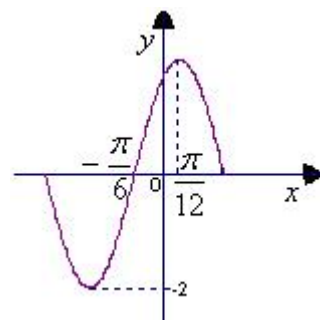


2017-2018 学年江西省鹰潭市高一(上)期末数学试卷(文科)

一、选择题(本大题共 12 小题, 共 60.0 分)

- 集合 $A=\{x|-2 < x < 2\}$, $B=\{x|-1 \leq x < 3\}$, 那么 $A \cup B =$ ()
 A. $\{x|-2 < x < 3\}$ B. $\{x|1 \leq x < 2\}$ C. $\{x|-2 < x \leq 1\}$ D. $\{x|2 < x < 3\}$
- 下列四组函数中, 表示同一函数的是 ()
 A. $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$
 B. $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2 \lg x$
 C. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = x+1$
 D. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$
- 在下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 ()
 A. $y = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$
 B. $y = -2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$
 C. $y = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$
 D. $y = -2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$
- 函数 $f(x) = \ln x + x^3 - 9$ 的零点所在的区间为 ()
 A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)
- 若 $\tan \alpha < 0$, 且 $\sin \alpha > \cos \alpha$, 则 α 在 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 边长为 5, 7, 8 的三角形的最大角与最小角的和是 ()
 A. 90° B. 120° C. 135° D. 150°
- 已知 $A=B=\mathbb{R}$, $x \in A$, $y \in B$, $f: x \rightarrow y = ax + b$ 是从 A 到 B 的映射, 若 1 和 8 的原象分别是 3 和 10, 则 5 在 f 下的象是 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 已知 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, 且 $(\vec{a} + k\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b})$, 则 k 等于 ()
 A. $\pm \frac{4}{3}$ B. $\pm \frac{3}{4}$ C. $\pm \frac{3}{5}$ D. $\pm \frac{4}{5}$
- 奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 若 $f(-1) = 0$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 ()
 A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- 已知函数 $f(x) = \cos \omega x$ ($x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 为了得到函数 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 的图象, 只要将 $y = f(x)$ 的图象 ()



- A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

11. 设点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积
的比为 ()

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. $\frac{5}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \sin(\frac{\pi}{4}x), & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 满足 $f(x_1) = f$

$(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{(x_3-1) \cdot (x_4-1)}{x_1 \cdot x_2}$ 的取值范围是 ()

- A. (20,32) B. (9,21) C. (8,24) D. (15,25)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 已知函数 $f(x) = x^{2-m}$ 是定义在区间 $[-3-m, m^2-m]$ 上的奇函数, 则 $f(m) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若扇形 OAB 的面积是 1cm^2 , 它的周长是 4cm , 则该扇形圆心角的弧度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 函数 $f(x+2) = \begin{cases} \tan x, & (x \geq 0) \\ \lg(-x), & (x < 0) \end{cases}$, 则 $f(\frac{\pi}{4}+2) \cdot f(-98)$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分)

17. 化简或求值:

$$(1) (0.064)^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{7}{8})^0 + (\frac{81}{16})^{\frac{1}{4}} + |-0.01|^{\frac{1}{2}};$$

$$(2) \lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50 (\lg 2 + \lg 5)^2$$

18. 设 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 把 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再

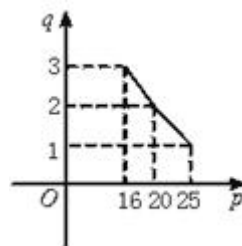
把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求 $g(\frac{\pi}{6})$ 的值.

19. 已知 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 设向量 $\vec{m} = (a, b)$, $\vec{n} = (\sin A, \cos B)$, $\vec{p} = (1, 1)$.

(I) 若 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 求角 B 的大小;

(II) 若 $\vec{m} \cdot \vec{p} = 4$, 边长 $c=2$, 角 $C=\frac{\pi}{3}$ 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. 某企业甲将经营状态良好的某种消费品专卖店以 58 万元的优惠价转让给企业乙, 约定乙用经营该店的利润偿还转让费 (不计息). 已知经营该店的固定成本为 6.8 万元/月, 该消费品的进价为 16 元/件, 月销量 q (万件) 与售价 p (元/件) 的关系如图.



- (1) 写出销量 q 与售价 p 的函数关系式;
- (2) 当售价 p 定为多少时, 月利润最多?
- (3) 企业乙最早可望在经营该专卖店几个月后还清转让费?

21. 已知定义在 R 上的单调减函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} - 2^x$.

- (1) 求 $f(0)$.
- (2) 当 $x < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式.
- (3) 若对任意的 $t \in R$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, 函数 $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

- (1) 若 $g(mx^2 + 2x + m)$ 的定义域为 R , 求实数 m 的取值范围;
- (2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 求函数 $y = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3$ 的最小值 $h(a)$;
- (3) 是否存在非负实数 m, n , 使得函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x^2)$ 的定义域为 $[m, n]$, 值域为 $[2m, 2n]$, 若存在, 求出 m, n 的值; 若不存在, 则说明理由.

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】

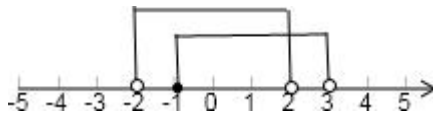
解:把集合 A 和集合 B 中的解集表示在数轴上, 如图所示,

则 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$

故选: A.

把两个集合的解集表示在数轴上, 可得集合 A 与 B 的并集.

此题考查学生理解并集的定义掌握并集的运算法则, 灵活运用数形结合的数学思想解决数学问题, 是一道基础题.



2. 【答案】A

【解析】

解:对于 A, $\because g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $f(x) = |x|$, \therefore 两函数为同一函数;

对于 B, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, 两函数定义域不同, \therefore 两函数为不同函数;

对于 C, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 而函数 $g(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 两函数定义域不同, \therefore 两函数为不同函数;

对于 D, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 1\}$, 而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, 两函数定义域不同, \therefore 两函数为不同函数.

故选: A.

利用定义域相同, 对应关系相同的函数为同一函数逐一核对四个选项即可得到答案.

本题考查了判断两个函数是否为同一函数的方法, 对于两个函数, 只要定义域相同, 对应关系相同, 两函数即为同一函数, 是基础题.

3. 【答案】C

【解析】

解:由题意可知, $A=2$, $T=4 \times (\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}) = \pi$, 所以 $\omega=2$,

因为函数图象过 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$,

所以 $0 = \sin(-\frac{\pi}{3} + \varphi)$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$

所以函数的解析式为: $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

即 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos(-\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$,

故选: C.

根据函数的图象, 求出函数的周期, 确定 ω , 求出 A, 根据图象过 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 求出

φ , 即可得到函数的解析式.

本题考查正弦函数平移变换和最小正周期的求法、根据图象求函数解析式. 考查学生的看图能力.

4. 【答案】C

【解析】

解: 由于函数 $f(x)=\ln x+x^3-9$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$f(2)=\ln 2-1<0$, $f(3)=\ln 3+18>0$, 故函数 $f(x)=\ln x+x^3-9$ 在区间 $(2, 3)$ 上有唯一的零点,

故选:C.

根据函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $f(2)<0$, $f(3)>0$, 可得函数 $f(x)$ 在区间 $(2, 3)$ 上有唯一的零点.

本题主要考查函数的单调性, 函数零点的判定定理, 属于基础题.

5. 【答案】B

【解析】

解: $\because \tan \alpha < 0$,

$\therefore \alpha$ 在第 2 或 4 象限.

$\because \sin \alpha > \cos \alpha$,

$\therefore \alpha$ 在第 2 象限.

故选:B.

利用各象限三角函数值的符号判断即可.

本题考查各象限三角函数值的符号, 考查转化思想与运算能力, 属于基本知识的考查.

6. 【答案】B

【解析】

解: 根据三角形角边关系可得, 最大角与最小角所对的边的长分别为 8 与 5, 设长为 7 的边所对的角为 θ , 则最大角与最小角的和是 $180^\circ - \theta$,

有余弦定理可得, $\cos \theta = \frac{25+64-49}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$,

易得 $\theta = 60^\circ$,

则最大角与最小角的和是 $180^\circ - \theta = 120^\circ$,

故选:B.

设长为 7 的边所对的角为 θ , 根据余弦定理可得 $\cos \theta$ 的值, 进而可得 θ 的大小, 则由三角形内角和定理可得最大角与最小角的和是 $180^\circ - \theta$, 即可得答案.

本题考查余弦定理的运用, 解本题时注意与三角形内角和定理结合分析题意.

7. 【答案】A

【解析】

解: $A=B=\mathbb{R}$, $x \in A$, $y \in B$, $f: x \rightarrow y = ax + b$ 是从 A 到 B 的映射,

又 1 和 8 的原象分别是 3 和 10,

$$\therefore \begin{cases} 3a+b=1 \\ 10a+b=8 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases},$$

即 $f: x \rightarrow y = x - 2$

5 在 f 下的象可得 $f(5) = 1 \times 5 - 2 = 3$,

故选:A.

$A=B=\mathbb{R}$, $x \in A$, $y \in B$, $f: x \rightarrow y = ax + b$ 是从 A 到 B 的映射, 1 和 8 的原象分别是 3 和 10, 可以根据象与原像的关系满足 $f(x) = ax + b$, 列出不等式求出 a, b 的值, 进而得到答案.

此题主要考查映射的定义及其应用, 注意象与原象的对应关系, 此题是一道基础题;

8.【答案】B

【解析】

解： $\because (\vec{a} + k\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b})$

$$\therefore (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0$$

$$\text{即 } \vec{a}^2 - k^2 \vec{b}^2 = 0$$

$$\therefore 9 - 16k^2 = 0$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{3}{4}$$

故选：B.

利用向量垂直的充要条件：数量积为0；再利用向量的平方等于向量模的平方列出方程解得.

本题考查向量垂直的充要条件及向量模的平方等于向量的平方.

9.【答案】A

【解析】

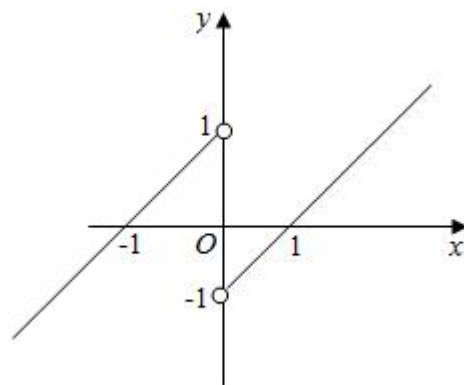
解：根据题意，可作出函数图象：

\therefore 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

故选：A.

根据题目条件，画出一个函数图象，再观察即得结果.

本题主要考查函数的图象和性质，作为选择题，可灵活地选择方法，提高学习效率，培养能力.



10.【答案】B

【解析】

解： \because 函数 $f(x) = \cos \omega x$ ($x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$) 的最小正周期为 π ,

\therefore 由 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ 得 $\omega = 2$,

\therefore 函数 $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

\therefore 要得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象,

由于 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos(2x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$, 得到函数 $g(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ 即可,

\therefore 需要把函数 $f(x) = \cos 2x$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度,

故选 B.

根据最小正周期为 π , 可以求出 ω 的值, 然后再利用图象平移求解.

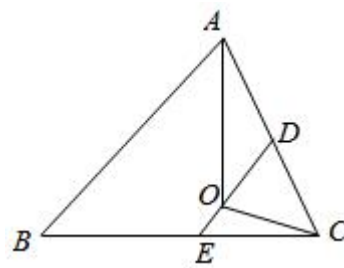
本题考查了余弦型函数的性质、诱导公式及图象变换, 关键是用诱导公式把两个函数的名称化成一致的.

11.【答案】C

【解析】

解：分别取 AC、BC 的中点 D、E,

$$\therefore \vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0},$$



$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \text{ 即 } 2\overrightarrow{OD} = -4\overrightarrow{OE},$$

$\therefore O$ 是 DE 的一个三等分点,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} = 3,$$

故选: C.

根据 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 变形得 $\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 利用向量加法的平行四边形法则可得 $2\overrightarrow{OD} = -4\overrightarrow{OE}$, 从而确定点 O 的位置, 进而求得 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比.

此题是个基础题. 考查向量在几何中的应用, 以及向量加法的平行四边形法则和向量共线定理等基础知识, 同时考查学生灵活应用知识分析解决问题的能力 and 计算能力.

12. 【答案】 B

【解析】

解: 函数的图象如图所示,

$$\therefore f(x_1) = f(x_2),$$

$$\therefore -\log_2 x_1 = \log_2 x_2,$$

$$\therefore \log_2 x_1 x_2 = 0,$$

$$\therefore x_1 x_2 = 1,$$

$$\therefore f(x_3) = f(x_4),$$

$$\therefore x_3 + x_4 = 12, 2 < x_3 < x_4 < 10$$

$$\therefore \frac{(x_3-1) \cdot (x_4-1)}{x_1 \cdot x_2} = x_3 x_4 - (x_3 + x_4) + 1 = x_3 x_4 - 11,$$

$$\therefore 2 < x_3 < x_4 < 10$$

$$\therefore \frac{(x_3-1) \cdot (x_4-1)}{x_1 \cdot x_2} \text{ 的取值范围是 } (9, 21).$$

故选: B.

画出函数 $f(x)$ 的图象, 确定 $x_1 x_2 = 1, x_3 + x_4 = 12, 2 < x_3 < x_4 < 10$, 由此可得则

$$\frac{(x_3-1) \cdot (x_4-1)}{x_1 \cdot x_2} \text{ 的取值范围.}$$

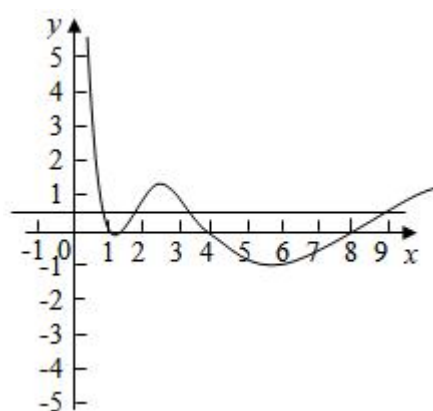
本小题主要考查分段函数的解析式求法及其图象的作法、函数的值域的应用、函数与方程的综合运用等基础知识, 考查运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 属于中档题.

13. 【答案】 -1

【解析】

解: 由已知必有 $m^2 - m = 3 + m$, 即 $m^2 - 2m - 3 = 0, \therefore m = 3$, 或 $m = -1$;

当 $m = 3$ 时, 函数即 $f(x) = x^{-1}$, 而 $x \in [-6, 6], \therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处无意义, 故舍去.



当 $m=-1$ 时, 函数即 $f(x)=x^3$, 此时 $x \in [-2, 2]$, $\therefore f(m)=f(-1)=(-1)^3=-1$.

综上可得, $f(m)=-1$,

故答案为-1.

由于奇函数的定义域必然关于原点对称, 可得 $m^2-m=3+m$, 求出 m 的值, 代入条件检验可得结论.

本题主要考查函数的奇偶性的判断, 利用了奇函数的定义域必然关于原点对称, 属于基础题.

14. 【答案】2

【解析】

解: 设该扇形圆心角的弧度数是 α , 半径为 r ,

$$\text{根据题意, 有 } \begin{cases} 2r + \alpha r = 4 \\ \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2 = 1 \end{cases},$$

解可得, $\alpha=2$, $r=1$,

故答案为: 2.

设该扇形圆心角的弧度数是 α , 半径为 r , 由扇形的面积与弧长公式, 可得关系式, 求解可得答案.

本题考查弧度制下, 扇形的面积及弧长公式的运用, 注意与角度制下的公式的区别与联系.

15. 【答案】 $-\frac{5}{3}$

【解析】

$$\text{解: } \because \tan \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 3}{\tan \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{5}{3}.$$

故答案为: $-\frac{5}{3}$

所求式子分子分母同时除以 $\cos \alpha$, 利用同角三角函数间的基本关系弦化切后, 将 $\tan \alpha$ 的值代入计算即可求出值.

此题考查了同角三角函数基本关系的应用, 以及同角三角函数间的基本关系, 熟练掌握基本关系是解本题的关键.

16. 【答案】2

【解析】

$$\text{解: } \because f(x+2) = \begin{cases} \tan x, (x \geq 0) \\ \lg(-x), (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) \cdot f(-98) = \tan \frac{\pi}{4} \cdot \lg 100 = 1 \times 2 = 2$$

故答案为: 2

求分段函数的函数值, 先判断出 $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -100$ 所属于的范围, 将它们代入各段的解析式求出值.

解决分段函数的问题, 应该分段解决, 然后再将各段的结果求并集, 属于基础题.

17.【答案】解：（1） $(0.064)^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{7}{8})^0 + (\frac{81}{16})^{\frac{1}{4}} + |-0.01|^{\frac{1}{2}}$

$$=(0.4^3)^{-\frac{1}{3}} - 1 + (\frac{3}{2})^{4 \times \frac{1}{4}} + (0.1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{2} - 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{10}$$

$$=\frac{31}{10};$$

（2） $\lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50 (\lg 2 + \lg 5)^2$

$$=\lg(5 \times 100) + \lg 8 - \lg 5 - \frac{1}{2} \lg 2^6 + 50$$

$$=2 + \lg 5 + 3 \lg 2 - \lg 5 - 3 \lg 2 + 50$$

$$=52.$$

【解析】

（1）直接利用有理指数幂的运算性质化简求值；

（2）利用对数的运算性质化简求值.

本题考查有理指数幂的运算性质及对数的运算性质，是基础的计算题.

18.【答案】解：（I） $\because f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$

$$= 2\sqrt{3}\sin^2 x - 1 + \sin 2x = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1 + \sin 2x$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3} - 1 = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} - 1,$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 求得 } k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12},$$

$$\text{可得函数的增区间为 } [k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}], k \in \mathbb{Z}.$$

（II）把 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），可得 $y=2\sin$

$(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} - 1$ 的图象；

再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $y=g(x) = 2\sin x + \sqrt{3} - 1$ 的图象，

$$\therefore g(\frac{\pi}{6}) = 2\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}.$$

【解析】

（I）利用三角恒等变换化简 $f(x)$ 的解析式，再利用正弦函数的单调性，求得函数的增区间.

（II）利用函数 $y=Asin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，求得 $g(x)$ 的解析式，从而求得 $g(\frac{\pi}{6})$ 的值.

本题主要考查三角恒等变换，正弦函数的单调性，函数 $y=Asin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，求函数的值，属于基础题.

19.【答案】解：（I） $\because \vec{m} \parallel \vec{n}, \therefore a \cos B = b \sin A$, （2 分）

根据正弦定理得： $2R \sin A \cos B = 2R \sin B \sin A$ （4 分）

$\therefore \cos B = \sin B$, 即 $\tan B = 1$, 又 $B \in (0, \pi)$,

$$\therefore B = \frac{\pi}{4}; \quad (8 \text{ 分})$$

(II) 由 $\vec{m} \cdot \vec{p} = 4$ 得: $a+b=4$, (8 分)

$$\text{由余弦定理可知: } 4 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3} = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab,$$

于是 $ab=4$, (12 分)

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{3}. \quad (13 \text{ 分})$$

【解析】

(I) 根据平面向量平行时满足的条件, 得到一个关系式, 利用正弦定理化简即可求出 $\tan B$ 的值, 由 B 的范围, 利用特殊角的三角函数值即可求出 B 的度数;

(II) 根据平面向量的数量积的运算法则化简 $\vec{m} \cdot \vec{p} = 4$, 得到 $a+b$ 的值, 然后由 c 及 $\cos C$ 的值, 利用余弦定理表示出 c^2 , 变形后把 $a+b$ 的值代入即可求出 ab 的值, 然后由 ab 及 $\sin C$ 的值, 利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle ABC$ 的面积. 此题考查学生掌握平面向量数量积的运算法则, 灵活运用正弦、余弦定理化简求值, 是一道中档题.

$$20. \text{【答案】解: } (1) q = \begin{cases} -\frac{1}{4}p + 7, & 16 \leq p \leq 20 \\ -\frac{1}{5}p + 6, & 20 < p \leq 25 \end{cases};$$

(2) 设月利润为 W (万元), 则

$$W = (p-16)q - 6.8 = \begin{cases} (-\frac{1}{4}p + 7)(p-16) - 6.8, & 16 \leq p \leq 20 \\ (-\frac{1}{5}p + 6)(p-16) - 6.8, & 20 < p \leq 25 \end{cases}$$

$$\text{当 } 16 \leq p \leq 20, W = -\frac{1}{4}(p-22)^2 + 2.2, \text{ 当 } p=20 \text{ 时, } W_{\max} = 1.2;$$

$$\text{当 } 20 < p \leq 25, W = -\frac{1}{5}(p-23)^2 + 3, \text{ 当 } p=23 \text{ 时, } W_{\max} = 3.$$

\therefore 当售价定为 23 元/件时, 月利润最多为 3 万元;

(3) 设最早 n 个月后还清转让费,

$$\text{则 } 3n \geq 58, \text{ 即 } n \geq \frac{58}{3},$$

$$\therefore n \in \mathbb{N}^*, \therefore n = 20,$$

\therefore 企业乙最早可望 20 个月后还清转让费.

【解析】

(1) 由已知图象直接求出销量 q 与售价 p 的函数关系式;

(2) 分段写出月利润为 W (万元), 利用配方法分段求出最大值, 则月利润最大值可求;

(3) 由(2)中求得的最大月利润乘以 n , 再由利润大于转让费求得 n 值.

本题考查简单的数学建模思想方法, 考查函数解析式的求法, 训练了利用配方法求二次函数的最值, 是中档题.

$$21. \text{【答案】解 (1) } \because \text{定义在 } R \text{ 上的函数 } f(x) \text{ 是奇函数, } \therefore f(0) = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } -x > 0, \therefore f(-x) = \frac{x}{3} - 2^{-x}.$$

$$\text{又} \because \text{函数 } f(x) \text{ 是奇函数, } \therefore f(x) = -f(-x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{3} + 2^{-x}.$$

故当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} + 2^{-x}$.

(3) 由不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$

得: $f(t^2 - 2t) < -f(2t^2 - k)$

$\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(t^2 - 2t) < f(k - 2t^2)$

又 $\because f(x)$ 在 R 上是减函数,

$$\therefore t^2 - 2t > k - 2t^2$$

即对任意 $t \in R$ 不等式 $3t^2 - 2t > k$ 恒成立,

$$\text{令 } g(t) = 3t^2 - 2t = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

$$\therefore k < -\frac{1}{3}.$$

故实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{3})$.

【解析】

(1) 根据定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(0) = 0$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{3} - 2^x$. 那么 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 即可求解;

(3) 利用奇函数和单调性脱去“ f ”, 转化为二次函数问题求解即可.
 本题考查的是函数奇偶性和单调性的应用, 恒成立问题转化思想.

22. 【答案】解: (1) $\because g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,

$$\therefore y = g(mx^2 + 2x + m) = \log_{\frac{1}{2}}(mx^2 + 2x + m),$$

$$\text{令 } u = mx^2 + 2x + m, \text{ 则 } y = \log_{\frac{1}{2}} u,$$

当 $m = 0$ 时, $u = 2x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 不满足题意;

当 $m \neq 0$ 时, 若 $y = \log_{\frac{1}{2}} u$ 的定义域为 R ,

$$\text{则 } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 4 - 4m^2 < 0 \end{cases},$$

解得 $m > 1$,

综上所述, $m > 1$... (4 分)

$$(2) y = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 2a\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 2a\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3, x \in [-1, 1],$$

$$\text{令 } t = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ 则 } t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], y = t^2 - 2at + 3, t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

\because 函数 $y = t^2 - 2at + 3$ 的图象是开口朝上, 且以 $t = a$ 为对称轴的抛物线,

$$\text{故当 } a < \frac{1}{2} \text{ 时, } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } h(a) = y_{\min} = \frac{13}{4} - a;$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq a \leq 2 \text{ 时, } t = a \text{ 时, } h(a) = y_{\min} = 3 - a^2;$$

$$\text{当 } a > 2 \text{ 时, } t = 2 \text{ 时, } h(a) = y_{\min} = 7 - 4a.$$

综上所述, $h(a) = \begin{cases} \frac{13}{4} - a, & a < \frac{1}{2} \\ 3 - a^2, & \frac{1}{2} \leq a \leq 2 \\ 7 - 4a, & a > 2 \end{cases}$ (10 分)

$$(3) y = \log_{\frac{1}{2}} f(x^2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = x^2,$$

假设存在, 由题意, 知 $\begin{cases} m^2 = 2m \\ n^2 = 2n \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m = 0 \\ n = 2 \end{cases}$,

\therefore 存在 $m=0, n=2$, 使得函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x^2)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 值域为 $[0, 4]$ (12 分)

【解析】

(1) 若 $y = g(mx^2 + 2x + m) = \log_{\frac{1}{2}}(mx^2 + 2x + m)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 则真数大于 0 恒成立, 结合二次函数的图象和性质, 分类讨论满足条件的实数 m 的取值范围, 综合讨论结果, 可得答案;

(2) 令 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则函数 $y = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3$ 可化为: $y = t^2 - 2at + 3, t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 结合二次函数的图象和性质, 分类讨论各种情况下 $h(a)$ 的表达式, 综合讨论结果, 可得答案;

(3) 假设存在, 由题意, 知 $\begin{cases} m^2 = 2m \\ n^2 = 2n \end{cases}$ 解得答案.

本题考查的知识点是对数函数的图象和性质, 熟练掌握对数函数的图象和性质, 是解答的关键.