

2016 年江苏数学高考试题

参考公式

圆柱的体积公式: $V_{\text{圆柱}} = Sh$, 其中 S 是圆柱的底面积, h 为高。

圆锥的体积公式: $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 是圆锥的底面积, h 为高。

一、填空题: 14 个小题, 每小题 5 分, 共 70 分.

1. 已知集合 $A = \{-1, 2, 3, 6\}$, $B = \{x | -2 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

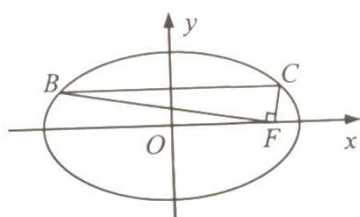
2. 复数 $z = (1 + 2i)(3 - i)$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的实部是 _____.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦距是 _____.

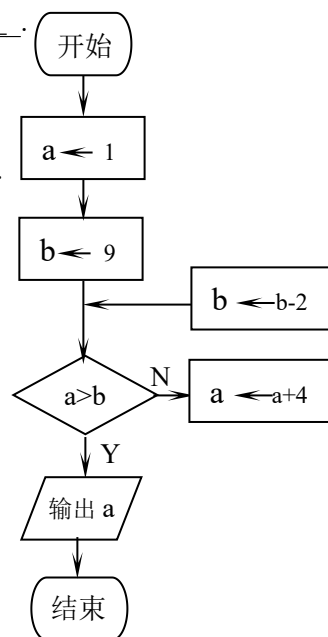
4. 已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是 _____.

5. 函数 $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ 的定义域是 _____.

6. 如图是一个算法的流程图, 则输出的 a 的值是 _____.



第 10 题



7. 将一颗质地均匀的骰子 (一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和小于 10 的概率是 _____.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1 + a_2 = -3$, $S_5 = 10$, 则 a_9 的值是 _____.

9. 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y = \sin 2x$ 的图象与 $y = \cos x$ 的图象的交点个数是 _____.

10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC = 90^\circ$, 则该椭圆的离心率是 _____.

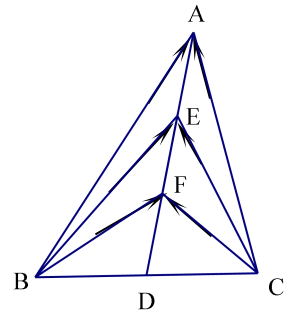
11. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x + a, & -1 \leq x < 0, \\ \left| \frac{2}{5} - x \right|, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$ 其中

$a \in \mathbf{R}$. 若 $f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2})$, 则 $f(5a)$ 的值是 _____.

12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-2y+4 \geq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \\ 3x-y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的取值范围是_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点,

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.



14. 在锐角三角形 ABC 中, 若 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是_____.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共 90 分)

15. (本小题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $C = \frac{\pi}{4}$.

(1) 求 AB 的长;

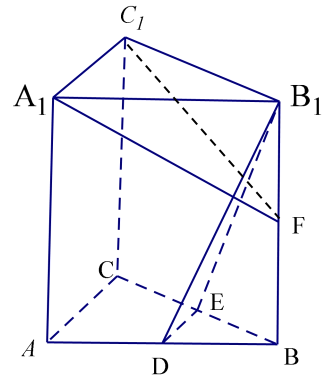
(2) 求 $\cos(A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

16. (本小题满分 14 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在

侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D \perp A_1F$, $A_1C_1 \perp A_1B_1$.

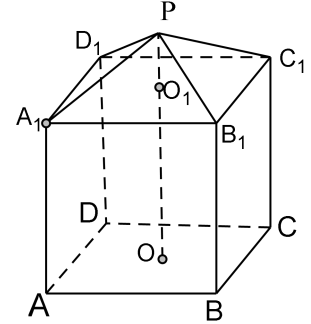
求证: (1) 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F ;

(2) 平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .



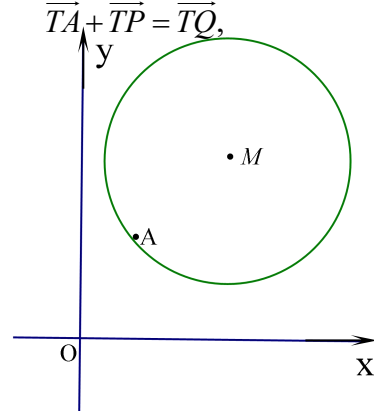
17. (本小题满分 14 分) 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$, 下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 PO 是正四棱锥的高 PO_1 的四倍.

- (1) 若 $AB = 6m, PO_1 = 2m$, 则仓库的容积是多少?
- (2) 若正四棱柱的侧棱长为 $6m$, 则当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?



18. (本小题满分 16 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 M : $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$ 及其上一点 $A(2, 4)$

- (1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 求圆 N 的标准方程;
- (2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B, C 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 l 的方程;
- (3) 设点 $T(t, 0)$ 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q , 使求 实数 t 的取值范围.



19. (本小题 16 分) 已知函数 $f(x) = a^x + b^x (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1)$

(1) 设 $a=2, b=\frac{1}{2}$

①求方程 $f(x)=2$ 的根;

②若对任意 x , 不等式 $f(2x) \geq mf(x) - 6$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(2) 若 $0 < a < 1, b > 1$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有一个零点, 求 ab 的值.

20. (本小题满分 16 分) 记 $U = \{1, 2, \dots, 100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 和 U 的子集 T , 若 $T = \emptyset$

定义 $S_T = 0$; 若 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 定义 $S_T = \{a_{t_1}, a_{t_2} + \dots + a_{t_k}\}$

例如 $T = \{1, 3, 66\}$ 时 $S_T = a_1 + a_3 + a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且当 $T = \{2, 4\}$ 时, $S_T = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 $k (1 \leq k \leq 100)$, 若 $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. 求证: $S_T < a_{k+1}$

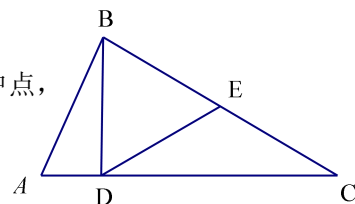
(3) 设 $C \subseteq U, D \subseteq U, S_C \geq S_D$, 求证: $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

数学 II (附加题)

21. 【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题, 请选定其中两小题, 若多做, 则按作答的前两小题评分.

A. 【选修 4—1 几何证明选讲】(本小题满分 10 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD \perp AC$, D 为垂足, E 是 BC 的中点, 求证: $\angle EDC = \angle ABD$.



B. 【选修 4—2: 矩阵与变换】(本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 的逆矩阵 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 AB .

C. 【选修4—4: 坐标系与参数方程】(本小题满分10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 椭圆 C 的

参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 设直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 求线段 AB

的长.

D. 设 $a > 0$, $|x-1| < \frac{a}{3}$, $|y-2| < \frac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4| < a$.

【必做题】第22题、第23题, 每题10分, 共计20分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分10分)

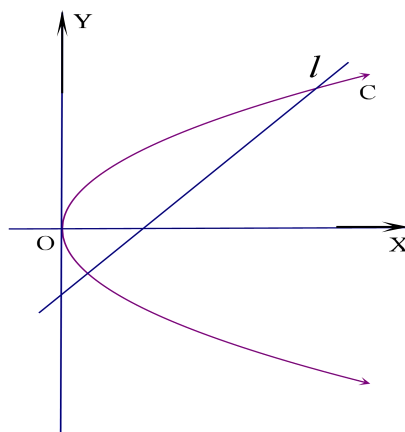
如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: x-y-2=0$, 抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$.

(1) 若直线 l 过抛物线 C 的焦点, 求抛物线 C 的方程;

(2) 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q .

①求证: 线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p, -p)$;

②求 p 的取值范围.



23. (本小题满分10分)

(1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值;

(2) 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq m$, 求证:

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}.$$

解答

填空题：每小题 5 分，共 70 分.

1. 已知集合 $A = \{-1, 2, 3, 6\}$, $B = \{x | -2 < x < 3\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 2\}$.

2. 复数 $z = (1+2i)(3-i)$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的实部是 5 .

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦距是 $2\sqrt{10}$.

4. 已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是 0.1 .

5. 函数 $y = \sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是 $[-3, 1]$.

6. 如图是一个算法的流程图, 则输出的 a 的值是 9 .

7. 将一颗质地均匀的骰子 (一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和小于 10 的概率是 $\frac{5}{6}$.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1 + a_2 = -3$, $S_5 = 10$, 则 a_9 的值是 20 .

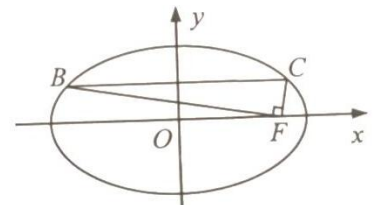
9. 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y = \sin 2x$ 的图象与 $y = \cos x$ 的图象的交点个数是 7 .

解: $Y = 2\sin x \cos x = \cos x$, $\cos x = 0$, 或 $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$,

10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的右焦点, 直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC = 90^\circ$

, 则该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



第 10 题

解: 设 $C(m, \frac{b}{2})$, $B(-m, \frac{b}{2})$. B 在椭圆上: $b^2 m^2 + a^2 \times (\frac{b}{2})^2 = a^2 b^2$, ①

$\angle BFC = 90^\circ$: $CF^2 + BF^2 = 4m^2$, $(m-c)^2 + (\frac{b}{2})^2 + (-m-c)^2 + (\frac{b}{2})^2 = 4m^2$ ②

由①②消去 m , 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0, \\ \left| \frac{2}{5} - x \right|, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$ 其中

$a \in \mathbf{R}$. 若 $f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2})$, 则 $f(5a)$ 的值是 $-\frac{2}{5}$.

解: $f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + a$, $f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \left| \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{10}$. $-\frac{1}{2} + a = \frac{1}{10}$, $a = \frac{3}{5}$

$$f(5a)=f(3)=f(1)=f(-3)=f(-1)=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$$

12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-2y+4 \geq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \\ 3x-y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的取值范围是 $[\frac{4}{5}, 13]$ _____.

解: 将不等式组改写为 $y \leq \frac{1}{2}x+2$, $y \geq -2x+2$, $y \leq 3x-3$ 。

可行域为图中三条直线所围成的三角形区域 (含边界)。

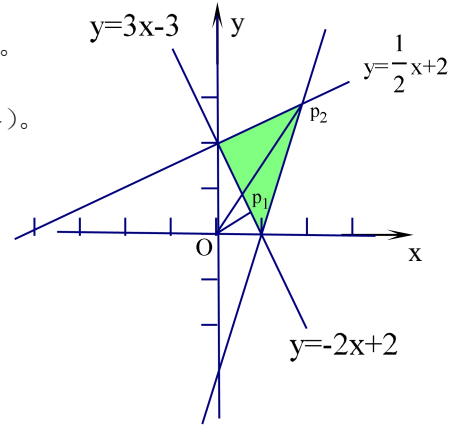
设满足条件的点为 $P(x, y)$, 则 $x^2+y^2=OP^2$ 。

OP 的最小值为 O 到直线 $2x+y-2=0$ 的距离 OP_1 ,

OP 的最大值为 O 到点 P_2 的距离 OP_2 ,

$$OP_1 = \frac{|-2 \times 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad OP_2^2 = \frac{4}{5}$$

解得点 P_2 的坐标为 $(2, 3)$, $OP_2^2=13$



13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$,

则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 $-\frac{7}{8}$ _____.

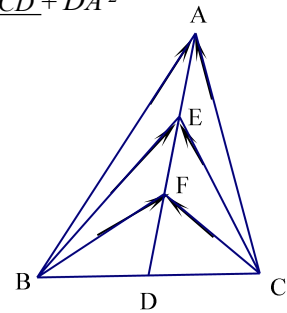
解: $\therefore \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}^2 \\ &= -\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA})(-\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}) \\ &= -\overrightarrow{BD}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{DA}^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } \overrightarrow{DA}^2 = \frac{45}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA})(-\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}) = -\overrightarrow{BD}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{DA}^2 \\ &= -\overrightarrow{BD}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{DA}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = -1 + \frac{1}{3} \times \frac{45}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$



14. 在锐角三角形 ABC 中, 若 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是 8 _____.

解: 由已知 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 得 $\sin(B+C) = 2\sin B \sin C$, $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2\sin B \sin C$,

$$\frac{\cos C}{\sin C} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2, \quad \frac{1}{\tan C} + \frac{1}{\tan B} = 2, \quad \tan B + \tan C = 2 \tan B \tan C$$

$\therefore A, B, C$ 都是锐角,

$$\therefore \tan A \tan B \tan C = -\tan(B+C) \tan B \tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \times \tan B \tan C = \frac{2 \tan^2 B \tan^2 C}{\tan B \tan C - 1} > 0$$

$$\therefore \tan B \tan C > 1. \quad \text{令 } \tan B \tan C = m > 1, \text{ 则 } \tan A \tan B \tan C = \frac{2m^2}{m-1}.$$

问题变为求 $\frac{2m^2}{m-1}$ ($m > 1$) 最小值。方法多样。令 $M = \frac{2m^2}{m-1}$ 。

法一 $M = \frac{2m^2}{m-1} = \frac{2m^2 - 2m + 2m - 2 + 2}{m-1} = 2m + 2 + \frac{2}{m-1} = 2(m-1) + 4 + \frac{2}{m-1} \geq 8$, 当 $m=2$ 时, 取等号, 故 M 最小值为 8。

法二 $M = \frac{2m^2}{m-1} = \frac{2}{-\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}}$, 当 $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, 即 $m=2$ 时, M 最小值为 8。

法三 判别式法 $mM - M = 2m^2$, $2m^2 - Mm + M = 0$, $\Delta = M^2 - 8M \geq 0$, $M \geq 8$,

$M=8$ 时, 方程 $2m^2 - Mm + M = 0$, 为 $m^2 - 4m + 4 = 0$, $m=2$, 符合 $m \geq 1$, $\therefore M$ 最小值为 8。

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共 90 分)

15. (本小题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $C = \frac{\pi}{4}$.

(1) 求 AB 的长; (2) 求 $\cos(A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

解: (1) $\because \cos B = \frac{4}{5}$, $\therefore B$ 为锐角, $\therefore \sin B = \frac{3}{5}$. 据正弦定理有 $\frac{AB}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AC}{\sin B}$,

$$\therefore AB = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{3}{5} = 5\sqrt{2}.$$

$$(2) \cos A = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\therefore \cos(A - \frac{\pi}{6}) = \cos A \cos \frac{\pi}{6} + \sin A \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{2} - \sqrt{6}}{20}$$

16. (本小题满分 14 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D \perp A_1F$, $A_1C_1 \perp A_1B_1$.

求证: (1) 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F ;

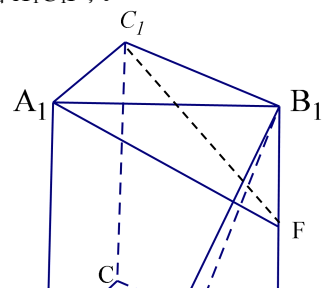
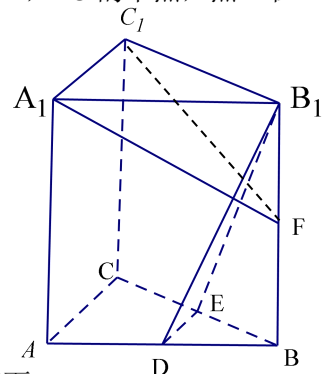
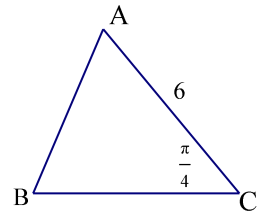
(2) 平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .

证明 (1) $\because D, E$ 分别为 AB, BC 的中点,

$$\therefore DE \parallel AC \parallel A_1C_1,$$

$A_1C_1 \subseteq$ 平面 A_1C_1F ; DE 在平面 A_1C_1F 外, \therefore 直线 $DE \parallel$ 平面 A_1C_1F 。

(2) 已知 $B_1D \perp A_1F$. ①



$\because A_1C_1 \perp A_1B_1, A_1C_1 \perp A_1A_1, \therefore A_1C_1 \perp \text{平面 } ABB_1A_1,$

$\therefore A_1C_1 \perp B_1D.$ ②

A_1F, A_1C_1 是平面 A_1C_1F 内二相交直线,

据①②得 $B_1D \perp \text{平面 } A_1C_1F.$

平面 B_1DE 经过 $B_1D, \therefore \text{平面 } B_1DE \perp \text{平面 } A_1C_1F.$

[亦可证明 $B_1D \perp DE$, 从而 $B_1D \perp A_1C_1$, 又 $B_1D \perp A_1F,$

$\therefore B_1D \perp \text{平面 } A_1C_1F. \therefore \text{平面 } B_1DE \perp \text{平面 } A_1C_1F.$

下面证明 $B_1D \perp DE$: 直角 $\angle B_1BD, \angle BDE$

$B_1D^2 + DE^2 = (\underline{DB}^2 + \underline{BB_1}^2) + DE^2 = [(\underline{BE}^2 - \underline{DE}^2) + (\underline{B_1E}^2 - \underline{BE}^2)] + DE^2 = B_1E^2, \therefore B_1D \perp DE.]$

17. (本小题满分 14 分) 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部分的形状是正四棱锥

$P-A_1B_1C_1D_1$, 下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的

高 PO 是正四棱锥的高 PO_1 的四倍.

(1) 若 $AB = 6m, PO_1 = 2m$, 则仓库的容积是多少?

(2) 若正四棱柱的侧棱长为 6m, 则当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?

解 (1) 容积为下部正四棱柱的容积与上部正四棱锥的容积的和=

$$6^2 \times 4 + 2 \times \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 6^2 \times 2 \times \left(4 + \frac{1}{3}\right) = 312 \text{ (m}^2\text{)}$$

(2) 设 $PO_1 = x \text{ m}$. 则 $A_1O_1 = \sqrt{6^2 - x^2}$, ($0 < x < 6$)

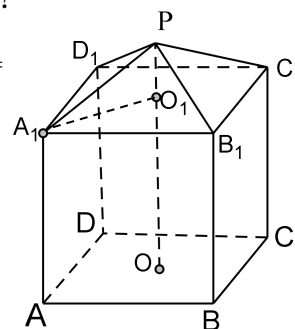
$$A_1B_1 = \sqrt{2 \times (6^2 - x^2)}$$

$$\begin{aligned} V &= 2 \times (36 - x^2) \times 4x + \frac{1}{3} \times 2 \times (36 - x^2)x = 2 \times (36 - x^2)x \times \left(4 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{26}{3} (-x^3 + 36x) \end{aligned}$$

$$V' = -26x^2 + 12 \times 26 = 26 \times (-x^2 + 12). \quad x = 2\sqrt{3} \text{ 时}, V' = 0$$

当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $V' > 0$, V 是单调增函数, $2\sqrt{3} < x < 6$ 时, $V' < 0$, V 是单调减函数, 所以当

$x = 2\sqrt{3} \text{ m}$ 时, 库容 V 取得最大值.



18. (本小题满分 16 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 $M: x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$ 及其上一点 $A(2, 4)$.

(1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x = 6$ 上, 求圆 N 的标准方程;

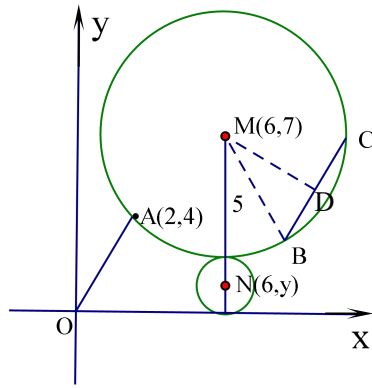
(2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B、C 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 l 的方程;

(3) 设点 T (t, 0) 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q, 使得 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$ 求实数 t 的取值范围。

解: (1) M: $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$, 圆心 M(6, 7)

\because 圆 N 的圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 设 N 圆圆心为 N(6, y), 又圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切。 $\therefore 2y=7-5, y=1$ 。故圆 N 的标准方程为: $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 1$ 。

(2)



$$BC = OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$\because BC \parallel OA, \therefore k_{BC} = k_{OA} = 2$. 设直线 BC 的方程为 $y=2x+b$, 作 $MD \perp BC$ 于 D. $MD=5, BD=\sqrt{5}$.

$$\therefore MD = \sqrt{MB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{又 } MD = \frac{|2 \times 6 - 7 + b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}, \quad |5+b|=10, \quad \therefore b=5, -15$$

\therefore 直线 l 的方程有两解: $y=2x+5$ 或 $y=2x-15$ 。

(3) T(t, 0), A(2, 4). 设 P(x₁, y₁), Q(x₂, y₂).

由 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$. 得 $(2-t, 4) + (x_1-t, y_1) = (x_2-t, y_2)$, 于是 $2-t+x_1-t=x_2-t$ 且 $4+y_1=y_2$,

$\therefore x_2=x_1-t+2$, 且 $y_2=y_1+4$. \because 点 Q(x₂, y₂) 在圆 M 上, $\therefore (x_1-t+2-6)^2 + (y_1+4-7)^2 = 25$,

即 $(x_1-t-4)^2 + (y_1-3)^2 = 25$, 这说明点 P(x₁, y₁) 在以点 N(t+4, 3) 为圆心, 5 为半径的圆 N 上。

又点 P(x₁, y₁) 在以点 M(6, 7) 为圆心, 5 为半径的圆 M 上。即点 P(x₁, y₁) 为圆 M 与圆 N 的交点。

$\therefore 5-5 \leq |MN| \leq 5+5, \therefore 0 \leq (t+4-6)^2 + (3-7)^2 \leq 100, (t-2)^2 \leq 84,$

$$\therefore -2-2\sqrt{21} \leq t \leq 2+2\sqrt{21}$$

18 (本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = a^x + b^x (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1)$

(1) 设 $a=2, b=\frac{1}{2}$,

① 求方程 $f(x) = 2$ 的根。

② 若对任意 $x \in R$ 不等式 $f(2x) \geq m f(x) - 6$ 恒成立, 求实数 m 的最大值。

(2) 若 $0 < a < 1, b > 1$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有 1 个零点, 求 ab 的值。

解: (1) ① 方程 $f(x) = 2$, 即方程 $2^x + (\frac{1}{2})^x = 2, 2^{2x} - 2 \times 2^x + 1 = 0, (2^x - 1) = 0, \therefore x = 0$.

$$\text{② } 2^{2x} + 2^{-2x} \geq m(2^x + 2^{-x}) - 6, (2^{2x} + 2^{-2x})^2 - 2 \geq m(2^x + 2^{-x}) - 6,$$

$$m \leq (2^x + 2^{-x}) + \frac{4}{2^x + 2^{-x}}, \quad \text{而 } (2^x + 2^{-x}) + \frac{4}{2^x + 2^{-x}} \geq 2 \times 2 = 4,$$

当 $2^x + 2^{-x} = \frac{4}{2^x + 2^{-x}}$, $2^x + 2^{-x} = 2$, $x=0$ 时, 取等号, 故 $m \leq 4$, 即 m 最大是 4。

20. (本小题满分 16 分) 记 $U = \{1, 2, \dots, 100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 和 U 的子集 T , 若 $T = \emptyset$

定义 $S_T = 0$; 若 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 定义 $S_T = \{a_{t_1}, a_{t_2} + \dots + a_{t_k}\}$

例如 $T = \{1, 3, 66\}$ 时 $S_T = a_1 + a_3 + a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且当 $T = \{2, 4\}$ 时, $S_T = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 $k (1 \leq k \leq 100)$, 若 $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. 求证: $S_T < a_{k+1}$

(3) 设 $C \subseteq U, D \subseteq U, S_C \geq S_D$, 求证: $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

解: (1) $S_T = 30 = a_2 + a_4 = a_1 \times 3 + a_1 \times 3^3 = 30a_1$, $\therefore a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1}$.

$$(2) S_T \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2} < 3^k, \quad \therefore S_T < a_{k+1}.$$

(3) 1) 若 $C \cap D = \emptyset$, 设 C, D 中最大的数分别是 k, m .

已知 $S_C \geq S_D$. 由 (2) 知 $S_C \leq a_{k+1}$,

$$\therefore 3^{m-1} = a_m \leq S_D \leq S_C < a_{k+1} = 3^k, \quad \therefore m-1 < k, \quad m \leq k, \quad \therefore m \neq k, \quad \therefore m < k, \quad m \leq k-1,$$

$$\therefore S_D \leq 1 + 2 + \dots + 3^m = \frac{3^{m+1} - 1}{2} \leq \frac{3^{k-1} - 1}{2} \leq \frac{a_k - 1}{2} \leq \frac{S_C - 1}{2}$$

$$\therefore S_C \geq 2S_D + 1, \quad \therefore S_C > 2S_D.$$

2) 若 $C \cap D \neq \emptyset$

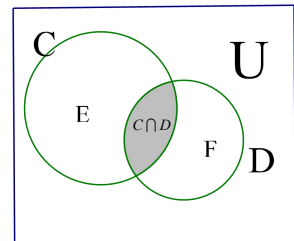
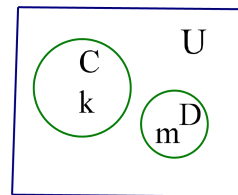
① 若 $C = D$, 则 $S_C + S_{C \cap D} = 2S_C \geq 2S_D$.

② 若 $C \neq D$, 设 $E = C - C \cap D$, $F = D - C \cap D$, $\therefore E \cap F = \emptyset$,

由 1) 知 $S_E > 2S_F$.

$$\therefore S_C + S_{C \cap D} = S_E + 2S_{C \cap D} > 2S_F + 2S_{C \cap D} = 2S_D.$$

3) 综合 1) 2) 得 $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.



数学 II（附加题）

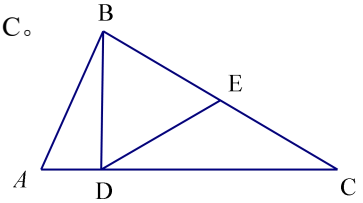
21. 【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，若多做，则按作答的前两小题评分。

A. 【选修 4—1 几何证明选讲】（本小题满分 10 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $BD \perp AC$ ， D 为垂足， E 是 BC 的中点，求证： $\angle EDC=\angle ABD$ 。

证明： $\because E$ 为直角 $\triangle BDC$ 的 BC 边上中点， $\therefore ED=EC$ ， $\angle EDC=\angle C$ 。

$\angle ABD$ 与 $\angle C$ 都是 $\angle A$ 的余角， $\angle EDC=\angle C=\angle ABD$ 。



B. 【选修 4—2：矩阵与变换】（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，矩阵 B 的逆矩阵 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求矩阵 AB 。

$$\text{解：设 } B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ 则 } BB^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\frac{1}{2}a+2c \\ b & -\frac{1}{2}b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a=1, b=0, -\frac{1}{2}a+2c=0, -\frac{1}{2}b+2d=1, \text{ 解得 } c=\frac{1}{4}, d=\frac{1}{2}. \therefore B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

C. 【选修 4—4：坐标系与参数方程】（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，椭圆 C 的

参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)。设直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，求线段 AB

的长。

解：椭圆 C 的普通方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ，将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ，

$$\frac{1}{2}t - \frac{(\frac{\sqrt{3}t}{2})^2}{4}$$

$$\frac{16}{7}$$

得

$$(1+t)^2 + \dots = 1, \text{ 化简为 } 7t^2 + 16t = 0, \text{ 解得 } t = -\frac{16}{7}, t = 0.$$

$$\therefore AB = \left| -\frac{16}{7} - 0 \right| = \frac{16}{7}$$

D. 设 $a > 0$, $|x-1| < \frac{a}{3}$, $|y-2| < \frac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4| < a$.

$$\text{解: } |2x-2| < \frac{2a}{3}, \therefore |2x+y-4| \leq |2x-2| + |y-2| < \frac{2a}{3} + \frac{a}{3} = a.$$

【必做题】第 22 题、第 23 题, 每题 10 分, 共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: x-y-2=0$, 抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$.

(1) 若直线 l 过抛物线 C 的焦点, 求抛物线 C 的方程;

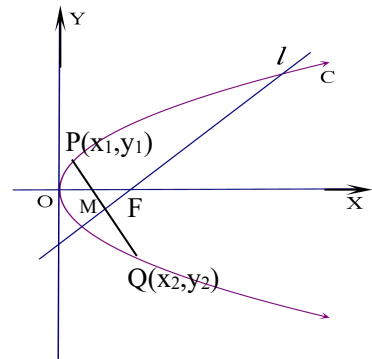
(2) 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q .

①求证: 线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p, -p)$;

②求 p 的取值范围.

解 (1) C 的焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 在直线 $l: x-y-2=0$ 上:

$$\frac{p}{2} - 0 - 2 = 0, p = 4, \therefore \text{抛物线 } C \text{ 的方程是 } y^2 = 8x.$$



(2) ①设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. $\because P, Q$ 关于直线 l 对称, $\therefore PQ \perp l$,

线段 PQ 为直线 l 平分, 设 PQ 中点 $M(m, n)$, $\therefore M$ 在 l 上, 则 $n = m - 2$.

$$\text{由 } y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2, \text{ 相减得 } y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2), \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1 - x_2} = 2p, k_{PQ} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -k_l = -1,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -2p, \therefore n = \frac{y_1 + y_2}{2} = -p, m = n + 2 = 2 - p. \text{ 即线段 } PQ \text{ 的中点坐标为 } (2-p, -p).$$

② PQ 方程为 $y - n = -(x - m)$, 即 $y = -x + m + n$, 即 $y = -x + 2 - 2p$. $\because PQ$ 与 C 必交于 P, Q 相异

两点, \therefore 由 PQ 与 C 联立所得二次方程 $(-x + 2 - 2p)^2 = 2px$ 一定有相异二实根, 将该方程化

$$\text{为标准形式: } x^2 - 2(2-p)x + (2-2p)^2 = 0,$$

$$\text{其判别式 } \Delta = 4(2-p)^2 - 4(2-2p)^2 > 0, p(4-3p) > 0, \therefore 0 < p < \frac{4}{3}$$

23. (本小题满分 10 分)

(1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值;

(2) 设 $m, n \in \mathbf{N}^*, n \geq m$, 求证:

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}.$$

解: (1) $7C_6^3 - 4C_7^4 = 7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} - 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = 140 - 140 = 0.$

证一 $\because (m+k)C_{m+k-1}^m = \frac{(m+k)(m+k-1)!}{m!(k-1)!} = (m+1) \times \frac{(m+k)!}{(m+1)!(k-1)!} = (m+1)C_{m+k}^{m+1}$

$$(k=1, 2, \cdots, n-m, n-m+1)$$

$$\therefore \text{左边} = (m+1)(C_{m+1}^{m+1} + C_{m+2}^{m+1} + C_{m+3}^{m+1} + \cdots + C_n^{m+1} + C_{n+1}^{m+1})$$

$$= (m+1)(C_{m+2}^{m+2} + C_{m+2}^{m+1} + C_{m+3}^{m+1} + \cdots + C_n^{m+1} + C_{n+1}^{m+1})$$

$$= (m+1)(C_{m+3}^{m+2} + C_{m+3}^{m+1} + \cdots + C_n^{m+1} + C_{n+1}^{m+1})$$

$$= (m+1)(C_{m+4}^{m+2} + C_{m+4}^{m+1} + \cdots + C_n^{m+1} + C_{n+1}^{m+1})$$

$$= \cdots$$

$$= (m+1)C_{n+2}^{m+2} = \text{右边。 命题得证。}$$

证二 用数学归纳法

令 $n=m+k$ ($k \in \mathbf{N}$)

$$\text{即证 } (m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + (m+k)C_{m+k-1}^m + (m+k+1)C_{m+k}^m$$

$$= (m+1)C_{m+k+2}^{m+2}$$

$$k=0, m=n \text{ 时, 左边} = (m+1)C_m^m = (m+1), \text{右边} = (m+1)C_{m+2}^{m+2} = (m+1), \text{左边} = \text{右边, 命题成立。}$$

$$k>0, n>m \text{ 时, 当 } k=1 \text{ 时, 左边} = (m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m = (m+1) + (m+2)(m+1) = (m+1)(m+3)$$

$$\text{右边} = (m+1)C_{m+3}^{m+2} = (m+1)C_{m+3}^1 = (m+1)(m+3)$$

左边=右边, 命题成立。

假设当 $k=s$ ($s \in \mathbf{N}^*$), $n=m+s$ 时, 命题成立, 即

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + (m+s)C_{m+s-1}^m + (m+s+1)C_{m+s}^m$$

$$= (m+1)C_{m+s+2}^{m+2},$$

则当 $k=s+1, n=m+s+1$ 时,

$$(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + (m+s)C_{m+s-1}^m + (m+s+1)C_{m+s}^m$$

$$\begin{matrix} m \\ m+s+1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m+2 \\ m+s+2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m \\ m+s+1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
& + (m+s+2)C_{m+s+2}^{m+1} = (m+1)C_{m+s+2}^{m+1} + (m+s+2)C_{m+s+2}^m \\
& = \frac{(m+1)(m+s+2)!}{(m+2)!s!} + \frac{(m+s+2)(m+s+1)!}{m!(s+1)!} \\
& = \frac{(m+s+2)!}{m!s!} \left(\frac{1}{m+2} + \frac{1}{s+1} \right) \\
& = \frac{(m+s+2)!}{m!s!} \times \frac{m+s+3}{(m+2)(s+1)} = \frac{(m+1)(m+s+3)!}{(m+2)!(s+1)!} \\
& = (m+1)C_{m+s+3}^{m+1} = \text{右边。命题亦成立。}
\end{aligned}$$

综上所述，命题得证。