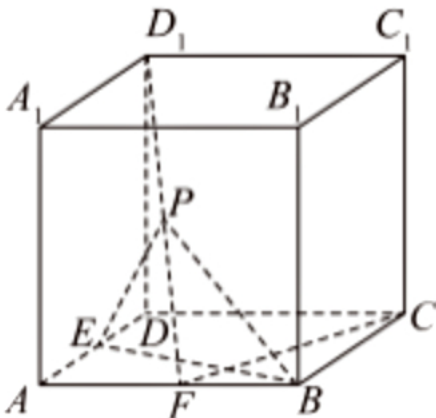
2. 解：对于A，由正方体的性质可得 $BC_1 \parallel AD_1$ ，两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成角即为 $\angle AD_1C=60^\circ$ ，故A错误；
对于B，当点P与点 D_1 重合时，由题知 $EG \parallel DC$ ， $EG=DC$ ， $D_1C_1 \parallel DC$ ， $D_1C_1=DC$ ，



$\therefore EG \parallel D_1C_1$ ， $EG=D_1C_1$ ，
四边形 EGC_1D_1 是平行四边形， $\therefore C_1G \parallel D_1E$ ，
 $\because C_1G \notin \text{平面} BEP$ ， $D_1E \subset \text{平面} BEP$ ， $\therefore C_1G \parallel \text{平面} BEP$ ，故B正确；



对于C，连接 CF ， $\because CC_1 \perp \text{平面} ABCD$ ， $BE \subset \text{平面} ABCD$ ， $\therefore CC_1 \perp BE$ ，

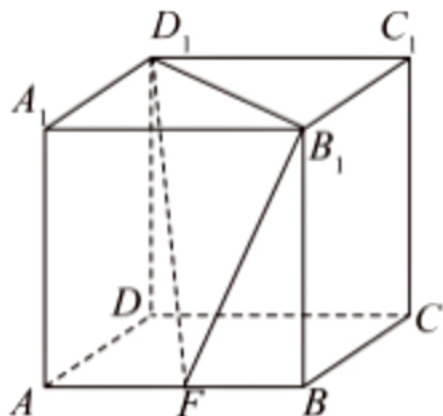


又 $AE=BF$ ， $AB=CB$ ， $\angle A=\angle CBF$ ， $\therefore \triangle BAE \cong \triangle CFB$ ，
 $\therefore \angle EBA + \angle CFB = 90^\circ$ ， $\therefore CF \perp BE$ ，
 $\because CE$ ， CC_1 相交， CF ， $CC_1 \subset \text{平面} FCC_1$ ， $\therefore BE \perp \text{平面} FCC_1$ ，
又 $BE \subset \text{平面} BEP$ ， \therefore 对任意点P，平面 $FCC_1 \perp \text{平面} BEP$ ，故C正确；

对于D，由正方体的性质得 $B_1D_1=4\sqrt{2}$ ， $FD_1=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$ ， $B_1F=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ ，

$$\therefore \cos \angle B_1 D_1 F = \frac{B_1 D_1^2 + F D_1^2 - B_1 F^2}{2 \bullet B_1 D_1 \bullet F D_1} = \frac{6^2 + (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \times 6 \times 4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle B_1 D_1 F = 45^\circ,$$



\therefore 点 B_1 到直线 $D_1 F$ 的距离为 $d = B_1 D_1 \sin \angle B_1 D_1 F = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ ，故 D 正确．

故选：BCD．

3. 解：对于 A ，由题意乙校的理科生达标率和文科生达标率都分别高于甲校，故 A 正确；

对于 B ，由题意两校的文科生达标率都分别高于其理科生达标率，故 B 正确；

对于 C ，设甲校理科生和文科生人数分别为 a, b ，

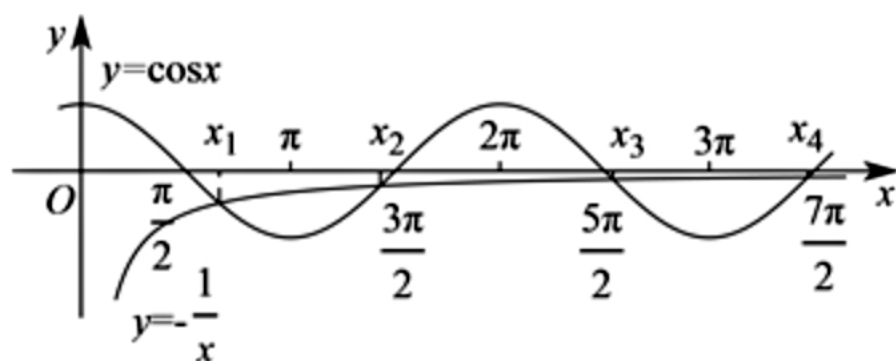
$$\text{则 } 0.6a = 0.7b, \therefore a = \frac{7}{6}b,$$

$$\therefore \text{甲校总达标率为：} \frac{0.6a + 0.7b}{a + b} = \frac{\frac{7}{6}b \times 0.6 + 0.7b}{\frac{7}{6}b + b} \times 100\% \approx 64.62\%, \text{ 故 } C \text{ 错误；}$$

对于 D ，由题意甲校的总达标率可能高于乙校的总达标率，故 D 正确．

故选：ABD．

4. 解：\$f(x)\$的极值点为\$f'(x) = \cos x + \frac{1}{x}\$在\$(0, +\infty)\$上的变号零点，
 即为函数\$y=\cos x\$与函数\$y=-\frac{1}{x}\$图象在\$(0, +\infty)\$交点的横坐标，
 \$\because x \in (0, +\infty)\$时，\$-\frac{1}{x} < 0\$，\$k \in \mathbb{N}\$时，\$\cos(\pi + 2k\pi) = -1 < -\frac{1}{\pi + 2k\pi}\$，\$k \in \mathbb{N}^*\$，
 \$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)\$时，\$\cos x > 0\$，
 据此可将两函数图象画在同一坐标系中，如图，



对于A，\$k \in \mathbb{N}\$时，\$f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} > 0\$，
 \$f'(\pi + 2k\pi) = -1 + \frac{1}{\pi + 2k\pi} < 0\$，\$f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} > 0\$，
 结合图象得当\$n=2k-1\$，\$k \in \mathbb{N}^*\$，\$x_n \in ((n-\frac{1}{2})\pi, n\pi) \subseteq ((n-1)\pi, n\pi)\$，
 当\$n=2k\$，\$k \in \mathbb{N}^*\$时，\$x_n \in ((n-1)\pi, (n-\frac{1}{2})\pi) \subseteq ((n-1)\pi, n\pi)\$，故A正确；
 对于B，由图象可知\$x_3 > \frac{5}{2}\pi\$，\$x_2 < \frac{3}{2}\pi\$，则\$x_3 - x_2 > \pi\$，故B错误；
 对于C，\$|x_1 - \frac{(2n-1)\pi}{2}|\$表示两点\$(x_n, 0)\$与\$((n-\frac{1}{2})\pi, 0)\$间距离，
 数形结合得随着\$n\$的增大，两点间的距离越来越小，即\$\{|x_n - \frac{(2n-1)\pi}{2}|\}\$为递减数列，故C正确；
 对于D，由A选项分析得：\$x_{2n} \in ((2n-1)\pi, \frac{4n-1}{2}\pi)\$，\$n \in \mathbb{N}^*\$，
 数形结合得当\$x \in (x_{2n}, \frac{(4n-1)\pi}{2})\$时，\$\cos x > -\frac{1}{x}\$，此时\$f'(x) > 0\$，
 \$\therefore f(x)\$在\$(x_{2n}, \frac{(4n-1)\pi}{2})\$上是单调递增函数，
 \$\therefore f(x_{2n}) < f(\frac{(4n-1)\pi}{2}) = -1 + \ln \frac{(4n-1)\pi}{2}\$，故D错误。
 故选：AC。

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

1. 解：\$\vec{a}\$在\$\vec{b}\$方向上的投影向量的坐标为
 \$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4 \times 1 + 2 \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot (1, 1)\$
 \$= 3 \cdot (1, 1)\$
 \$= (3, 3)\$；
 故答案为：\$(3, 3)\$。

2. 解：两条直线 $l_1: y=3x+m$, $l_2: y=3x+n$ 与圆 $x^2+y^2+3x+y+k=0$ 的四个交点能构成矩形，
 可得圆心 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ 在与两直线 l_1, l_2 的距离均相等的轨迹上，
 设所求轨迹上一个动点的坐标为 (x, y) ，可得 $\frac{|3x-y+m|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y+n|}{\sqrt{10}}$ ，
 由于 $m \neq n$ ，所以 $3x-y+m+3x-y+n=0$ ，即为 $3x-y+\frac{m+n}{2}=0$ ，
 所以 $-\frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m+n}{2} = 0$ ，
 可得 $m+n=8$ 。
 故答案为：8。

3. 解：当 $x > 0$ 时， $f(x) = e^x - ax^2$ ，由 $f(x) \geq 0$ ，可得 $a \leq \frac{e^x}{x^2}$ ，
 设 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ，可得 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，在 $(2, +\infty)$ 上单调递增，
 可得 $g(x) > g(2) = \frac{e^2}{4}$ ，
 $\therefore a \leq \frac{e^2}{4}$ ；
 当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = -x^2 + (a-2)x + 2a = -(x+2)(x-a)$ ，
 可得当 $a > -2$ 时， $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, a]$ ；
 当 $a \leq -2$ 时， $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[a, -2]$ ，不满足题意，舍去。
 \therefore 关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, +\infty)$ ，
 当 $a \geq 0$ 时， $[-2, a] \cap (-\infty, 0] = [-2, 0]$ ，满足 $[-2, 0] \cup (0, +\infty) = [-2, +\infty)$ ；
 当 $-2 < a < 0$ 时， $[-2, a] \cap (-\infty, 0] = [-2, a]$ ，不满足 $[-2, a] \cup (0, +\infty) = [-2, +\infty)$ 。
 综上可得， a 的取值范围是 $[0, \frac{e^2}{4}]$ 。
 故答案为： $[0, \frac{e^2}{4}]$ 。

4. 解：由题意可得 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ ，设直线 AP 的斜率为 k ，直线 AP 的方程为 $y=k(x+a)$ ，
 与双曲线方程 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b$ ，联立，可得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2k^2a^3x - a^4k^2 - a^2b^2 = 0$ ，
 则 $-a \cdot x_P = \frac{-a^4k^2 - a^2b^2}{b^2 - a^2k^2}$ ，解得 $x_P = \frac{a^3k^2 + ab^2}{b^2 - a^2k^2}$ ， $y_P = k(x_P + a) = \frac{2kab^2}{b^2 - a^2k^2}$ ，
 设过 $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 与直线 AP 垂直的直线为 l_1 ，方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - \sqrt{a^2 + b^2})$ ，
 由题意可得 Q 为直线 l_1 与直线 BP 的交点，
 直线 BP 的方程为 $y = \frac{y_P}{x_P - a}(x - a) = \frac{b^2}{ka^2}(x - a)$ ，与直线 l_1 联立，可得 $t = \frac{ab^2 + a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$ ，
 $\frac{t}{a} = \frac{b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{(\frac{b}{a})^2 + \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}}{1 + (\frac{b}{a})^2}$ ，
 令 $q = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}$ ($q > 1$)，则 $\frac{t}{a} = \frac{q^2 - 1 + q}{q^2} = -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = -(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$ ，
 当 $q = 2$ ，即 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 时， $\frac{t}{a}$ 取得最大值 $\frac{5}{4}$ 。
 故答案为： $\frac{5}{4}$ 。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. 解：(1) 证明：当 $n \geq 2$ 时，由 $2na_n - 2S_n = n^2 - n$ 可得 $2(n-1)a_{n-1} - 2S_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1)$ ，
 上面两式相减可得 $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$ ，

则 $a_n - a_{n-1} = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = 2^n - 1$,

可得 $b_1 = T_1 = 2 - 1 = 1$,

$n \geq 2$ 时, $b_n = T_n - T_{n-1} = 2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}$,

上式对 $n=1$ 也成立,

则 $b_n = 2^{n-1}$, $n \in N^*$;

又 $a_n = n$, 所以 $c_n = \frac{a_n^2}{b_n} = \frac{n^2}{2^{n-1}}$,

$$R_n = \frac{1}{2^0} + \frac{4}{2^1} + \frac{9}{2^2} + \dots + \frac{n^2}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2} R_n = \frac{1}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \dots + \frac{n^2}{2^n},$$

上面两式相减可得 $\frac{1}{2} R_n = 1 + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n}$,

$$\text{则 } \frac{1}{4} R_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}},$$

上面两式相减可得 $\frac{1}{4} R_n = 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}}$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n^2 + 4n - 2}{2^{n+1}},$$

化简可得 $R_n = 12 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n-1}}$.

2. 解: (1) 证明: 延长 D_1E 和 DC , 交于点 M , 连接 D_1N

由 $\frac{C_1E}{C_1C} = \frac{1}{3}$, 得 $\frac{C_1E}{CE} = \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{C_1D_1}{CM} = \frac{1}{2}$,

$\therefore CM = 4 = AB$, $\therefore N$ 是 BC 中点,

此时, $A_1D_1 \parallel B_1C_1 \parallel BN$,

$A_1D_1 = B_1C_1 = BN$,

\therefore 四边形 A_1BND_1 是平行四边形,

$\therefore A_1B \parallel D_1N$,

$\because D_1N \subset$ 平面 AD_1E , $A_1B \not\subset$ 平面 AD_1E ,

\therefore 直线 $A_1B \parallel$ 平面 AD_1E ;

(2) 以 C 为坐标原点, CD , CB , CC_1 所在直线

分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标

系,

则 $B(0, 4, 0)$, $B_1(0, 2, 3)$, $A(4, 4, 0)$,

$D_1(2, 0, 3)$, $E(0, 0, 2)$,

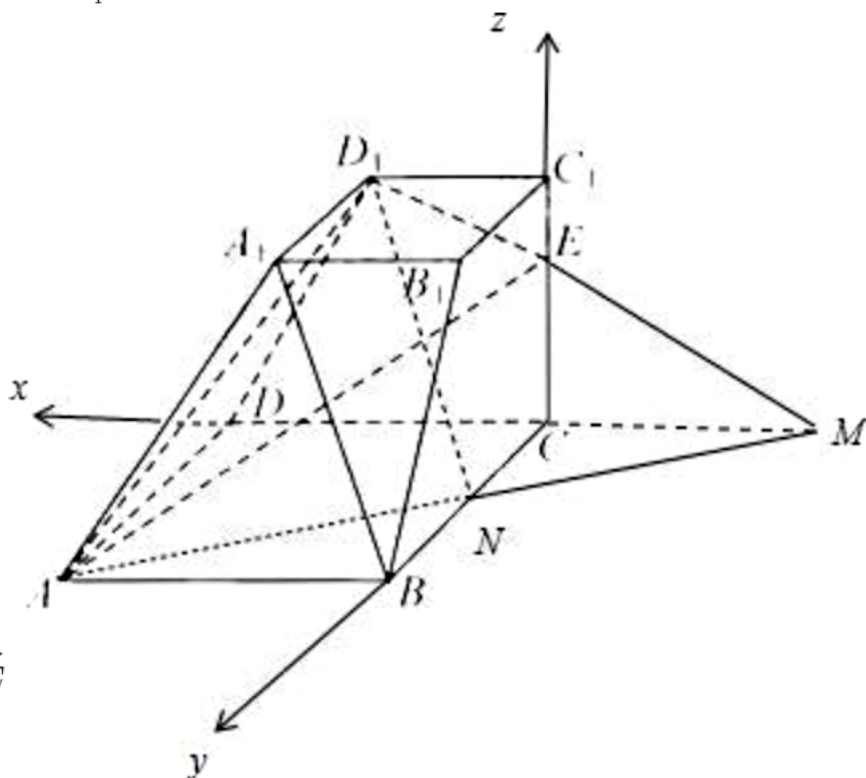
$$\overrightarrow{BB_1} = (0, -2, 3), \overrightarrow{AD_1} = (-2, -4, 3), \overrightarrow{AE}$$

$$= (-4, -4, 2),$$

设平面 AD_1E 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -2x - 4y + 3z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = -4x - 4y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x=1, \text{ 得 } \vec{n} = (1, -2, -2),$$

设直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ ,



则直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为：

$$\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BB_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BB_1}|} = \frac{2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{39}.$$

3. 解：过 A 作 $AH \perp CD$ 于点 H ，再过 B 作 $BM \perp AH$ 于点 M ，结合 $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$ ，可知 $\angle MBC = \frac{\pi}{2}$ ，故 $\angle ABM = \frac{\pi}{4}$ ，

(1)在 $\triangle ABC$ 中， $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ$

$1 + 2 - 2 \times \sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 5$ ，故 $AC = \sqrt{5}$ ，

故 $\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，即 $\sin \angle ACH = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，

所以 $AH = AC \cdot \sin \angle ACH = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ，

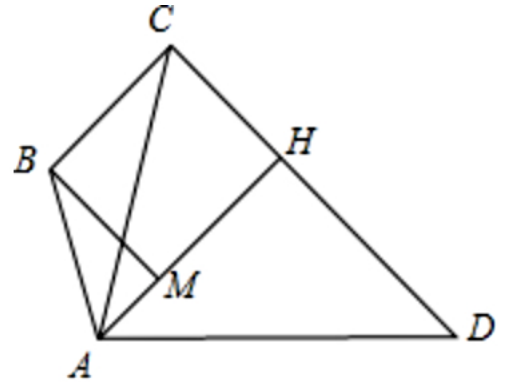
所以 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AH = \frac{3\sqrt{14}}{4}$ 。

(2)如图，在 $Rt\triangle ABM$ 中， $BM = AB \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = CH$ ，

在 $Rt\triangle AHD$ 中， $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$ ，故 $AH = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 1$ ，

所以 $AC^2 = AH^2 + CH^2 = \frac{3}{2}$ ，即 $AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

所以 $\cos \angle ACD = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



4. 解：(1)样本平均数的估计值为 $(40 \times 0.010 + 50 \times 0.020 + 60 \times 0.030 + 70 \times 0.024 + 80 \times 0.012 + 90 \times 0.004) \times 10 = 62$ ；

(2)因为学生初试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\mu = 62$ ， $\sigma^2 = 13^2$ ，

则 $\mu + 2\sigma = 62 + 2 \times 13 = 88$ ，

所以 $P(X \geq 88) = P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} \times (1 - 0.9545) = 0.02275$ ，

所以估计初试成绩不低于8(8分)的人数为 $0.02275 \times 4000 = 91$ 人；

(3) Y 的取值分别为0，5，10，15，20，25，

则 $P(Y = 0) = (1 - \frac{3}{4}) \times (1 - \frac{3}{5})^2 = \frac{1}{25}$ ， $P(Y = 5) = \frac{3}{4} \times (1 - \frac{3}{5})^2 = \frac{3}{25}$ ，

$P(Y = 10) = (1 - \frac{3}{4}) \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{3}{25}$ ， $P(Y = 15) = \frac{3}{4} \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{9}{25}$ ，

$P(Y = 20) = (1 - \frac{3}{4}) \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{100}$ ， $P(Y = 25) = \frac{3}{4} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{27}{100}$ ，

故 Y 的分布列为：

Y	0	5	10	15	20	25
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{27}{100}$

所以数学期望为 $E(Y) = 0 \times \frac{1}{25} + 5 \times \frac{3}{25} + 10 \times \frac{3}{25} + 15 \times \frac{9}{25} + 20 \times \frac{9}{100} + 25 \times \frac{27}{100} = \frac{207}{20}$ 。

5. (1)证明： $A(3, 0)$ ， $F(-2, 0)$ ，设直线 $l: x = my - 2$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 2 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}, \text{得} (9+5m^2)y^2 - 20my - 25 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{20m}{5m^2+9}, y_1 y_2 = \frac{-25}{5m^2+9},$$

$$\text{直线} AM: y = \frac{y_1}{x_1-3}(x-3), \text{令} x = -\frac{9}{2}, \text{得} y = -\frac{15y_1}{2(x_1-3)},$$

$$\therefore P(-\frac{9}{2}, -\frac{15y_1}{2(x_1-3)}), \text{同理} Q(-\frac{9}{2}, -\frac{15y_2}{2(x_2-3)}),$$

$$\therefore y_P + y_Q = -\frac{15y_1}{2(x_1-3)} - \frac{15y_2}{2(x_2-3)} = -\frac{15}{2} \left(\frac{y_1}{my_1-5} + \frac{y_2}{my_2-5} \right)$$

$$= -\frac{15}{2} \cdot \frac{2my_1y_2 - 5(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2 - 5m(y_1+y_2) + 25} = -\frac{15}{2} \cdot \frac{\frac{-50m}{5m^2+9} - \frac{100m}{5m^2+9}}{\frac{-25m^2}{5m^2+9} - \frac{100m^2}{5m^2+9} + 25} = 5m,$$

$$\text{直线} RF: y = -m(x+2), \text{令} x = -\frac{9}{2}, \text{得} y = \frac{5m}{2}, \therefore R(-\frac{9}{2}, \frac{5m}{2}),$$

$$\therefore y_P + y_Q = 2y_R, \therefore \text{点} R \text{为线段} PQ \text{的中点};$$

$$(2) \text{解: 由(1)知, } |MN| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{20m}{5m^2+9}\right)^2 + \frac{100}{5m^2+9}} = \frac{30(1+m^2)}{5m^2+9},$$

$$\text{又} |RF| = \sqrt{\left(-\frac{9}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{5m}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{1+m^2}}{2},$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{2} |RF| \cdot |MN| = \frac{75(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{2(5m^2+9)},$$

$$\text{而} S_1 + S_3 = \frac{1}{2} |RP| \cdot \left|x_1 + \frac{9}{2}\right| + \frac{1}{2} |QR| \cdot \left|x_2 + \frac{9}{2}\right| = \frac{1}{4} |PQ| \cdot \left|x_1 + \frac{9}{2} + x_2 + \frac{9}{2}\right| = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{15}{2}\right) \left| \frac{y_1}{my_1-5} + \frac{y_2}{my_2-5} \right| \cdot |m(y_1+y_2)+5|$$

$$= \frac{75}{8} \left| \frac{y_1 - y_2}{m^2y_1y_2 - 5m(y_1+y_2) + 25} \right| \cdot |m(y_1+y_2)+5| = \frac{75}{8} \left| \frac{\frac{30\sqrt{1+m^2}}{5m^2+9}}{\frac{-25m^2}{5m^2+9} - \frac{100m^2}{5m^2+9} + 25} \right| \cdot \left| \frac{20m^2}{5m^2+9} + 5 \right| = \frac{225(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{4(5m^2+9)},$$

$$\therefore \frac{3}{2} S_2 = S_1 + S_3,$$

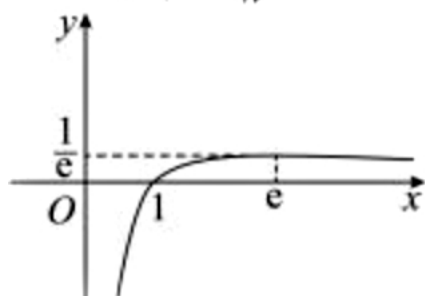
$$\text{故存在} \lambda = \frac{3}{2} \text{使得} \lambda S_2 = S_1 + S_3.$$

6. 解: (1) 由 $ax - \ln x = 0$ 且 $x > 0$, 可得 $\frac{\ln x}{x} = a$,

设 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $F'(x) = 0$, 解得 $x = e$,

当 $0 < x < e$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象如下:



又 x 趋向于 0 时, $F(x)$ 趋向 $-\infty$, x 趋向于 $+\infty$ 时, $F(x)$ 趋向 0;

要使 $F(x)$ 图象与直线 $y = a$ 有两个交点, 则 $0 < a < F(e)$, 故 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$;

(2) 因为 $F(1) = 0$, 由(1)得 $1 < x_1 < e < x_2$, 则 $a = \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$,

设 $\frac{x_2}{x_1} = t (t > 1)$, 则 $t = \frac{\ln t + \ln x_1}{\ln x_1}$, 即 $\ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$, $\ln x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$,

由 $x_1^k x_2$ 有最小值 e^e , 即 $k \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(k+t) \ln t}{t-1}$ 有最小值 e ,

设 $g(t) = \frac{(k+t) \ln t}{t-1} (t > 1)$, $g'(t) = \frac{-(k+1) \ln t + t - \frac{k}{t} + k - 1}{(t-1)^2}$,

记 $G(t) = -(k+1) \ln t + t - \frac{k}{t} + k - 1$, $G'(t) = -\frac{k+1}{t} + 1 + \frac{k}{t^2} = \frac{(t-1)(t-k)}{t^2}$,

由于 $t > 1$ ，若 $k \leq 1$ ，则 $G'(t) > 0$ ，可得 $G(t)$ 单调递增，

此时 $G(t) > G(1) = 0$ ，即 $g'(t) > 0$ ， $g(t)$ 单调递增，

此时 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 没有最小值，不符合题意，

若 $k > 1$ ， $t \in (1, k)$ 时， $G'(t) < 0$ ，则 $G(t)$ 在 $(1, k)$ 单调递减，

$t \in (k, +\infty)$ 时， $G'(t) > 0$ ，则 $G(t)$ 在 $(k, +\infty)$ 单调递增，

又 $G(1) = 0$ ， $G(k) < G(1) = 0$ ，且 t 趋向于 $+\infty$ 时 $G(t)$ 趋向 $+\infty$ ，故存在 $t_0 \in (k, +\infty)$ 且唯一，使得 $G(t_0) = 0$ ，

此时 $1 < t < t_0$ 时， $G(t) < 0$ ，即 $g'(t) < 0$ ，此时 $g(t)$ 在 $(1, t_0)$ 上单调递减；

$t > t_0$ 时， $G(t) > 0$ ，即 $g'(t) > 0$ ， $g(t)$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $k > 1$ 时， $g(1)$ 有最小值 $g(t_0)$ ，

$g'(t_0) = 0$ ，即 $-(k+1)\ln t_0 + t_0 - \frac{k}{t_0} + k - 1 = 0$ ，整理得 $k = \frac{-\ln t_0 + t_0 - 1}{\ln t_0 + \frac{1}{t_0} - 1}$ ，

此时 $g(t_0) = \frac{(k+t_0)\ln t_0}{t_0 - 1} = \frac{(\ln t_0)^2}{\ln t_0 + \frac{1}{t_0} - 1}$ ，由题意知 $g(t_0) = e$ ，

设 $h(x) = \frac{x^2}{x + e^{-x} - 1}$ ($x > 0$)， $h'(x) = \frac{x[(x+2)e^{-x} + x - 2]}{(x + e^{-x} - 1)^2}$ ，

设 $H(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$ ， $H'(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ ，

设 $u(x) = H'(x)$ ， $u'(x) = xe^{-x} > 0$ ，故 $H'(x)$ 递增， $H'(x) > H'(0) = 0$ 。

此时 $H(x)$ 递增，有 $H(x) > H(0) = 0$ ，

令 $y = x + e^{-x} - 1$ 且 $x > 0$ ，则 $y' = 1 - e^{-x} > 0$ ，即 y 在 $(0, +\infty)$ 上递增，故 $y > y|_{x=0} = 0$ ，

此时 $h'(x) > 0$ ，故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，而 $h(1) = e$ 知， $h(x) = e$ 的唯一解是 $x = 1$ 。

故 $g(t_0) = e$ 的唯一解是 $\ln t_0 = 1$ ，即 $t_0 = e$ ，代入 $k = \frac{-\ln t_0 + t_0 - 1}{\ln t_0 + \frac{1}{t_0} - 1}$ ，

综上所述， $k = e^2 - 2e$ 。