# 期末冲刺卷（高一 A）命题人：厦门外国语学校

## 一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$， $B=\{x\,|\,x\le 1\}$ 则 $A\bigcup B=$ （　　）

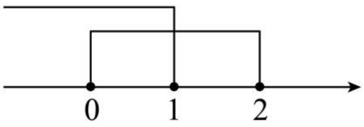
A. $(-\infty,1]$　　　　B. $(-\infty,2]$　　　　C. $[0,1]$　　　　D. $[1,2]$

【答案】B

【解析】

【分析】利用数轴画出图像，取并集即可.

【详解】依题意，画出数轴，如图所示，




由数轴可知：$A\cup B=\{x\,|\,x\le 2\}$，

故选：B.

2. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$，则 $f(\lg 5)+f(\lg\frac{1}{5})=$ （　　）

A. $-1$　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数解析式可知：$f(x)+f(-x)=2$，因为 $\lg\frac{1}{5}=-\lg 5$，代入进而求解即可.

【详解】因为函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$ 的定义域为 R，

则有 $f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1+\ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)+1=\ln 1+2=2$，

又 $\lg\frac{1}{5}=-\lg 5$，所以 $f(\lg 5)+f(\lg\frac{1}{5})=f(\lg 5)+f(-\lg 5)=2$，

故选：D.

3. “$\frac{3}{x+1}>1$”是“$x<5$” 的（　　）条件

A. 充分不必要　　　　B. 必要不充分　　　　C. 充要　　　　D. 既不充分也不必要

【答案】A

【解析】

【分析】解分式不等式，得到 $-1<x<2$，从而判断出“$\frac{3}{x+1}>1$”是“$x<5$” 充分不必要条件.

【详解】$\frac{3}{x+1}>1$变形为$\frac{2-x}{x+1}>0$，即$(x+1)(x-2)<0$，解得：$-1<x<2$，

因为$-1<x<2 \Rightarrow x<5$，当$x<5 \not\Rightarrow -1<x<2$，

故“$\frac{3}{x+1}>1$”是“$x<5$” 充分不必要条件.

故选：A

4. 设$a=5^{0.7}$，$b=\sin 2$，$c=\log_6 0.2$，则$a$，$b$，$c$的大小关系正确的是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

【答案】A

【解析】

【分析】以0和1为桥梁，分别比较$a$，$b$，$c$与0，1的大小关系，即可得到答案.

【详解】因为$a=5^{0.7}>5^{0}=1$，所以$a>1$；

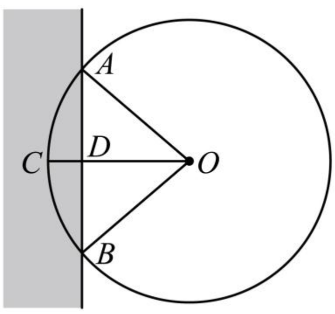
因为$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，所以$0<\sin 2<1$；

因为$c=\log_6 0.2<\quad {}_6 =0$，所以$c<0$.

所以$a>b>c$.

故选：A

5. 我国古代数学经典著作《九章算术》中记载了一个“圆材埋壁”的问题：“今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何?”现有一类似问题，不确定大小的圆柱形木材，部分埋在墙壁中，其截面如图所示.用锯去锯这木材，若锯口深$CD=2-\sqrt{3}$，锯道$AB=2$，则图中$\overset{\frown}{ACB}$与弦$AB$围成的弓形的面积为（　　）




A. $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆的半径为$r$，利用勾股定理求出$r$，再根据扇形的面积及三角形面积公式计算可得；

【详解】解：设圆的半径为$r$，则$OD=r-CD=r-\left(2-\sqrt{3}\right)$，$AD=\dfrac{1}{2}AB=1$，

由勾股定理可得$OD^2+AD^2=OA^2$，即$\left[r-\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2+1=r^2$，

解得$r=2$，所以$OA=OB=2$，$AB=2$，

所以$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，因此$S_{弓形}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle MBB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times2^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

故选：B

6. 三个数$\sin1.5\cdot\sin2\cdot\sin3.1$，$\cos4.1\cdot\cos5\cdot\cos6$，$\tan7\cdot\tan8\cdot\tan9$中，值为负数的个数有个（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】计算出题目中角度的终边所在象限，根据三角函数的性质确定符号即可.

【详解】$0<1.5<\pi,0<2<\pi,0<3.1<\pi,\therefore\sin1.5•\sin2•\sin3.1>0$；

$\pi<4.1<\dfrac{3\pi}{2},\cos4.1<0,\dfrac{3\pi}{2}<5<2\pi,\dfrac{3\pi}{2}<6<2\pi,\cos5>0,\cos6>0$，

$\therefore\cos4.1•\cos5•\cos6<0$；

$2\pi<7<\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}<8<3\pi,\dfrac{5\pi}{2}<9<3\pi,\therefore\tan7>0,\tan8<0,\tan9<0$，

$\tan7\cdot\tan8\cdot\tan9>0$；

只有一个负数，故选：B.

7. 若函数$y=f(x)$的值域是$\left[\dfrac{1}{3},4\right]$，则函数$F(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$的值域是（　　）

A. $[\dfrac{1}{3},4]$　　　　B. $[2,\dfrac{17}{4}]$　　　　C. $[\dfrac{10}{3},\dfrac{17}{4}]$　　　　D. $[4,\dfrac{17}{4}]$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对勾函数的单调性求值域.

【详解】令$f\left(x\right)=t\in\left[\dfrac{1}{3},4\right]$，则$y=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=t+\dfrac{1}{t}$，

由对勾函数的性质可知：$y=t+\dfrac{1}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},1\right]$上单调递减，在$\left(1,4\right]$上单调递增，

故当$t=1$时，$y=t+\dfrac{1}{t}$取得最小值，最小值为$1+1=2$，

又当$t=\frac{1}{3}$时，$y=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$，当$t=4$时，$y=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$，

故$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值域为$\left[2,\frac{17}{4}\right]$.

故选：B

8. 解析数论的创始人狄利克雷在数学领域成就显著，对函数论、位势论和三角级数论都有重要贡献．以他名字命名的狄利克雷函数$D(x)=\begin{cases}1,x为有理数,\\0,x为无理数,\end{cases}$以下结论错误的是（　　）

A. $D(\sqrt{2})<D(1)$

B. 函数$y=D(x)$不是周期函数

C. $D(D(x))=1$

D. 函数$y=D(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数

【答案】B

【解析】

【分析】根据狄利克雷函数的定义逐个分析判断即可

【详解】对于A，因为$D(\sqrt{2})=0,D(1)=1$，所以$D(\sqrt{2})<D(1)$，所以A正确，

对于B，对于任意非零有理数$T$，若$x$为任意有理数，则$x+T$也为有理数，所以$D(x+T)=D(x)=1$，若$x$为任意无理数，则$x+T$也为无理数，所以$D(x+T)=D(x)=0$，所以任意非零有理数$T$，$x$为实数，都有$D(x+T)=D(x)$，所以有理数$T$为函数的周期，所以B错误，

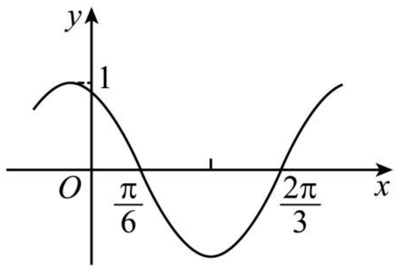
对于C，当$x$为有理数时，$D(D(x))=D(1)=1$，当$x$为无理数时，$D(D(x))=D(0)=1$，所以$D(D(x))=1$，所以C正确，

对于D，对于任意$x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且$x_1<x_2$，若$x_1,x_2$都为有理数或都为无理数，则$D(x_1)=D(x_2)$，若$x_1$为有理数，$x_2$为无理数，则$D(x_1)=1>D(x_2)=0$，若$x_1$为无理数，$x_2$为有理数，则$D(x_1)=0<D(x_2)=1$，所以函数$y=D(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，所以D正确，

故选：B

**二、多选题（本大题共4小题，共20.0分.在每小题有多项符合题目要求）**

9. 下图是函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像，则$\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）




A. $\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　B. $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　　C. $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　D. $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

【答案】BC

【解析】

【分析】首先利用周期确定$\omega$的值，然后确定$\varphi$的值即可确定函数的解析式，最后利用诱导公式可得正确结果.

【详解】由函数图像可知：$\frac{T}{2}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则$|\omega|=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以不选 A,

不妨令$\omega=2$,

当$x=\frac{\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$时，$y=-1$ $\therefore$ $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，

解得：$\varphi=2k\pi+\frac{2}{3}\pi\left(k\in \mathbf{Z}\right)$，

即函数的解析式为：

$$y=\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right).$$

而$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

故选：BC.

【点睛】已知$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$的部分图象求其解析式时，$A$比较容易看图得出，困难的是求待定系数$\omega$和$\varphi$，常用如下两种方法：

(1)由$\omega=\frac{2\pi}{T}$即可求出$\omega$；确定$\varphi$时，若能求出离原点最近的右侧图象上升(或下降)的“零点”横坐标$x_0$，则令$\omega x_0+\varphi=0$(或$\omega x_0+\varphi=\pi$)，即可求出$\varphi$.

(2)代入点的坐标，利用一些已知点(最高点、最低点或“零点”)坐标代入解析式，再结合图形解出$\omega$和$\varphi$，若对$A$，$\omega$的符号或对$\varphi$的范围有要求，则可用诱导公式变换使其符合要求.

10. 对于实数$a$，$b$，$m$，下列说法正确的是（　　）

A. 若$am^2>bm^2$，则$a>b$；

B. 命题“$\forall x>1$，$x^2-x>0$”的否定是“$\exists x_0\le 1$，$x_0^2-x_0\le 0$；

C. 若$b>a>0$，$m>0$，则$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$；

D. 若$a>b>0$，且$|\ln a|=|\ln b|$，则$2a+b$的最小值为$2\sqrt{2}$

【答案】AC

【解析】

【分析】

根据不等式的性质，可判断$A$的正误；根据含一个量词的命题否定的定义，可判断$B$的正误；利用作差法可比较$\dfrac{a+m}{b+m}$和$\dfrac{a}{b}$的大小，可判断$C$的正误；根据对数的性质，结合基本不等式，可判断$D$的正误，即可得答案.

【详解】对于$A$：因为$am^2>bm^2$，所以$m^2>0$，左右同除$m^2$，可得$a>b$，故$A$正确；

对于$B$：命题“$\forall x>1$，$x^2-x>0$”的否定是“$\exists x_0>1$，$x_0^2-x_0\le 0$，故$B$错误；

对于$C$：因为$b>a>0$，$m>0$，所以$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+m)b-a(b+m)}{(b+m)b}=\dfrac{m(b-a)}{(b+m)b}>0$，所以$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$，故$C$正确；

对于$D$：因为$a>b>0$，且$|\ln a|=|\ln b|$，所以$\ln a=-\ln b$，即$\ln a+\ln b=0$，

所以$\ln ab=0$，解得$ab=1$，

所以$2a+b\ge 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$2a=b$，即$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2},b=\sqrt{2}$时等号成立，与$a>b>0$矛盾，

所以$2a+b>2\sqrt{2}$， 无最小值，故$D$错误.

故选：AC

【点睛】解题的关键是熟练掌握不等式的性质，并灵活应用，易错点为：在应用基本不等式时，需注意取等条件，即当且仅当“$a=b$”时等号成立，若不满足$a=b$，则基本不等式不能取等号，考查分析理解，计算求值的能力，属中档题.

11. 若函数$f(x)=\cos^2 x+2\sin x$在区间$[-\dfrac{\pi}{3},\theta]$的最大值为2，则$\theta$的可能取值为（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\pi$

【答案】CD

【解析】

【分析】由题意可得 $f(x)=2-(\sin x-1)^2$，从而可得所以当 $\sin x=1$ 时，$f\left(x\right)_{max}=2$，又因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},\theta]$，所以必有 $\frac{\pi}{2}\in[-\frac{\pi}{3},\theta]$ 成立，结合选项，即可得答案.

【详解】解：因为 $f(x)=\cos^2x+2\sin x=-\sin^2x+2\sin x+1=2-(\sin x-1)^2$，

所以当 $\sin x=1$ 时，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，$f\left(x\right)_{max}=2$，

又因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},\theta]$，

所以 $\frac{\pi}{2}\in[-\frac{\pi}{3},\theta]$，

所以 $\theta$ 的可能取值为 $\frac{2\pi}{3},\pi$.

故选：CD.

12. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(4-x)+9f(2)$，又 $f(x+9)$ 的图象关于点 $(-9,0)$ 对称，且 $f(1)=2022$，则（　　）

A. $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称

B. $f(43)+f(44)+f(45)=-2022$

C. $f(\frac{1}{3}x-1)+3$ 关于点 $(3,3)$ 对称

D. $f(\frac{1}{3}x-1)+3$ 关于点 $(1,3)$ 对称

【答案】AC

【解析】

【分析】对于 A，将 $x=2$ 代入 $f(x)=f(4-x)+9f(2)$ 中可求得 $f(2)=0$，然后进行判断，对于 B，由 $f(x+9)$ 的图象关于点 $(-9,0)$ 对称和选项 A，可得 $f(x)$ 的周期，从而可求得结果，对于 CD，由函数图象变换结合对称判断.

【详解】对于 A，将 $x=2$ 代入 $f(x)=f(4-x)+9f(2)$，得 $f(2)=f(2)+9f(2)$，解得 $f(2)=0$，

所以 $f(x)=f(4-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，所以 A 正确，

对于 B，因为 $f(x+9)$ 的图象关于点 $(-9,0)$ 对称，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，所以 $f(x)=-f(-x)$，$f(0)=0$，

因为 $f(x)=f(4-x)$，所以 $f(x)=f(4-x)=-f(x-4)$，

所以 $f(x-4)=-f(x-4-4)=-f(x-8)$，

所以 $f(x)=f(x-8)$，所以$f(x)$的周期为 8，

所以 $f(44)=f(4+8\times 5)=f(4)=f(0)=0$，

$f(45)=f(-3+8\times 6)=f(-3)=-f(3)=-f(1)=-2022$，

$f(43)=f(3+8\times 5)=f(3)=f(1)=2022$，

所以 $f(43)+f(44)+f(45)=0$，所以 B 错误，

对于 CD，因为 $f(\frac{1}{3}x-1)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位，再纵坐标不变，横坐标变为原来的 3 倍得到，

再将其向上平移 3 个单位可得 $f(\frac{1}{3}x-1)+3$ 的图象，

所以 $f(\frac{1}{3}x-1)+3$ 的图象关于点 $(3,3)$ 对称，所以 C 正确，D 错误，

故选：AC

## 三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. $\log_2 8+(3-\sqrt{2})^0+(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=$__________.

【答案】$\frac{5}{3}+\pi$

【解析】

【分析】根据对数的运算、指数的运算求解即可.

【详解】

$$\log_2 8+(3-\sqrt{2})^0+(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=3+1+\left[(\frac{3}{2})^4\right]^{-\frac{1}{4}}+|3-\pi|=4+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\pi-3=1+\frac{2}{3}+\pi=\frac{5}{3}+\pi\cdot$$

故答案为：$\frac{5}{3}+\pi$.

14. 函数 $y=9-\sin 2x$ 的单调递增区间是__________.

【答案】$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$

【解析】

【分析】整体法求解 $f\left(x\right)=\sin 2x$ 的单调递减区间即可.

【详解】$y=9-\sin 2x$ 的单调递增区间，即 $f\left(x\right)=\sin 2x$ 的单调递减区间，

令 $2x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],k\in Z$，

解得：$x\in\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$，

故 $y=9-\sin 2x$ 的单调递增区间为 $x\in\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$.

故答案为：$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$

15. 在一段时间内，某地的某种动物快速繁殖，此动物总只数的倍增期为 18 个月，那么 100 只野兔增长到 10 万只野兔大概需要__________年. $(\lg 2=0.3010,\lg 3=0.4771)$

【答案】15

【解析】

【分析】根据题意列出指数方程，利用对数运算计算出结果.

【详解】由题意得：设 100 只野兔增长到 10 万只野兔大概需要 $x$ 年，

则 $100\times 2^{\frac{12x}{18}}=100000$，解得：$2^{\frac{2x}{3}}=1000$，

两边取对数，$\frac{2x}{3}\lg 2=\lg 1000=3$，

因为 $\lg 2\approx 0.3010$，

所以 $x\approx 15$.

故答案为：15

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2^x+2}{2},x\le 1\\ |\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$，若 $F(x)=f^2(x)-af(x)+\frac{2}{3}$ 的零点个数为 4，则实数 $a$ 取值范围为__________.

【答案】$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{5}{3}\right]\cup\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$

【解析】

【分析】画出 $f(x)$ 的图象，利用换元法，结合二次函数零点分布列不等式，由此求得 $a$ 的取值范围.

【详解】$f(x)=\begin{cases}\frac{2^x+2}{2},x\le 1\\ |\ln(x-1)|,x>1\end{cases}=\begin{cases}2^{x-1}+1,x\le 1\\ |\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$

$f\left(1\right)=2$，由 $\ln\left(x-1\right)=2$ 解得 $x=\mathrm{e}^2+1$.

画出 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示，

令 $f\left(x\right)=t$，

由图象可知 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=t$ 有两个公共点时，$0<t\leq 1$ 或 $t>2$；

$y=f\left(x\right)$ 与 $y=t$ 有一个公共点时，$t=0$；

$y=f\left(x\right)$ 与 $y=t$ 有三个公共点时，$1<t\leq 2$.

依题意，$F(x)=f^2(x)-af(x)+\dfrac{2}{3}$ 的零点个数为 4，

对于函数 $h\left(t\right)=t^2-at+\dfrac{2}{3}$，由于 $h\left(0\right)=\dfrac{2}{3}\neq 0$，

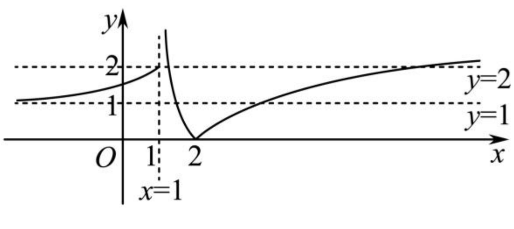
$h\left(t\right)$ 的两个零点 $t_1,t_2$，全都在区间 $\left(0,1\right]$ 或区间 $\left(2,+\infty\right)$，或一个在区间 $\left(0,1\right]$ 一个在区间 $\left(2,+\infty\right)$，

所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4\times\dfrac{2}{3}=a^2-\dfrac{8}{3}>0\\ 0<\dfrac{a}{2}<1\\ h\left(0\right)=\dfrac{2}{3}>0\\ h\left(1\right)=1-a+\dfrac{2}{3}\geq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=a^2-4\times\dfrac{2}{3}=a^2-\dfrac{8}{3}>0\\ \dfrac{a}{2}>2\\ h\left(2\right)=4-2a+\dfrac{2}{3}>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=a^2-4\times\dfrac{2}{3}=a^2-\dfrac{8}{3}>0\\ h\left(0\right)=\dfrac{2}{3}>0\\ h\left(1\right)=1-a+\dfrac{2}{3}\leq 0\\ h\left(2\right)=4-2a+\dfrac{2}{3}<0\end{cases}$，

解得 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}<a\leq\dfrac{5}{3}$ 或 $\varnothing$ 或 $a>\dfrac{7}{3}$，

所以 $a$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{5}{3}\right]\cup\left(\dfrac{7}{3},+\infty\right)$.

故答案为：$\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{5}{3}\right]\cup\left(\dfrac{7}{3},+\infty\right)$




【点睛】研究二次型复合函数的零点问题，关键点有两个，一个是内部函数的图象与性质，如本题中的函数 $f\left(x\right)$ 的图象与性质.另一个是二次函数零点分布的知识，需要考虑判别式、对称轴以及零点存在性定理.

## 四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知幂函数 $f(x)=(2m^2+m-2)x^{2m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

（1）求 $f(x)$ 的解析式

（2）若 $f(\sqrt{2-a})<f(\sqrt{a-1})$，求 $a$ 的取值范围.

【答案】（1） $f(x)=x^{-2}$

（2） $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】（1）根据幂函数的定义与单调性列式运算求解；

（2）根据幂函数的单调性列式运算求解，注意幂函数的定义域.

【小问 1 详解】

由题意可得 $\begin{cases}2m^2+m-2=1\\2m+1<0\end{cases}$，解得 $m=-\dfrac{3}{2}$，

故 $f(x)=x^{-2}$.

【小问 2 详解】

由（1）可知：$f(x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，

由 $f(\sqrt{2-a})<f(\sqrt{a-1})$，则 $\begin{cases}\sqrt{2-a}>0\\\sqrt{a-1}>0\end{cases}$，解得 $1<a<2$，

$\because$ 幂函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 $\sqrt{2-a}>\sqrt{a-1}$，解得 $1<a<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

18. 已知 $f(\alpha)=\dfrac{\sin(5\pi+\alpha)\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}$.

（1）化简 $f(\alpha)$;

（2）若 $f(\alpha)=\dfrac{1}{3}$，求 $3\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha$ 的值.

【答案】（1） $f(\alpha)=-\tan\alpha$

（2） 6

【解析】

【分析】（1）利用诱导公式进行化简即可；

（2）根据已知求得 $\tan\alpha$，利用同角三角函数关系，齐次化，弦化切，化简即可求得原式的值.

【小问 1 详解】

由已知 $f(\alpha)=\dfrac{\sin(5\pi+\alpha)\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}$，

所以 $f(\alpha)=\dfrac{(-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)}=-\tan\alpha$.

【小问 2 详解】

由（1）知 $f(\alpha)=-\tan\alpha$，所以 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $3\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha=\dfrac{3\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{3\tan^2\alpha-4\tan\alpha+5}{\tan^2\alpha+1}=6$.

19. 设函数 $y=mx^2-mx-1$.

（1）若函数 $y=mx^2-mx-1$ 有两个零点，求 $m$ 的取值范围；

（2）若命题：$\exists x\in\mathbf{R}$，$y\geq 0$ 是假命题，求 $m$ 的取值范围；

（3）若对于 $x\in[1,3]$，$y>(m+1)x^2+3$ 恒成立，求 $m$ 的取值范围.

【答案】（1）$m>0$ 或 $m<-4$

（2）$(-4,0]$

（3）$m<-5$

【解析】

【分析】（1）根据函数 $y=mx^2-mx-1$ 有两个零点，得到方程 $mx^2-mx-1=0$ 有两个不同的实数根，然后得到 $\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta=m^2+4m>0\end{cases}$，解方程即可；

（2）根据命题：$\exists x\in\mathrm{R}$，$y\geq 0$ 是假命题，得到 $\forall x\in\mathrm{R}$，$y<0$ 是真命题，然后分类讨论 $m=0$ 和 $m\neq 0$ 两种情况，列方程求解即可；

（3）利用分离参数的方法，把对于 $x\in[1,3]$，$y>(m+1)x^2+3$ 恒成立转化为 $m<\left[-\left(x+\frac{4}{x}\right)\right]_{\min}$，利用函数单调性求最小值即可.

【小问 1 详解】

因为函数 $y=mx^2-mx-1$ 有两个零点，所以方程 $mx^2-mx-1=0$ 有两个不同的实数根，所以

$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=m^2+4m>0 \end{cases}$，解得 $m>0$ 或 $m<-4$.

【小问 2 详解】

若命题：$\exists x\in \mathrm{R}$，$y\geq 0$ 是假命题，则 $\forall x\in \mathrm{R}$，$y<0$ 是真命题，即 $y=mx^2-mx-1<0$ 在 $\mathrm{R}$ 上恒成立，

当 $m=0$ 时，$-1<0$，成立；

当 $m\neq 0$ 时，$\begin{cases} m<0 \\ \Delta=m^2+4m<0 \end{cases}$，解得 $-4<m<0$；

综上所述，$m$ 的取值范围为 $(-4,0]$.

【小问 3 详解】

若对于 $x\in[1,3]$，$y>(m+1)x^2+3$ 恒成立，即 $x^2+mx+4<0$ 在 $x\in[1,3]$ 上恒成立，

则 $m<-\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 在 $x\in[1,3]$ 上恒成立，故只需 $m<\left[-\left(x+\frac{4}{x}\right)\right]_{\min}$ 即可，

因为函数 $f(x)=-\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 在 $[1,2)$ 上递增，$[2,4]$ 上递减，$f(1)=-5$，$f(3)=-\frac{13}{3}$，$f(1)<f(3)$，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-5$，故 $m<-5$.

20. 已知实数 $x>0$，$y>0$，且 $2xy=x+y+a(x^2+y^2)(a\in\mathrm{R})$.

（1）当 $a=0$ 时，求 $2x+4y$ 的最小值，并指出取最小值时 $x,y$ 的值；

（2）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $x+y$ 的最小值，并指出取最小值时 $x,y$ 的值.

【答案】（1）最小值为 $3+2\sqrt{2}$，此时 $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2},y=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

（2）最小值为 4，此时 $x=y=2$.

【解析】

【分析】（1）变形得到$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=1$，利用基本不等式“1”的妙用，求出最小值及此时$x,y$的值；

（2）变形得到$6xy=2\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2$，利用$xy\le\frac{\left(x+y\right)^2}{4}$得到关于$2\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2\le\frac{3\left(x+y\right)^2}{2}$，求出$x+y$的最小值及此时$x,y$的值.

【小问1详解】

$a=0$时，$2xy=x+y$，

因为$x>0,y>0$，

所以$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=1$，

故$2x+4y=\left(2x+4y\right)\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)=1+2+\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}\ge3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即$x=\frac{1+\sqrt{2}}{2},y=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$时，等号成立，

【小问2详解】

$a=\frac{1}{2}$时，$2xy=x+y+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$，

变形为$4xy=2\left(x+y\right)+\left(x^2+y^2\right)$，即$6xy=2\left(x+y\right)+\left(x^2+y^2+2xy\right)$，

$6xy=2\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2$，

其中$6xy\le\frac{3\left(x+y\right)^2}{2}$，

故$2\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2\le\frac{3\left(x+y\right)^2}{2}$，

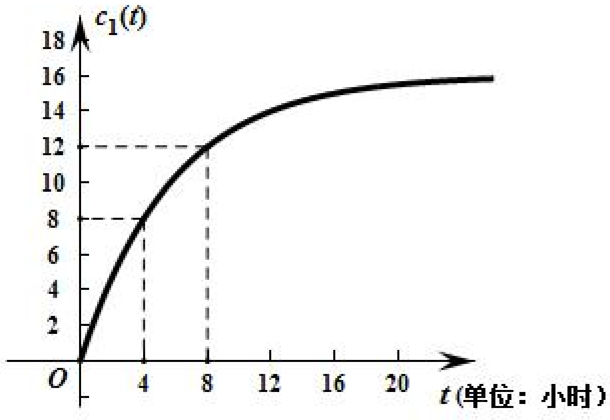
因为$x>0,y>0$，解得：$x+y\ge4$，

当且仅当$x=y=2$时，等号成立，

所以$x+y$的最小值为4，此时$x=y=2$.

21. 用打点滴的方式治疗“新冠”病患时，血药浓度(血药浓度是指药物吸收后，在血浆内的总浓度)随时间变化的函数符合$c_1\left(t\right)=\frac{m_0}{kV}\left(1-2^{-kt}\right)$，其函数图像如图所示，其中$V$为中心室体积(一般成年人的中心室体积

近似为600)，$m_0$ 为药物进入人体时的速率，$k$ 是药物的分解或排泄速率与当前浓度的比值.此种药物在人体内有效治疗效果的浓度在4到15之间，当达到上限浓度时，必须马上停止注射，之后血药浓度随时间变化的函数符合 $c_2(t)=c\cdot 2^{-kt}$，其中 $c$ 为停药时的人体血药浓度.




（1）求出函数 $c_1(t)$ 的解析式;

（2）一病患开始注射后，最迟隔多长时间停止注射？为保证治疗效果，最多再隔多长时间开始进行第二次注射？(保留小数点后一位，参考数据 lg2≈0.3，lg3≈0.48)

【答案】（1）$c_1(t)=16\left(1-2^{-\frac{t}{4}}\right)(t\geq 0)$；（2）所以从开始注射后，最迟隔16小时停止注射；所以为保证治疗效果，最多再隔多7.7小时后开始进行第二次注射.

【解析】

【分析】

（1）根据图象可知，两个点 $(4,8)$，$(8,12)$ 在函数图象上，代入后求解参数，求 $c_1(t)$；（2）由（1）求 $c_1(t)\leq 15$ 中 $t$ 的范围；求得 $c_2(t)$ 后，再求 $c_2(t)\geq 4$ 中 $t$ 的范围.

【详解】（1）由条件可知，$V=600$，由图象可知点 $(4,8)$，$(8,12)$ 在函数图象上，

则 $\begin{cases}\dfrac{m_0}{600k}\left(1-2^{-4k}\right)=8\\ \dfrac{m_0}{600k}\left(1-2^{-8k}\right)=12\end{cases}$，两式相除得 $\dfrac{1-2^{-4k}}{1-2^{-8k}}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1-2^{-4k}}{1-\left(2^{-4k}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$，

解得：$k=\dfrac{1}{4}$，$m_0=2400$，

所以函数 $c_1(t)=16\left(1-2^{-\frac{t}{4}}\right)(t\geq 0)$；

（2）$16\left(1-2^{-\frac{t}{4}}\right)\le 15\Rightarrow 1-2^{-\frac{t}{4}}\le\frac{15}{16}$，得 $2^{-\frac{t}{4}}\ge\frac{1}{16}=2^{-4}$，

解得：$0\le t\le 16$，

所以从开始注射后，最迟隔 16 小时停止注射；

$\because k=\frac{1}{4}$ $\therefore c_2(t)=c\cdot 2^{-\frac{1}{4}t}$，由题意可知 $c=15$，

$\therefore c_2(t)=15\cdot 2^{-\frac{t}{4}}$，当 $15\cdot 2^{-\frac{t}{4}}\ge 4$，得 $2^{-\frac{t}{4}}\ge\frac{4}{15}$，

即 $-\frac{t}{4}\ge\log_2\frac{4}{15}\Rightarrow -\frac{t}{4}\ge 2-\log_2 15\Rightarrow -\frac{t}{4}\ge 2-\frac{\lg 15}{\lg 2}$

得 $-\frac{t}{4}\ge 2-\frac{\lg 3+\lg 5}{\lg 2}\Rightarrow -\frac{t}{4}\ge 2-\frac{\lg 3-\lg 2+1}{\lg 2}$，

解得：$0\le t\le 7.7$，

所以为保证治疗效果，最多再隔多 7.7 小时后开始进行第二次注射.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是能够读懂题意，并根据题意，通过代点的方法求两个函数的解析式，第二个关键就是计算，本题的计算要求比较高，注意指对运算技巧.

22. 已知函数 $g(x)=\frac{x+b}{2x^2+a}$，$x\in(-1,1)$，从下面两个条件中任选一个条件，求出 $a$，$b$ 的值，并解答后面的问题.（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）①已知函数 $f(x)=x^2-(a-2)x+4$，$f(x)$ 在定义域 $[b-1,b+1]$ 上为偶函数；②已知函数 $f(x)=ax+b(a>0)$ 在 $[1,2]$ 上的值域为 $[2,4]$；

（1）选择______，求 $a$，$b$ 的值；

（2）证明 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增；

（3）解不等式 $g(t-1)+g(2t)<0$.

【答案】（1）答案见解析；

（2）证明见解析； （3）$\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

【解析】

【分析】（1）选①利用二次函数的性质及偶函数的定义即得，选②利用函数的单调性即求；

（2）利用单调性的定义即证；

（3）利用奇函数的定义可得 $g(x)$ 为奇函数，进而利用函数的单调性及奇偶性解不等式.

【小问 1 详解】

选①：因为$f(x)$在$[b-1,b+1]$上是偶函数，

则$\dfrac{a-2}{2}=0$，且$(b-1)+(b+1)=0$，

所以$a=2$，$b=0$；

选②：当$a>0$时，$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，

则有$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=4 \end{cases}$，

得$a=2$，$b=0$；

【小问 2 详解】

由①或②得$g(x)=\dfrac{x}{2x^2+2}$，$x\in(-1,1)$，任取$x_1,x_2\in(-1,1)$，且$-1<x_1<x_2<1$，则

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{2x_1^2+2}-\frac{x_2}{2x_2^2+2}=\frac{2(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(2x_1^2+2)(2x_2^2+2)}$$

$\because -1<x_1<x_2<1$，则$x_2-x_1>0$，$x_1x_2-1<0$，

$\therefore g(x_1)-g(x_2)<0$，即$g(x_1)<g(x_2)$

则$g(x)$在$(-1,1)$上单调递增.

【小问 3 详解】

$\because g(x)=\dfrac{x}{2x^2+2}$，$x\in(-1,1)$，

又$g(-x)=\dfrac{-x}{2x^2+2}=-g(x)$，

$\therefore g(x)$为奇函数，

由$g(t-1)+g(2t)<0$，得$g(2t)<g(1-t)$，

又因为$g(x)$在$(-1,1)$上单调递增，

则$\begin{cases} -1<2t<1 \\ -1<t-1<1 \\ 2t<1-t \end{cases}$，解得$0<t<\dfrac{1}{3}$，

所以$t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$