

# 2022-2023年度第二届全国大学生奥林匹克数学竞赛

## (数学类)

### 比赛纲要

#### 数学分析部分

##### 一、集合与函数

1. 关于实数集的一些基本定理(确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理、闭矩形套定理、聚点定理、有限覆盖定理)。
2. 函数、映像、变换的概念。
3. 隐函数、反函数与逆变换的概念,反函数存在性定理。

##### 二、极限与连续

1. 数列极限、收敛数列的基本性质。
2. 一元函数极限的定义、函数极限的基本性质及计算。
3. Cauchy收敛准则。
4. 无穷小量与无穷大量、阶的比较。
5. 多元函数的重极限与累次极限概念及性质。
6. 函数的连续性、一致连续性,连续函数的局部性质,有界闭集上连续函数的性质。

##### 三、一元函数微分学

1. 导数的计算,可微与可导的关系。
2. 微分学的基本定理(Fermat定理, Rolle定理, Lagrange定理, Cauchy定理, Taylor公式)。
3. 函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图像的讨论、洛必达(L'Hospital)法则、近似计算。

##### 四、一元函数积分学

1. 不定积分的基本计算方法。

2. 定积分的可积条件、可积函数类。
3. 定积分的性质、变上限积分函数
4. 微分学的基本定理(微积分基本定理、Newton-Leibniz公式及定积分计算、定积分第二中值定理)。
5. 广义积分的收敛性判别法。

## 五、常微分方程

1. 常微分方程的基本概念。
2. 分离变数法、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、可降级的高阶微分方程。
3. 线性微分方程解的性质及解的结构定理。
4. 常系数齐次线性微分方程。
5. 常系数非齐次线性微分方程。
6. 欧拉方程。
7. 微分方程的简单应用。

## 六、向量代数和空间解析几何

1. 向量的概念与运算、向量的数量积和矢量积、向量的混合积。
2. 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程。
3. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离。
4. 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形。
5. 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

## 七、多元函数微分学

1. 偏导数、全微分及其几何意义, 可微与偏导存在、连续之间的关系。
2. 复合函数的偏导数与全微分。
3. 一阶微分形式不变性, 方向导数与梯度, 高阶偏导数, 混合偏导数与顺序无关性, 二元函数中值定理与Taylor公式。
4. 隐函数存在定理、隐函数组存在定理、隐函数(组)求导方法、反函数组与坐标变换。
5. 几何应用。

6. 极值问题, 条件极值与Lagrange乘数法。

## 八、多元函数积分学

1. 二重积分及其几何意义、二重积分的计算。
2. 三重积分、三重积分计算。
3. 重积分的应用。
4. 含参量正常积分及其连续性、可微性、可积性, 运算顺序的可交换性。
5. 含参量广义积分的一致收敛性及其判别法, 含参量广义积分的连续性、可微性、可积性, 运算顺序的可交换性。
6. 第一型曲线积分、曲面积分的概念、基本性质、计算。
7. 第二型曲线积分概念、性质、计算, Green公式, 平面曲线积分与路径无关的条件。
8. 曲面的侧、第二型曲面积分的概念、性质、计算, Gauss公式、Stoke公式, 两类线积分、两类面积分之间的关系。

## 九、无穷级数

1. 级数及其敛散性, 级数的和, Cauchy准则, 收敛的必要条件, 收敛级数基本性质。
2. 正项级数收敛的充分必要条件, 比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式。
3. 交错级数的Leibniz判别法。
4. 一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、Abel判别法、Dirichlet判别法。
5. 级数的绝对收敛与条件收敛。
6. 函数列与函数项级数的一致收敛性、Cauchy准则、一致收敛性判别法、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用。
7. 幂级数概念、Abel定理、收敛半径与区间, 幂级数的一致收敛性。
8. 幂级数的逐项可积性、可微性及其应用。
9. 幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、Taylor级数、Maclaurin级数。
10. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlet)定理、函数在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶级数、函数在 $[0, 1]$ 上的正弦级数和余弦级数。
11. 三角函数系的正交性、周期函数的Fourier级数展开、Bessel不等式、Riemann-Lebesgue定理、按段光滑函数的Fourier级数的收敛性定理。

## 线性代数部分

### 一、行列式

1. 行列式的概念、基本性质及计算。
2. 行列式按行(列)展开定理, 行列式的计算。
3. 范德蒙德(Vandermonde)行列式, 行列式的乘法规则。

### 二、矩阵

1. 矩阵的概念及运算, 单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质。
2. 矩阵的线性运算、矩阵乘法、矩阵转置以及它们的运算规律, 方阵的乘方与方阵乘积的行列式及其性质、矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系。
3. 逆矩阵的概念与性质、矩阵可逆的充分必要条件, 可逆矩阵与伴随矩阵的关系。
4. 矩阵的初等变换、初等矩阵的性质、矩阵的等价、矩阵的秩, 用初等变换求矩阵的秩和求逆矩阵的方法。
5. 分块矩阵及其运算与性质。

### 三、向量

1.  $n$  维向量、向量的线性组合与线性表示。
2. 向量组线性相关与线性无关的判别方法。
3. 向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念。
4. 向量组的等价, 矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系。
5.  $n$  维向量空间、子空间、基底、维数、向量的坐标。
6. 基变换与坐标变换, 过渡矩阵。
7. 内积的概念, 线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法。
8. 规范正交基、正交矩阵的概念与性质。

### 四、线性方程组

1. 高斯(Gauss)消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解。
2. 克拉默(Cramer)法则。
3. 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件, 非齐次线性方程组有解的充

分必要条件，线性方程组解的结构。

4. 齐次线性方程组的基础解系和通解。
5. 非齐次线性方程组解的结构及通解。

## 五、 矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量。
2. 相似矩阵的概念与性质，相似对角矩阵。

## 六、 二次型

1. 二次型及其矩阵表示，二次型的秩，合同矩阵与合同变换。
2. 正定二次型、正定矩阵及其判别法。
3. 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵。

# 解析几何部分

## 一、 向量与坐标

1. 向量线性运算。
2. 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算。
3. 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角。
4. 向量的数量积、矢量积和混合积的计算方法及应用。
5. 向量的应用。

## 二、 轨迹与方程

1. 曲面的普通方程、参数方程及其关系。
2. 空间曲线方程的普通形式、参数方程形式及其关系。
3. 球面的标准方程和一般方程，柱面方程。

## 三、 平面与空间直线

1. 平面方程、直线方程的各种形式。
2. 平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系。
3. 点、平面、直线之间的位置关系、距离与交角。
4. 两异面直线的公垂线方程。

#### 四、二次曲面

1. 柱面、锥面、旋转曲面的方程及性质，椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和性质，二次曲面的标准方程。
2. 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性
3. 单叶双曲面、双曲抛物面的直母线。
4. 直纹面方程、直线和动曲线的轨迹问题。

#### 五、二次曲线

1. 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线。
2. 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点。
3. 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径。
4. 二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根。