2015-2016学年福建省福州市文博中学高三（上）期中数学试卷（文科）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合U={1，2，3，4，5，6，7，8}，S={1，2，4，5}，T={3，5，7}，则S∩（$\complement_U T$）=（　　）

A．{1，2，4}　　B．{1，2，3，4，5，7}　　C．{1，2}　　D．{1，2，4，5，6，8}

2．设函数f（x）=$\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$，若f（2）=（　　）

A．﹣2 B．2　　C．4　　D．﹣4

3．已知角α的终边上有一点P的坐标是（3，4），则cosα的值为（　　）

A．3　　B．4　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

4．设m，n是整数，则"m，n均为偶数"是"m+n是偶数"的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5．直线x+y+5=0的倾斜角为（　　）

A．120° B．45°　C．135° D．60°

6．下列函数中，在区间（0，+∞）上是增函数的是（　　）

A．f（x）=﹣x^2+2B．f（x）=$\frac{2}{x}$C．f（x）=（$\frac{1}{2}$）^{x}　　D．f（x）=$\log_2 x$

7．已知平面向量$\vec{a}$=（1，﹣3），$\vec{b}$=（4，﹣2），若$\lambda\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则λ等于（　　）

A．﹣2 B．2　　C．﹣1 D．1

8．函数f（x）=ln（x+1）﹣$\frac{2}{x}$的零点所在的大致区间是（　　）

A．（3，4）　B．（2，e）　C．（1，2）　D．（0，1）

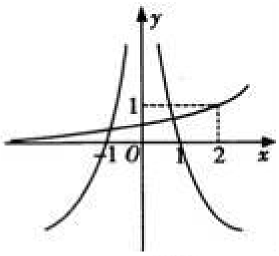
9．若x＞0，y＞0且$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$=1，则x+y最小值是（　　）

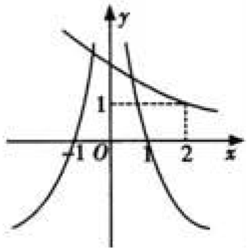
A．9　　B．$\frac{9}{2}$　　C．$5+2\sqrt{2}$　D．5

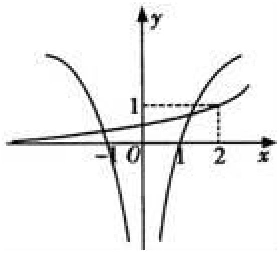
10．已知等比数列{a_n}中，a_n＞0，a_1，a_{99}为方程x^2﹣10x+16=0的两根，则a_{20}•a_{50}•a_{80}（　　）

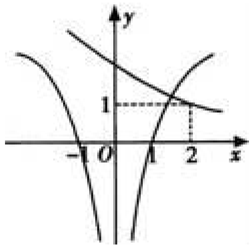
A．32　B．64　C．256　D．±64

11．若函数f（x）=a^{x-2}，g（x）=$\log_a|x|$（a＞0且a≠1），且f（3）•g（﹣3）＜0．则函数f（x），g（x）在同一坐标系内的大致图象是（　　）

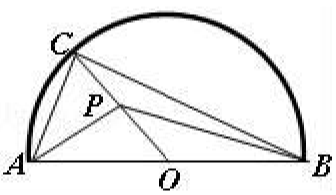
A. 

B. 

C. 

D. 

12．如图，半圆的直径 AB=4，O 为圆心，C 为半圆上不同于 A、B 的任意一点，若 P 为半径 OC 上的动点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值是（　　）



A．2　 B．0　 C．﹣1　D．﹣2

二、填空题，4 题，每题 5 分，共 20 分．

13．设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 $S_7=$______．

14．设变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\x\leqslant 1\\y\leqslant 2\end{cases}$，则目标函数 $z=-x+y$ 的最大值是______．

15．焦距为 4，离心率是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的一个根，且焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程为______．

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\(x-1)^3, & x<2\end{cases}$若关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不同的实根，则数 k 的取值范围是______．

三．解答题（共 70 分）：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．已知 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-2$（x∈R）．

（1）求函数 f（x）的最小正周期;

（2）求函数 f（x）的最大值，并指出此时 x 的值．

18．等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

19．已知△ABC 的三内角 A，B，C，所对三边分别为 a，b，c，$A<\frac{\pi}{2}$且 $\sin(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

（1）求 sinA 的值；

（2）若△ABC 的面积 s=24，b=10，求 a 的值.

20．平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x-y+1=0$ 截以原点 O 为圆心的圆所得的弦长为$\sqrt{6}$.

（1）求圆 O 的方程；

（2）在直线 $x+3y-10=0$ 上找一点 P（m，n），使得过该点所作圆 O 的切线段最短，并求切线长.

21．已知函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+1$（x∈R），其中 a＞0.

（Ⅰ）若 a=1，求曲线 y=f（x）在点（2，f（2））处的切线方程；

（Ⅱ）若在区间$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上，f（x）＞0 恒成立，求 a 的取值范围.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（α为参数），以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）判断曲线 C_1 与曲线 C_2 的位置关系.

2015-2016学年福建省福州市文博中学高三（上）期中数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合U={1，2，3，4，5，6，7，8}，S={1，2，4，5}，T={3，5，7}，则S∩（$\complement_U$T）=（　　）

A．{1，2，4}　B．{1，2，3，4，5，7}　C．{1，2}　D．{1，2，4，5，6，8}

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】根据集合的基本运算进行求解即可.

【解答】解：$\complement_U$T={1，2，4，6，8}，

则S∩（$\complement_U$T）={1，2，4}，

故选：A.

2．设函数f（x）=$\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$，若f（2）=（　　）

A．﹣2 B．2　C．4　D．﹣4

【考点】函数的值.

【分析】根据分段函数的表达式，利用代入法进行求解即可.

【解答】解：由分段函数的表达式得f（2）=2^2=4，

故选：C.

3．已知角α的终边上有一点P的坐标是（3，4），则cosα的值为（　　）

A．3　B．4　C．$\frac{3}{5}$　D．$\frac{4}{5}$

【考点】任意角的三角函数的定义.

【分析】利用任意角的三角函数的定义，求得cosα的值.

【解答】解：∵角α的终边上有一点P的坐标是（3，4），∴x=3，y=4，r=$\sqrt{x^2+y^2}$=5，

∴cosα=$\frac{x}{r}$=$\frac{3}{5}$，

故选：C.

4．设m，n是整数，则"m，n均为偶数"是"m+n是偶数"的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【分析】先判断 $p\Rightarrow q$ 与 $q\Rightarrow p$ 的真假，再根据充要条件的定义给出结论；也可判断命题 p 与命题 q 所表示的范围，再根据“谁大谁必要，谁小谁充分”的原则，判断命题 p 与命题 q 的关系．

【解答】解：m，n 均为偶数，则 m+n 为偶数，
即 m，n 均为偶数”⇒“m+n 是偶数”为真命题
但 m+n 为偶数推不出 m，n 为偶数，如 m=1，n=1．
“m，n 均为偶数”是“m+n 是偶数”的充分而不必要条件
故选 A

5．直线 $x+y+5=0$ 的倾斜角为（　　）
A．120° B．45° C．135° D．60°
【考点】直线的倾斜角．
【分析】利用直线的倾斜角与斜率间的关系即可求得答案．
【解答】解：∵设直线 $x+y-5=0$ 的倾斜角为α（$0°\leqslant\alpha<180°$），
∵直线 $x+y-5=0$ 的斜率 $k=\tan\alpha=-1$，
∴$\alpha=135°$．
故选：C．

6．下列函数中，在区间（0，+∞）上是增函数的是（　　）
A．$f(x)=-x^2+2$ B．$f(x)=\frac{2}{x}$ C．$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ D．$f(x)=\log_2x$
【考点】函数的概念及其构成要素．
【分析】分别判断各选项在（0，+∞）的单调性，进而得到答案．
【解答】解：对于 A：$f(x)=-x^2+2$ 是一元二次函数，对称轴是 y 轴，开口向下，在区间（0，+∞）上是减函数；
对于 B：由函数性质可知 $f(x)=\frac{2}{x}$ 在区间（0，+∞）上是减函数；
对于 C：$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的底数大于 0 小于 1，在区间（0，+∞）上是减函数；
对于 D：$f(x)=\log_2x$ 在区间（0，+∞）上是增函数．
故选：D．

7．已知平面向量 $\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(4,\ -2)$，若 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则λ等于（　　）
A．-2 B．2 C．-1 D．1
【考点】数量积判断两个平面向量的垂直关系．
【分析】根据平面向量的坐标表示与运算性质，利用两向量垂直的性质定理，列出方程即可求出结论．
【解答】解：平面向量 $\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(4,\ -2)$，
∴$\lambda\vec{a}-\vec{b}=(\lambda-4,\ -3\lambda+2)$，
又 $\lambda\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，
∴$(\lambda\vec{a}-\vec{b})\bullet\vec{a}=0$，
∴$(\lambda-4)-3(-3\lambda+2)=0$，
解得 $\lambda=1$．
故选：D．

8．函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$的零点所在的大致区间是（　　）

A．（3，4）　B．（2，e）　C．（1，2）　D．（0，1）

【考点】函数的零点．

【分析】根据所给的几个区间看出不在定义域中的区间去掉，把所给的区间的两个端点的函数值求出，若一个区间对应的函数值符合相反，得到结果．

【解答】解：∵$f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$在（0，+∞）单调递增

∵f（1）=ln2﹣2＜0，f（2）=ln3﹣1＞0，

∴f（1）f（2）＜0

∴函数的零点在（1，2）之间，

故选：C．

9．若 x＞0，y＞0 且$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 x+y 最小值是（　　）

A．9　B．$\frac{9}{2}$　C．$5+2\sqrt{2}$　D．5

【考点】基本不等式．

【分析】把 x+y 转化为$(x+y)(\frac{4}{x}+\frac{1}{y})$，展开后利用基本不等式求最值．

【解答】解：∵x＞0，y＞0 且$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，

∴$x+y=(x+y)(\frac{4}{x}+\frac{1}{y})=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\bullet\frac{x}{y}}=9$．

当且仅当$\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1\\x=2y\end{cases}$，即 x=6，y=3 时上式等号成立．

故选：A．

10．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，a_1，a_{99}为方程 $x^2-10x+16=0$ 的两根，则 $a_{20}\bullet a_{50}\bullet a_{80}$（　　）

A．32　B．64　C．256　D．±64

【考点】等比数列的性质．

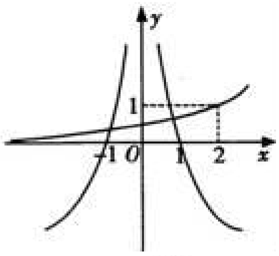
【分析】根据等比数列的性质，把 $a_{20}\bullet a_{50}\bullet a_{80}$ 都转换为 a_{50}，再用韦达定理求出 a_{50}，即可．

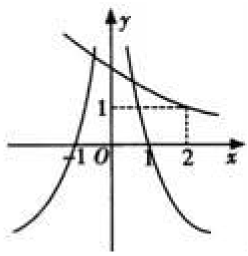
【解答】解：∵a_1，a_{99}为方程 $x^2-10x+16=0$ 的两根，∴$a_1+a_{99}=10$，$a_1a_{99}=16$

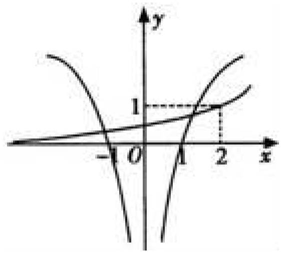
又∵在等比数列$\{a_n\}$中 $a_1a_{99}=a_{50}^2$∴$a_{50}=4$，$a_{20}\bullet a_{50}\bullet a_{80}=a_{50}^3=64$

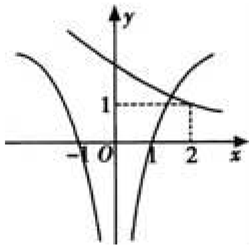
故选 B

11．若函数 $f(x)=a^{x-2}$，$g(x)=\log_a|x|$（a＞0 且 a≠1），且 f（3）•g（﹣3）＜0．则函数 f（x），g（x）在同一坐标系内的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【考点】函数的图象．

【分析】先由条件 f（3）•g（﹣3）＜0 确定 a 的取值范围，然后利用指数函数和对数函数的性质去判断 f（x），g（x）的图象．

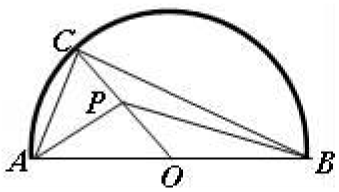
【解答】解：由 f（3）•g（﹣3）＜0 得 a· $\log_a 3$＜0，因为 a＞0 且 a≠1，所以必有 $\log_a 3$＜0，解得 0＜a＜1．

所以函数 f（x）=a^{x-2}，在定义域上为减函数且过点（2，1），g（x）=$\log_a|x|$在 x＞0 时，为减函数，在 x＜0 时为增函数．

所以对应的图象为 B．

故选 B．

12．如图，半圆的直径 AB=4，O 为圆心，C 为半圆上不同于 A、B 的任意一点，若 P 为半径 OC 上的动点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值是（　　）



A．2　　B．0　　C．﹣1　D．﹣2

【考点】平面向量数量积的运算．

【分析】根据 O 为 AB 的中点，我们易得 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=-2|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PC}|$，又由 OPC 三点共线，故 $|\overrightarrow{PO}|+|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{OC}|=2$为定值，根据基本不等式，我们易得 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值．

【解答】解：因为 O 为 AB 的中点，

所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$，

从而则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PC}=-2|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{PC}|$；

又 $|\overrightarrow{PO}|+|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{OC}|=2$为定值，

所以当且仅当 $|\overrightarrow{PO}|=|\overrightarrow{PC}|=1$，

即 P 为 OC 的中点时，

$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$取得最小值是－2，

故选 D．

二、填空题，4 题，每题 5 分，共 20 分．

13．设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 $S_7=$__49__．

【考点】等差数列的前 n 项和；等差数列的性质．

【分析】由等差数列的性质求得 a_1+a_7，再用前 n 项和公式求得．

【解答】解：∵$a_2+a_6=a_1+a_7$

$$\therefore s_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=49$$

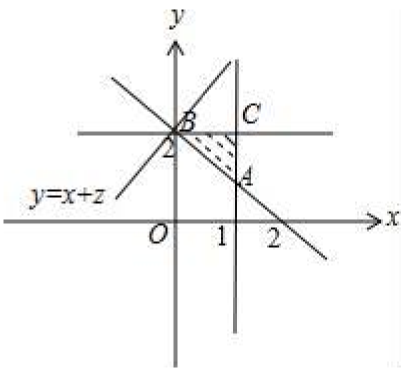
故答案是 49

14．设变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ x\leqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}$，则目标函数 $z=-x+y$ 的最大值是__2__．

【考点】简单线性规划．

【分析】由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，求得最优解，把最优解的坐标代入目标函数得答案．

【解答】解：由约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\ x\leqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}$作出可行域如图，



化目标函数 $z=-x+y$ 为 $y=x+z$，

由图可知，当直线 $y=x+z$ 过 B（0，2）时，z 有最大值，为 2．

故答案为：2．

15．焦距为 4，离心率是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的一个根，且焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$．

【考点】椭圆的标准方程．

【分析】设椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）．由方程 $2x^2-3x+1=0$，解得 x，由离心率是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的一个根，可得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，又 $2c=4$，$a^2=b^2+c^2$，联立解出即可得出．

【解答】解：设椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）．

由方程 $2x^2-3x+1=0$，解得 x=1 或$\dfrac{1}{2}$，

由离心率是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的一个根，∴$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

又 $2c=4$，$a^2=b^2+c^2$，联立解得 c=2，a=4，$b^2=12$．

∴椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$．

故答案为：$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$．

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$若关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不同的实根，则数 k 的取值范围是___（0，1）___．

【考点】根的存在性及根的个数判断．

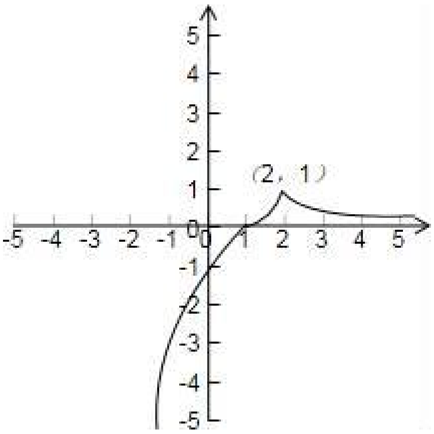
【分析】要求程 f（x）=k 有两个不同的实根是数 k 的取值范围，根据方程的根与对应函数零点的关系，我们可以转化为求函数 y=f（x）与函数 y=k 交点的个数，我们画出函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$的图象，数形结合即可求出答案．

【解答】解：函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2\\ (x-1)^3, & x<2\end{cases}$的图象如下图所示：

由函数图象可得当 k∈（0，1）时

方程 f（x）=k 有两个不同的实根，

故答案为：（0，1）



三．解答题（共 70 分）：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．已知 f（x）$=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-2$（x∈R）．

（1）求函数 f（x）的最小正周期；

（2）求函数 f（x）的最大值，并指出此时 x 的值．

【考点】三角函数中的恒等变换应用；三角函数的周期性及其求法．

【分析】(1）使用二倍角公式与两角和的正弦公式化简 f（x），利用三角函数的周期公式得出 f（x）的周期；

（2）根据正弦函数的性质得出 f（x）的最值，令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 求出对应的 x 的值．

【解答】解：(1）f（x）$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，

∴f（x）的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

（2）当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 时，f（x）取得最大值 2﹣1=1．

18．等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

【考点】数列的求和；等差数列的通项公式．

【分析】(Ⅰ）由 $a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，结合等差数列的通项公式可求 a_1，d，进而可求 a_n

(Ⅱ）由 $b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$，利用裂项求和即可求解

【解答】解：(Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d

∵$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

$$\therefore\begin{cases}a_1+6d=4\\ a_1+18d=2(a_1+8d)\end{cases}$$

解得，$a_1=1$，$d=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1+n}{2}$

（II）$\because b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$

$\therefore s_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$

19．已知△ABC 的三内角 A，B，C，所对三边分别为 a，b，c，$A<\frac{\pi}{2}$且 $\sin(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

（1）求 sinA 的值；

（2）若△ABC 的面积 s=24，b=10，求 a 的值．

【考点】两角和与差的正弦函数．

【分析】（1）利用同角三角函数的基本关系求得 $\cos(A-\frac{\pi}{4})$，再利用两角和的正弦公式求得 $\sin A=\sin[(A-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]$的值．

（2）根据 $s=\frac{1}{2}bc\bullet\sin A=24$，求得 c 的值，再利用余弦定理求得 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\bullet\cos A}$ 的值．

【解答】解：（1）△ABC 的三内角 A，B，C，所对三边分别为 a，b，c，$A<\frac{\pi}{2}$且 $\sin(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore A-\frac{\pi}{4}$为锐角，故 $\cos(A-\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\sin^2(A-\frac{\pi}{4})}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore \sin A=\sin[(A-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]=\sin(A-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}+\cos(A-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{10}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{10}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$.

（2）若△ABC 的面积 s=24，b=10，$\therefore s=\frac{1}{2}bc\bullet\sin A=\frac{1}{2}\bullet10\bullet c\bullet\frac{4}{5}=24$，$\therefore c=6$，

$\because \cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\bullet\cos A}=\sqrt{100+36-120\bullet\frac{3}{5}}=\sqrt{64}=8$.

20．平面直角坐标系 xOy 中，直线 x﹣y+1=0 截以原点 O 为圆心的圆所得的弦长为$\sqrt{6}$.

（1）求圆 O 的方程；

（2）在直线 x+3y﹣10=0 上找一点 P（m，n），使得过该点所作圆 O 的切线段最短，并求切线长．

【考点】直线与圆的位置关系．

【分析】（1）画出图形，结合图形，利用勾股定理求出圆 O 的半径，写出圆 O 的标准方程；

（2）可判直线与圆相离，由直线和圆的知识可得符合条件的直线，解方程组可得所求点．

【解答】解：（1）画出图形，如图所示；

过点 O 作 OC 垂直于直线 AB，垂足为 C，连接 OB，

$OC=\frac{|1\times 0-1\times 0+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴圆 O 的半径为 $OB=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\sqrt{2}$；

∴圆 O 的标准方程为 $x^2+y^2=2$；

（2）∵圆心（0，0）到直线 $x+3y-10=0$ 的距离 $d=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}>\sqrt{2}=r$，

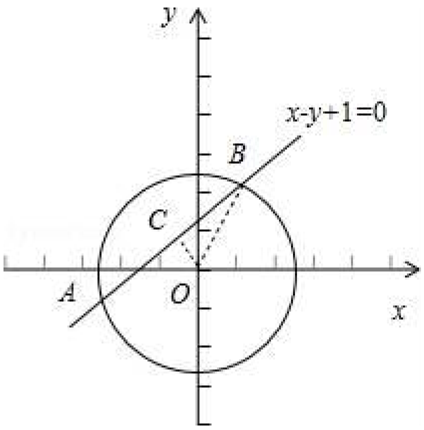
∴直线与圆相离，由直线和圆的知识可得只有当过圆心向直线 $x+3y-10=0$ 作垂线，

过其垂足作圆的切线所得切线段最短，此时垂足即为要求的点 P，

由直线的垂直关系设过圆心的垂线为 $3x-y+c=0$，代入圆心坐标可得 $c=0$，

联立 $x+3y-10=0$ 和 $3x-y=0$ 可解得交点为（1，3）即为所求．

切线长$\sqrt{10-2}=2\sqrt{2}$.



21．已知函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+1$（x∈R），其中 a＞0．

（Ⅰ）若 a=1，求曲线 y=f（x）在点（2，f（2））处的切线方程；

（Ⅱ）若在区间$[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$上，f（x）＞0 恒成立，求 a 的取值范围．

【考点】函数恒成立问题；利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究曲线上某点切线方程．

【分析】（Ⅰ）把 a=1 代入到 f（x）中得到切点的坐标，利用导数求出直线切线，即可求出切线方程；

（Ⅱ）求出 f′（x）=0 时 x 的值，分 0＜a≤2 和 a＞2 两种情况讨论函数的增减性分别得到 $f(-\frac{1}{2})$ 和 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(-\frac{1}{2})$ 和 $f(\frac{1}{a})$ 都大于 0，联立求出 a 的解集的并集即可．

【解答】（Ⅰ）解：当 a=1 时，$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$，

∴f（2）=3；

∵$f'(x)=3x^2-3x$，

∴f′（2）=6．

所以曲线 y=f（x）在点（2，f（2））处的切线方程为 y﹣3=6（x﹣2），
即 y=6x﹣9；

（Ⅱ）解：f′（x）$=3ax^2-3x=3x(ax-1)$.
令 f′（x）=0，
解得 x=0 或 $x=\frac{1}{a}$.
以下分两种情况讨论：
（1）若 0＜a≤2，则 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{2}$；
当 x 变化时，f′（x），f（x）的变化情况如下表：

x	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$
f′（x）	+	0	﹣
f（x）	增	极大值	减

当 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 时，f（x）＞0，等价于 $\begin{cases}f(-\frac{1}{2})>0\\ f(\frac{1}{2})>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{5-a}{8}>0\\ \frac{5+a}{8}>0\end{cases}$.
解不等式组得﹣5＜a＜5．因此 0＜a≤2；

（2）若 a＞2，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$
当 x 变化时，f′（x），f（x）的变化情况如下表：

x	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$
f′（x）	+	0	﹣	0	+
f（x）	增	极大值	减	极小值	增

当 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 时，f（x）＞0 等价于 $\begin{cases}f(-\frac{1}{2})>0\\ f(\frac{1}{a})>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{5-a}{8}>0\\ 1-\frac{1}{2a^2}>0.\end{cases}$
解不等式组得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<5$ 或 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
因此 2＜a＜5．
综合（1）和（2），可知 a 的取值范围为 0＜a＜5．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（α为参数），以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；
（2）判断曲线 C_1 与曲线 C_2 的位置关系．

【考点】简单曲线的极坐标方程；参数方程化成普通方程．

【分析】（1）曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（α为参数），消去参数可得普通方程．曲线 C_2 的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，展开可得：$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{2}$，利用互化公式公式化为直角坐标方程．

（2）利用点到直线的距离公式可得圆心 C_1 到直线 C_2 的距离 d，与 r 比较即可得出位置关系．

【解答】解：（1）曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$，（α为参数），

消去参数可得普通方程：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，可得圆心 C_1（2，1），半径 $r=1$．

曲线 C_2 的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，

展开可得：$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{2}$，化为：$x+y-2=0$．

（2）圆心 C_1 到直线 C_2 的距离 $d=\frac{|2+1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1=r$，

∴曲线 C_1 与曲线 C_2 的位置关系是相交．