海洋工程波浪力学

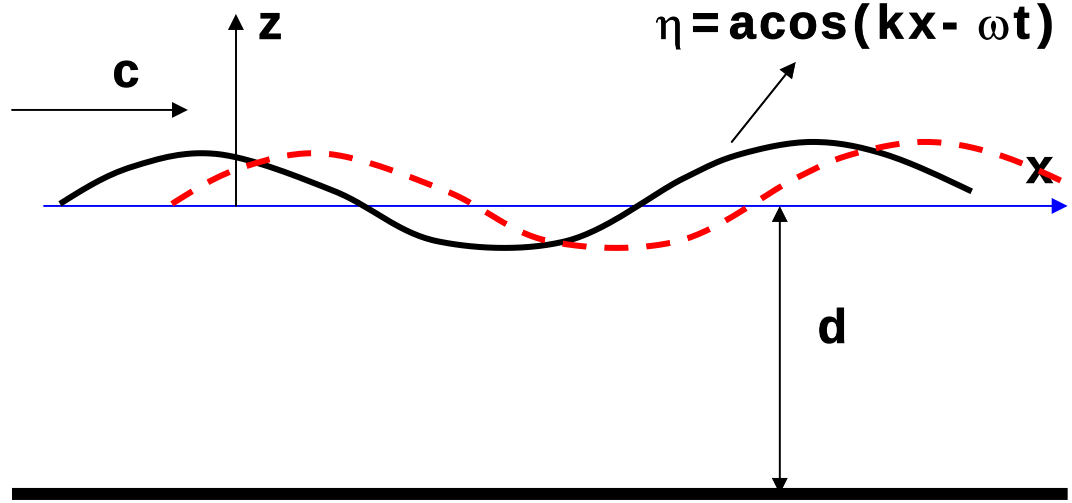
中国海洋大学工程学院海洋工程系
王树青

目 录

第二章 小振幅波（线性波）理论

- 2.1 常深度小振幅简单波动
  - 2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程
  - 2.1.2 二维小振幅推进波的速度势
  - 2.1.3 二维小振幅推进波的一些特性
- 2.2 常深度小振幅简单波动的迭加
  - 2.2.1 驻波
  - 2.2.2 波群
- 2.3 倾斜海底上波浪的传播
  - 2.3.1 波浪的浅水效应
  - 2.3.2 波浪的折射

2.1 常深度小振幅简单波动

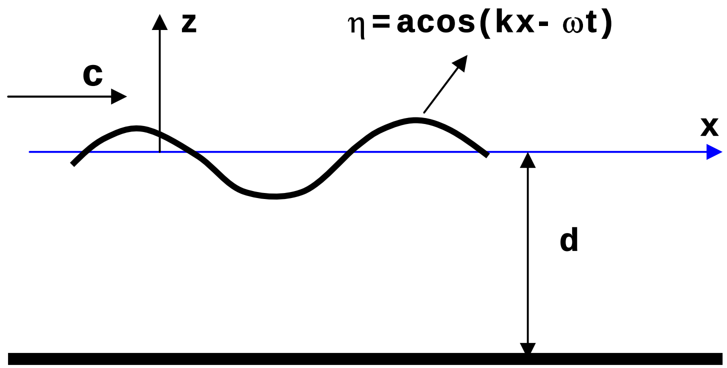


特点:

1. 水面呈现简谐形式的起伏;
2. 水质点以固定的圆频率作简谐振动;
3. 波形以一定的速度c向前传播
4. 波浪中线与静水面重合

2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

❖ 假定



（1）无粘不可压均匀流体;

（2）有势运动;

（3）重力是唯一外力;

（4）自由表面压强为大气压;

（5）海底为水平的固体边界;

（6）振幅或波高对波长为无限小（流体质点运动速度较小）——Airy波理论;

2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

边界条件的线性化

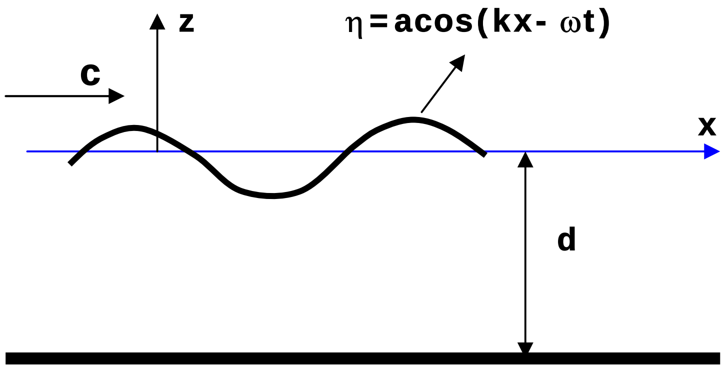
1. 自由表面的运动边界条件

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{z=\eta}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{z=\eta}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\cancel{\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\bigg|_{z=\eta}$$

小量

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}$$



2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

边界条件的线性化

2. 自由表面的动力边界条件

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}+\frac{1}{2}\left.\left(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right)\right|_{z=\eta}+g\eta=0$$

小量

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}+g\eta=0 \Rightarrow \eta=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}$$

2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

边界条件的线性化

运动边界条件

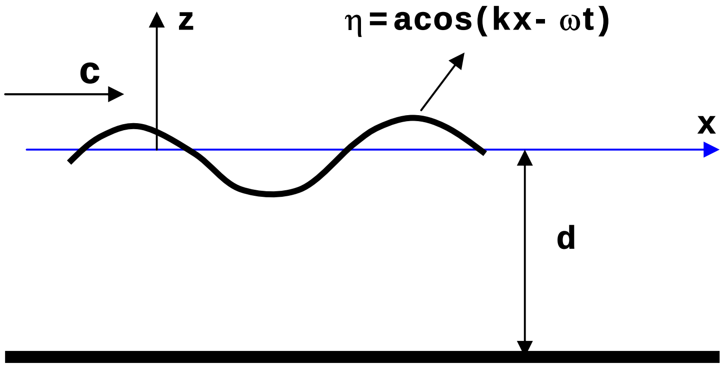
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}$$

动力边界条件

$$\eta=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\eta\frac{\partial}{\partial z}\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right|_{z=0}+\cdots$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0}+\eta\frac{\partial}{\partial z}\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right|_{z=0}+\cdots$$



2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

边界条件的线性化

运动边界条件

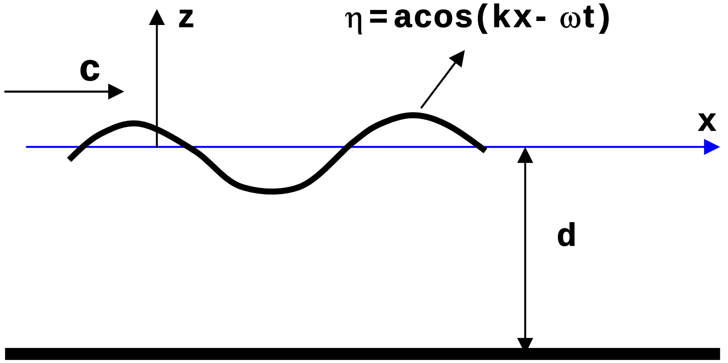
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

动力边界条件

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\bigg|_{z=0}=0$$

2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程



$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

$$u_z\big|_{z=-d}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d}=0$$

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}$$

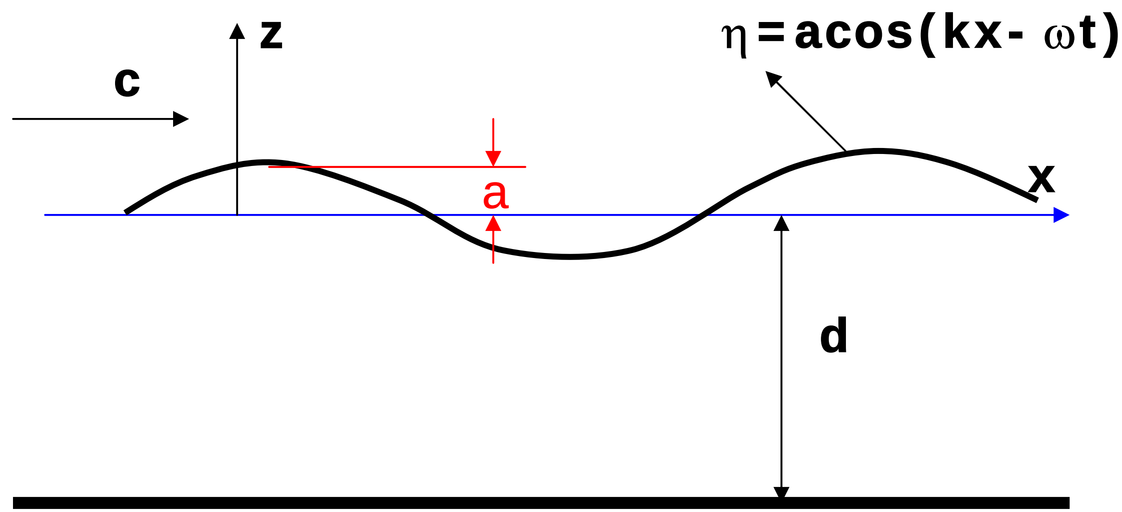
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0}=0$$

2.1.2二维小振幅推进波的速度势

一 波面方程的假定

$$\eta = a\cos(kx - \omega t)$$

其中a为振幅，a = H/2； kx−ωt=θ为波浪的相位。



2.1.2二维小振幅推进波的速度势

一 波面方程的假定

（1）当x增减一个波长L，波面η不变；

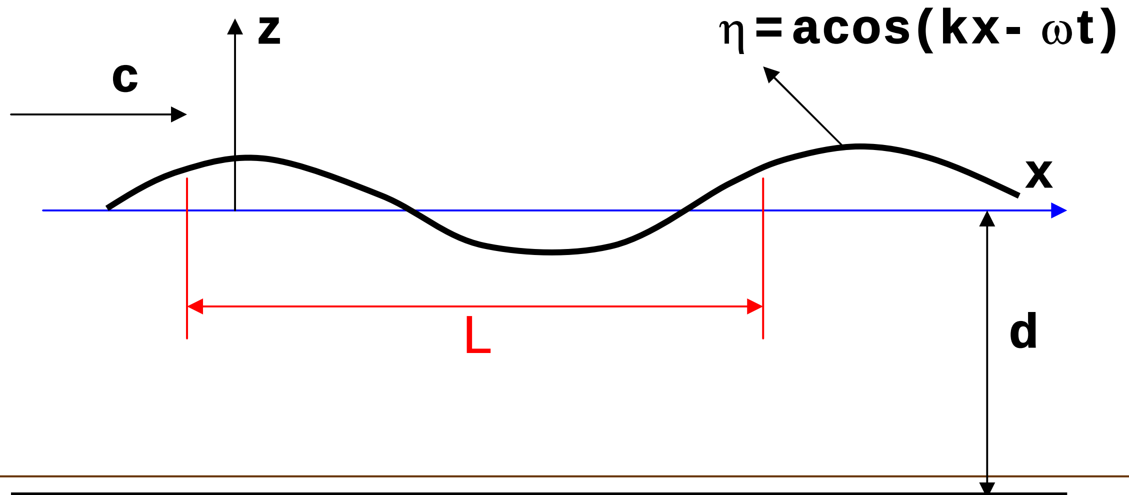
$$\eta\big|_{x} = \eta\big|_{x\pm L}$$

$$\Rightarrow a\cos(kx-\omega t) = a\cos[k(x+L)-\omega t]$$

$$\Rightarrow kL = 2\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{L}$$

波数



2.1.2二维小振幅推进波的速度势

一 波面方程的假定

（2）当t增减一个周期T，同一点的波面高度η不变；

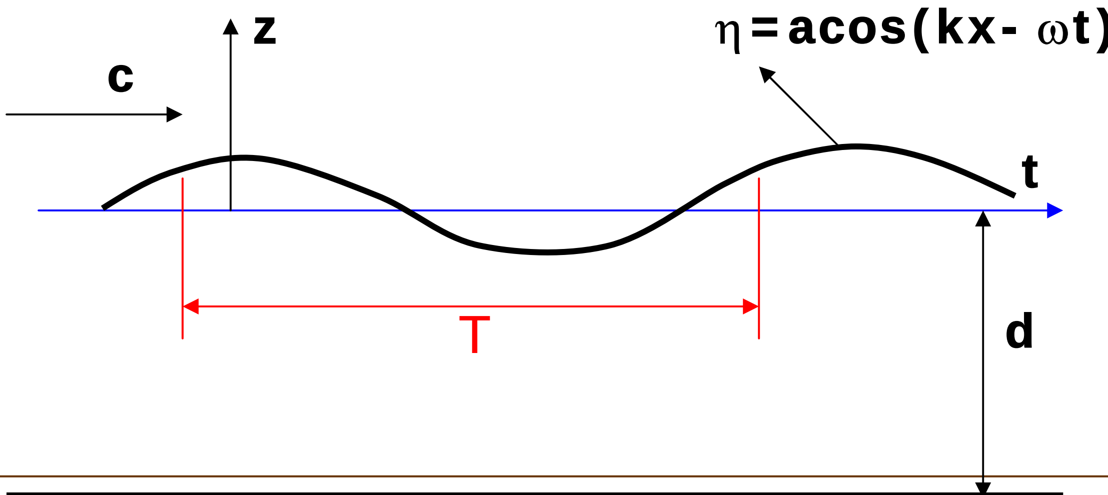
$$\eta\big|_t = \eta\big|_{t\pm T}$$

$$\Rightarrow a\cos(kx-\omega t) = a\cos[kx-\omega(t+T)]$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

圆频率



2.1.2二维小振幅推进波的速度势

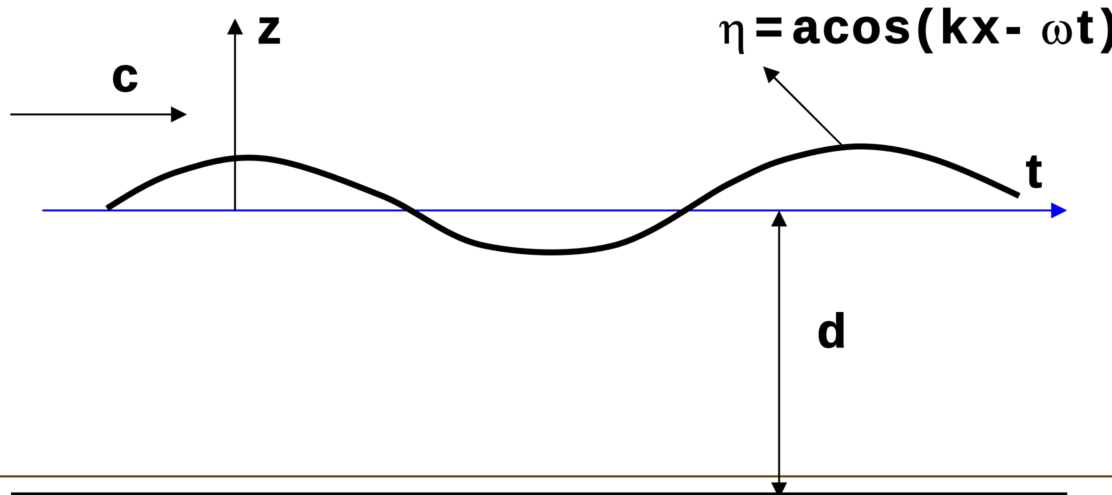
一 波面方程的假定

（3）波形的传播速度c—波速； $c=\dfrac{L}{T}=\dfrac{\omega}{k}$

说明；

（a） ωt 前面的采用负号（正号）代表波浪沿正（负）向传播；

（b）正、余弦形式不影响波形



2.1.2二维小振幅推进波的速度势

二 推进波的速度势

$$\varphi = A(z)\sin(kx-\omega t) \longrightarrow \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

$$\downarrow$$

$$A(z) = A_1e^{kz} + A_2e^{-kz} \longleftarrow A''(z) - k^2A(z) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\varphi = (A_1e^{kz} + A_2e^{-kz})\sin(kx-\omega t)$$

2.1.2二维小振幅推进波的速度势

二 推进波的速度势

$$\varphi=(A_1e^{kz}+A_2e^{-kz})\sin(kx-\omega t)$$

（1）海底边界条件

$$u_z\big|_{z=-d}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=-d}=0 \longrightarrow A_2=A_1e^{2kd}$$

$$\varphi=2A_1e^{-kd}\mathrm{ch}k(z+d)\sin(kx-\omega t)$$

2.1.2二维小振幅推进波的速度势

二 推进波的速度势

$$\varphi = 2A_1 e^{-kd} \operatorname{ch} k(z+d) \sin(kx - \omega t)$$

（2）自由表面运动边界条件

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0} \longrightarrow A_1 = \frac{gae^{kd}}{2\omega \operatorname{ch} kd}$$

$$\varphi = \frac{ga}{\omega}\frac{\operatorname{ch} k(z+d)}{\operatorname{ch} kd}\sin(kx - \omega t)$$

$$\varphi = \frac{gH}{2\omega}\frac{\operatorname{ch} k(z+d)}{\operatorname{ch} kd}\sin(kx - \omega t)$$

2.1.2二维小振幅推进波的速度势

二 推进波的速度势

- 特例：水深为无限的情况

$$\varphi=\frac{ga}{\omega}\boxed{\frac{\mathrm{ch}k(z+d)}{\mathrm{ch}kd}}\sin(kx-\omega t)$$

$$\rightarrow e^{kz}$$

$$\varphi=\frac{ga}{\omega}e^{kz}\sin(kx-\omega t)$$

$$\varphi=\frac{gH}{2\omega}e^{kz}\sin(kx-\omega t)$$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

一 波速和波长（弥散关系）

$$\varphi=\frac{ga}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(z+d)}{\mathrm{ch}kd}\sin(kx-\omega t)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0}$$

弥散关系

$$\omega^2=gk\,\mathrm{th}\,kd$$

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{th}\,kd}$$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

一 波速和波长（弥散关系）

深水：d/L>0.5, thkd=1	有限深度水深	浅水：d/L<0.05, thkd=kd
$\omega^2 = gk$	$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kd$	
$c_0 = \dfrac{gT}{2\pi}$	$c = \dfrac{gT}{2\pi}\mathrm{th}\,kd$	$c = \sqrt{gd}$
$L_0 = \dfrac{gT^2}{2\pi}$	$L = \dfrac{gT^2}{2\pi}\mathrm{th}\,kd$	$L = T\sqrt{gd}$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

一 波速和波长（弥散关系）

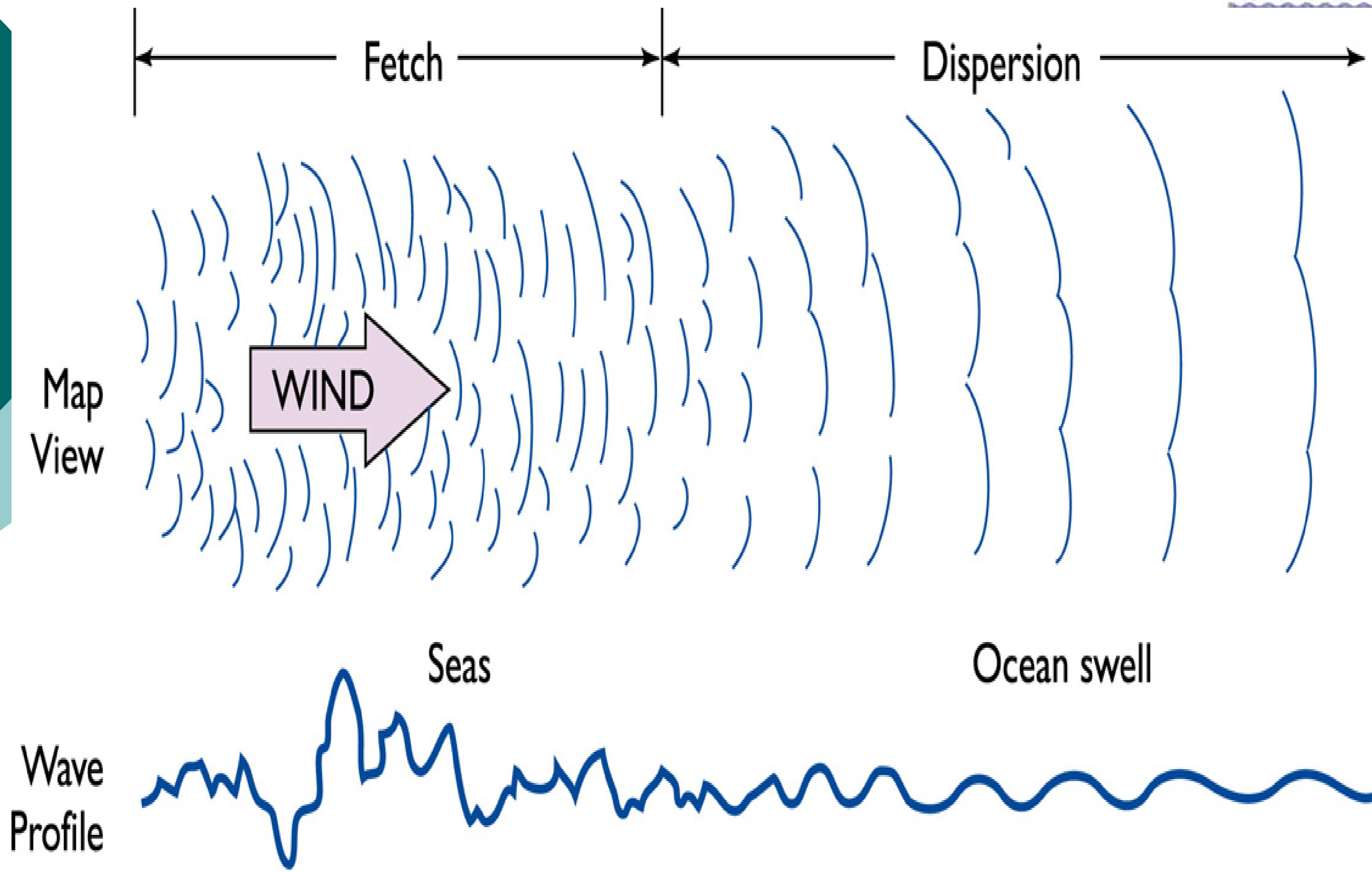
说明：

1. 弥散关系表达了波浪运动中角频率、波数k、水深d之间存在一定的关系；
2. 弥散现象：不同波长（或周期）的波以不同的速度进行传播最后导致波的分散现象；
3. 同时表明：波浪的传播与水深有关，水深变化，波长（波速）也随之变化；

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kd$$

$$c = \frac{gT}{2\pi}\,\mathrm{th}\;kd$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\,\mathrm{th}\,kd$$



(a) DEEP-WATER WAVE TRANSFORMATIONS

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

$$\varphi=\frac{gH}{2\omega}\frac{\mathrm{ch}k(z+d)}{\mathrm{ch}kd}\sin(kx-\omega t)$$

二 水质点的运动速度和加速度

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{gHk}{2\omega}\frac{\mathrm{ch}\,k(z+d)}{\mathrm{ch}\,kd}\cos(kx-\omega t)$$

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{gHk}{2\omega}\frac{\mathrm{sh}\,k(z+d)}{\mathrm{ch}\,kd}\sin(kx-\omega t)$$

$$u_x=\frac{\pi H}{T}\frac{\mathrm{ch}\,k(z+d)}{\mathrm{sh}\,kd}\cos(kx-\omega t)$$

$$u_z=\frac{\pi H}{T}\frac{\mathrm{sh}\,k(z+d)}{\mathrm{Sh}\,kd}\sin(kx-\omega t)$$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

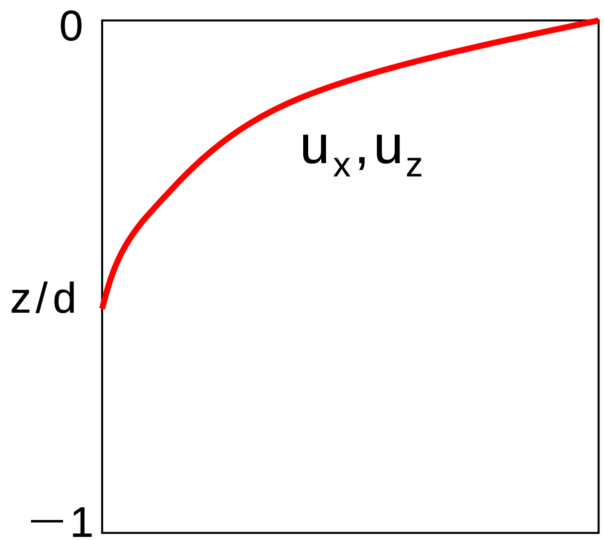
二 水质点的运动速度和加速度

- 特例：水深为无限的情况

$$\varphi = \frac{gH}{2\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

$$u_x = \frac{\omega H}{2} e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$u_z = \frac{\omega H}{2} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$



$$\eta = a\cos(kx - \omega t)$$

$$u_x = \frac{\pi H}{T}\frac{\mathrm{ch}k(z+d)}{\mathrm{sh}kd}\cos(kx-\omega t) \qquad u_z = \frac{\pi H}{T}\frac{\mathrm{sh}k(z+d)}{\mathrm{sh}kd}\sin(kx-\omega t)$$

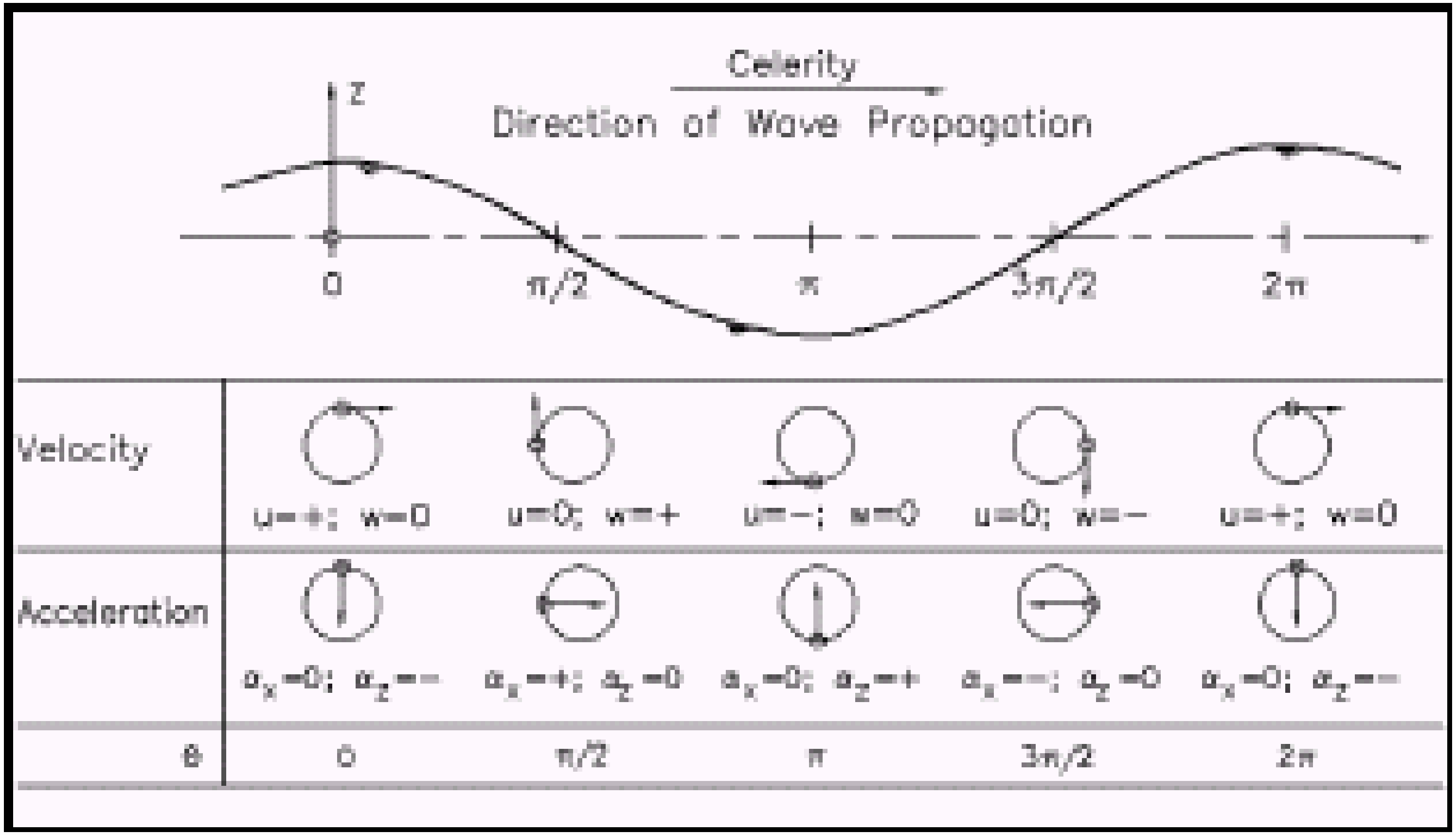
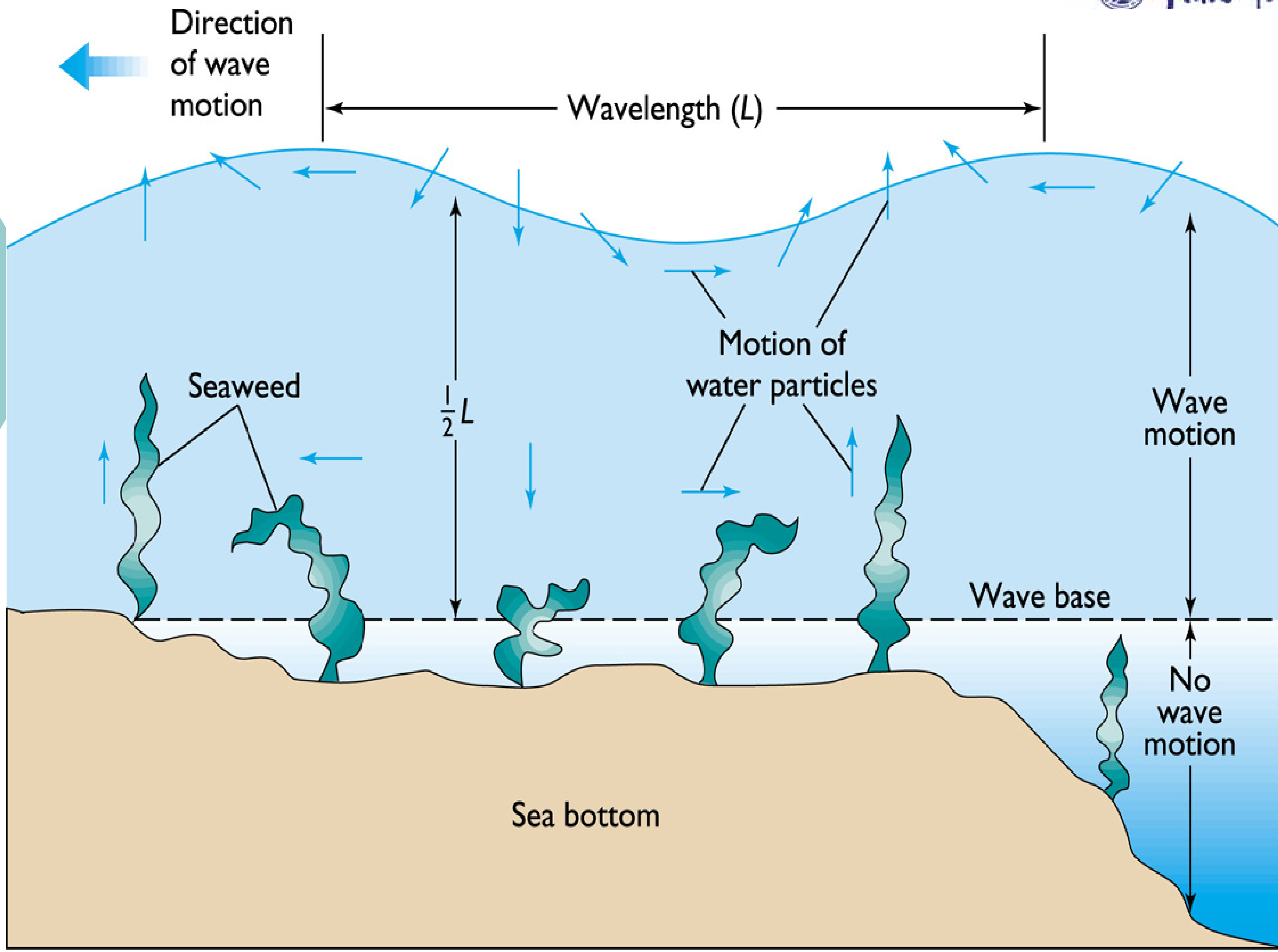


Figure II-1-2. Local fluid velocities and accelerations



(a) WAVE MOTION WITH DEPTH

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

$$\varphi=\frac{gH}{2\omega}\frac{\operatorname{ch}k(z+d)}{\operatorname{ch}kd}\sin(kx-\omega t)$$

二 水质点的运动速度和加速度

$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{gHk}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z+d)}{\operatorname{ch}kd}\sin(kx-\omega t)$$

$$=\frac{2\pi^2 H}{T^2}\frac{\operatorname{ch}k(z+d)}{\operatorname{sh}kd}\sin(kx-\omega t)$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}=-\frac{gHk}{2}\frac{\operatorname{sh}k(z+d)}{\operatorname{ch}kd}\cos(kx-\omega t)$$

$$=-\frac{2\pi^2 H}{T^2}\frac{\operatorname{sh}k(z+d)}{\operatorname{sh}kd}\cos(kx-\omega t)$$

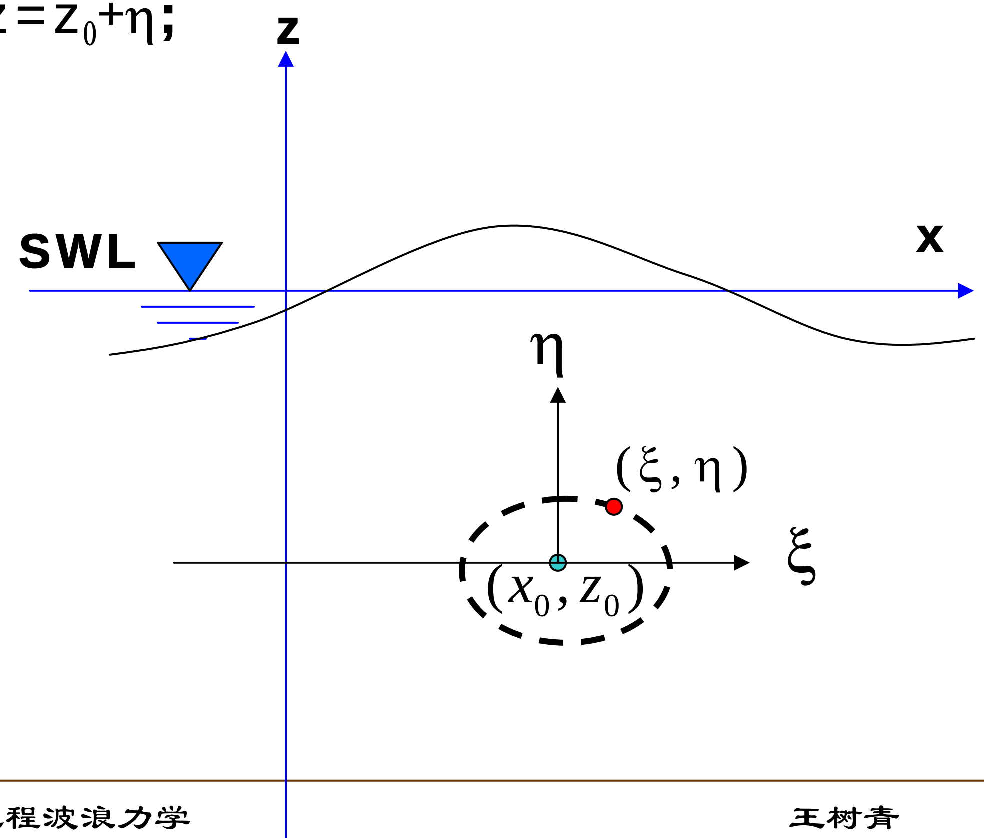
2.1.3 二维小振幅推进波的特性

三 水质点的运动轨迹

（1）某水质点静止时位于$(x_0\ \ z_0)$

（2）在波浪中以速度$d\xi/dt$、$d\eta/dt$运动；

（3）在运动瞬间，位于$x=x_0+\xi$，$z=z_0+\eta$；



$$\frac{d\xi}{dt}=u_x=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}}$$

$$\frac{d\eta}{dt}=u_z=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}}$$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

三 水质点的运动轨迹

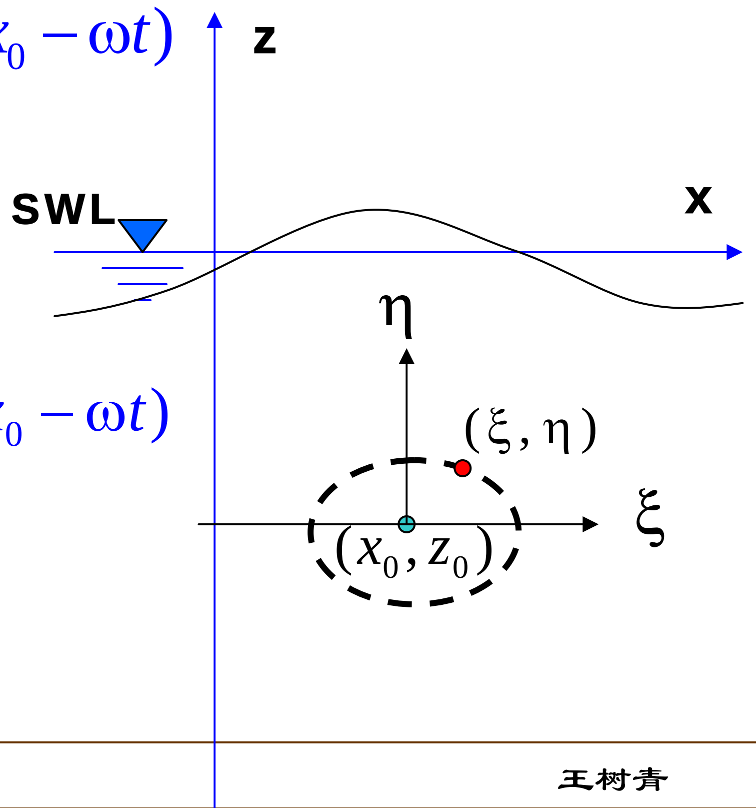
$$\xi = -\frac{H}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}\sin(kx_0-\omega t) \qquad \eta = \frac{H}{2}\frac{\operatorname{sh}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}\cos(kx_0-\omega t)$$

$$x = x_0+\xi = x_0-\frac{H}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}\sin(kx_0-\omega t)$$

$$= x_0-\alpha\sin(kx_0-\omega t)$$

$$z = z_0+\eta = z_0+\frac{H}{2}\frac{\operatorname{sh}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}\cos(kx_0-\omega t)$$

$$= z_0+\beta\cos(kx_0-\omega t)$$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

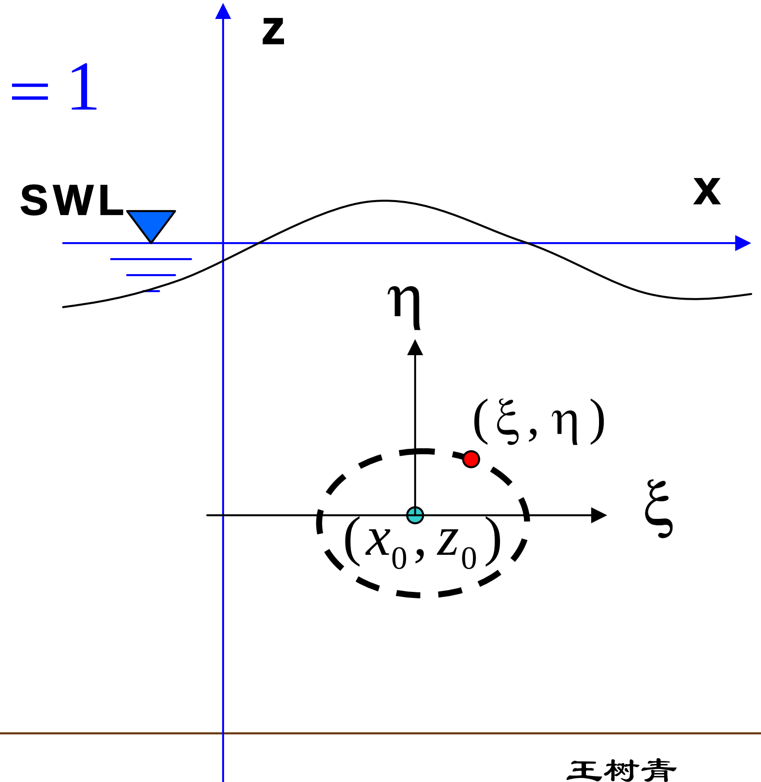
三 水质点的运动轨迹

$$x = x_0 - \alpha \sin(kx_0 - \omega t) \qquad z = z_0 + \beta \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\beta^2} = 1$$

$$\alpha = \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + d)}{\operatorname{sh} kd}$$

$$\beta = \frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + d)}{\operatorname{sh} kd}$$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

三 水质点的运动轨迹

$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\beta^2}=1$$

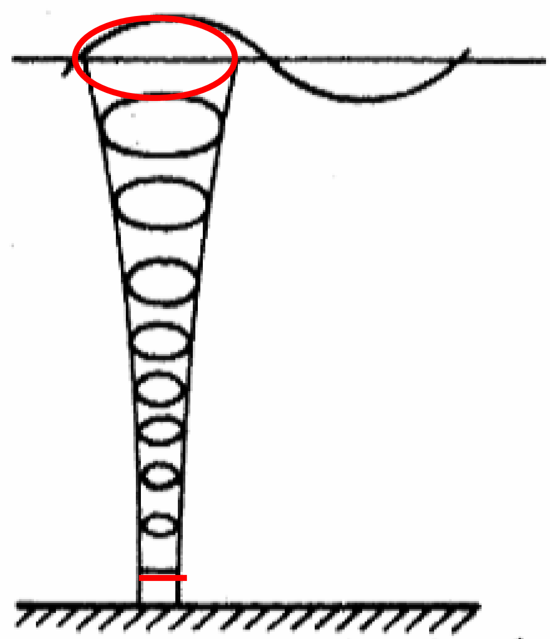
$$\alpha=\frac{H}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd} \qquad \beta=\frac{H}{2}\frac{\operatorname{sh}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}$$

（**1**）水面处： $z_0=0$

$$\alpha=\frac{H}{2}\operatorname{cth}kd \qquad \beta=\frac{H}{2}$$

（**2**）水底处： $z_0=-d$

$$\alpha=\frac{H}{2\operatorname{sh}kd} \qquad \beta=0$$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

三 水质点的运动轨迹 $(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=(\frac{H}{2}e^{kz_0})^2$

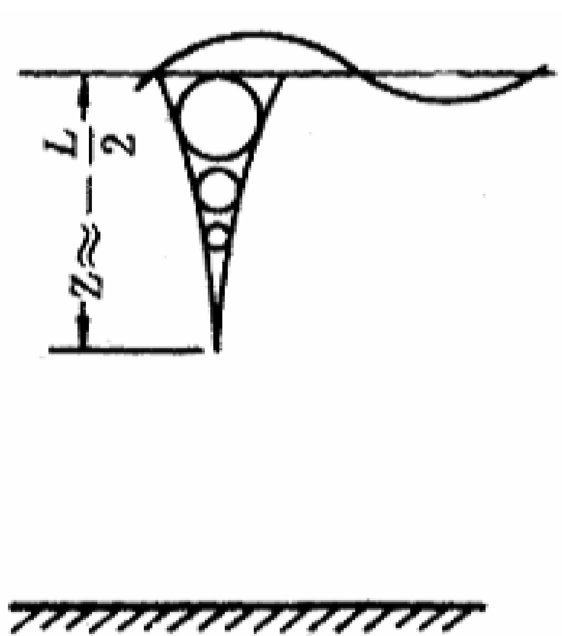
$$\alpha=\frac{H}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}\qquad \beta=\frac{H}{2}\frac{\operatorname{sh}k(z_0+d)}{\operatorname{sh}kd}$$

❖ 特例：无限水深 $\alpha=\beta=\frac{H}{2}e^{kz_0}$

（1）水面处：$z_0=0$　　$r=\frac{H}{2}$

（2）$z_0=-L$　　$r=\frac{H}{2}\frac{1}{535}$

（3）$z_0=-L/2$　　$r=\frac{H}{2}\frac{1}{23}$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

三 水质点的运动轨迹

浅水	中等水深	深水
d<L/20	L/20<d<L/2	d>L/2

$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\beta^2}=1$$

$$(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

$$\alpha=\frac{H}{2kd}$$

$$\alpha=\frac{H}{2}\frac{\mathrm{ch}\,k(z_0+d)}{\mathrm{sh}\,kd}$$

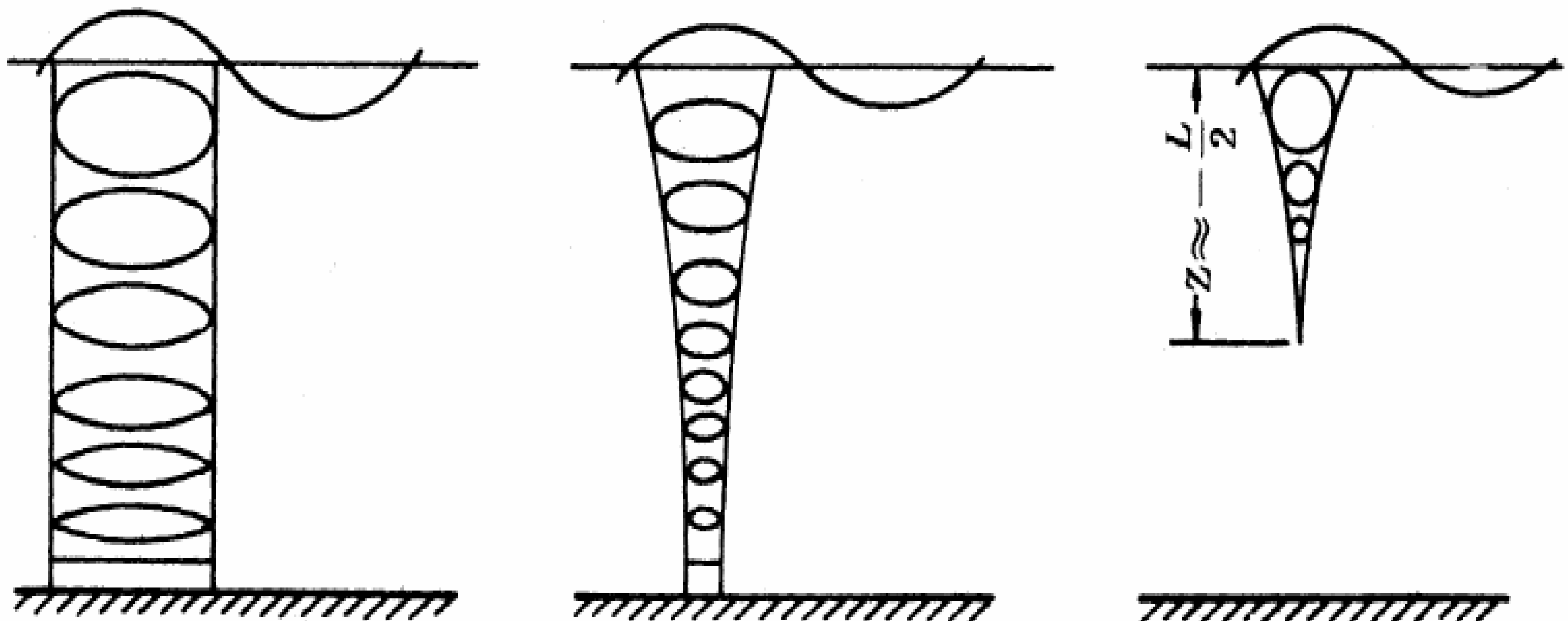
$$r=\frac{H}{2}e^{kz_0}$$

$$\beta=\frac{H(z+d)}{2d}$$

$$\beta=\frac{H}{2}\frac{\mathrm{sh}\,k(z_0+d)}{\mathrm{sh}\,kd}$$

轨道为椭圆，长轴不变，短轴随水深逐渐减小，底部为零，波面处为振幅 a

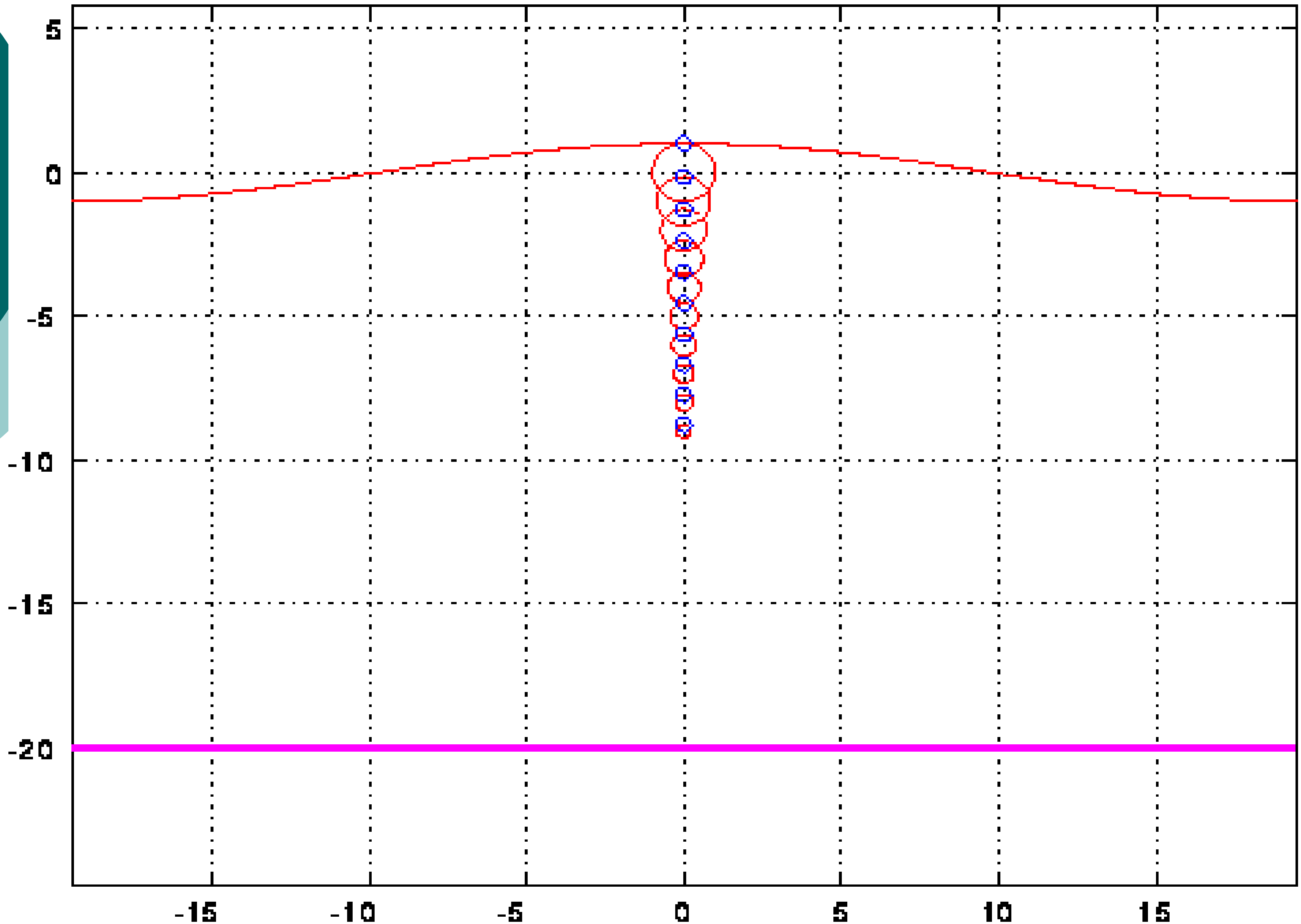
a、β随d的增加而减小，即椭圆越小越扁，在 $z_0=-d$时，β =0，水质点沿底部作水平往复运动

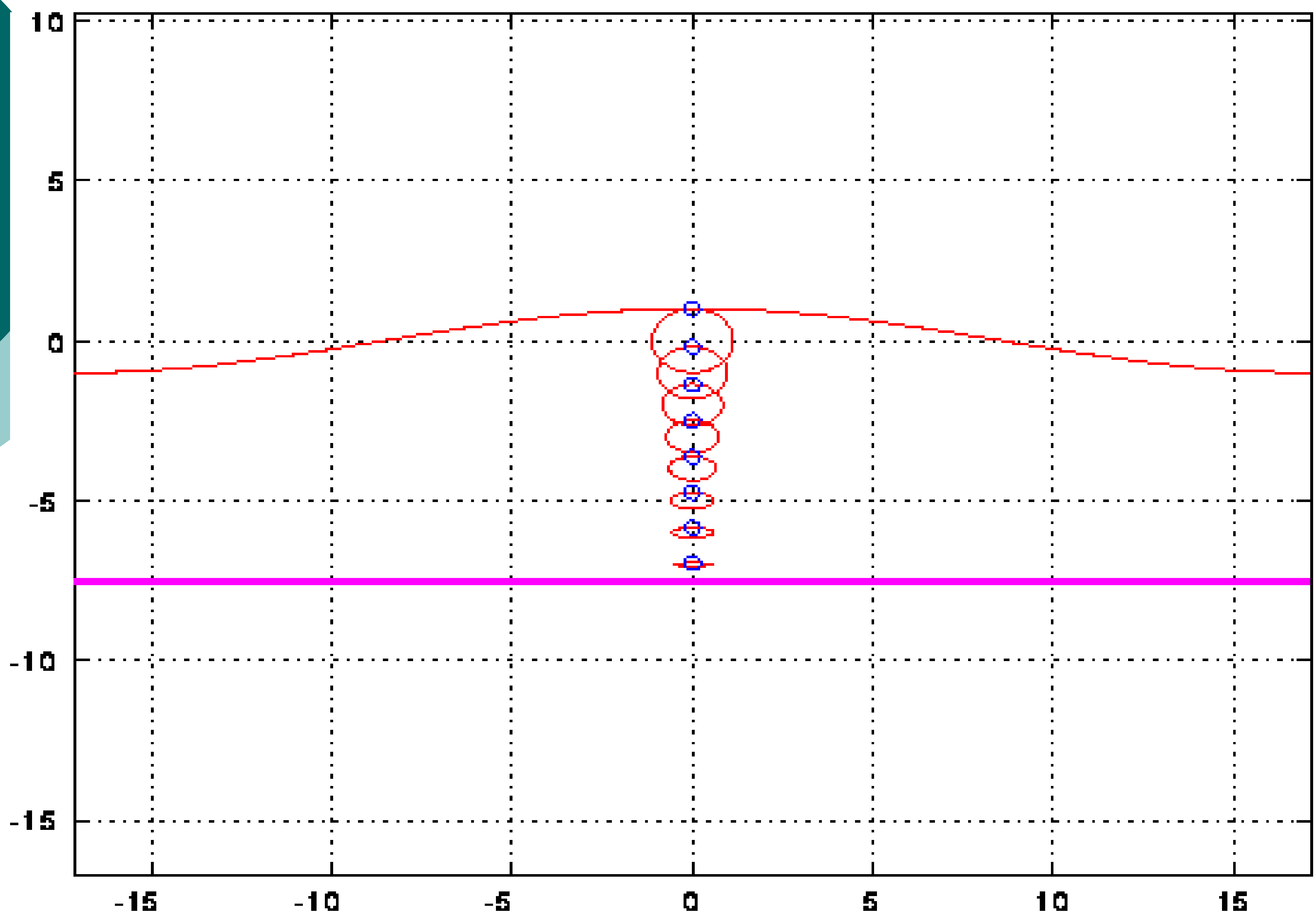


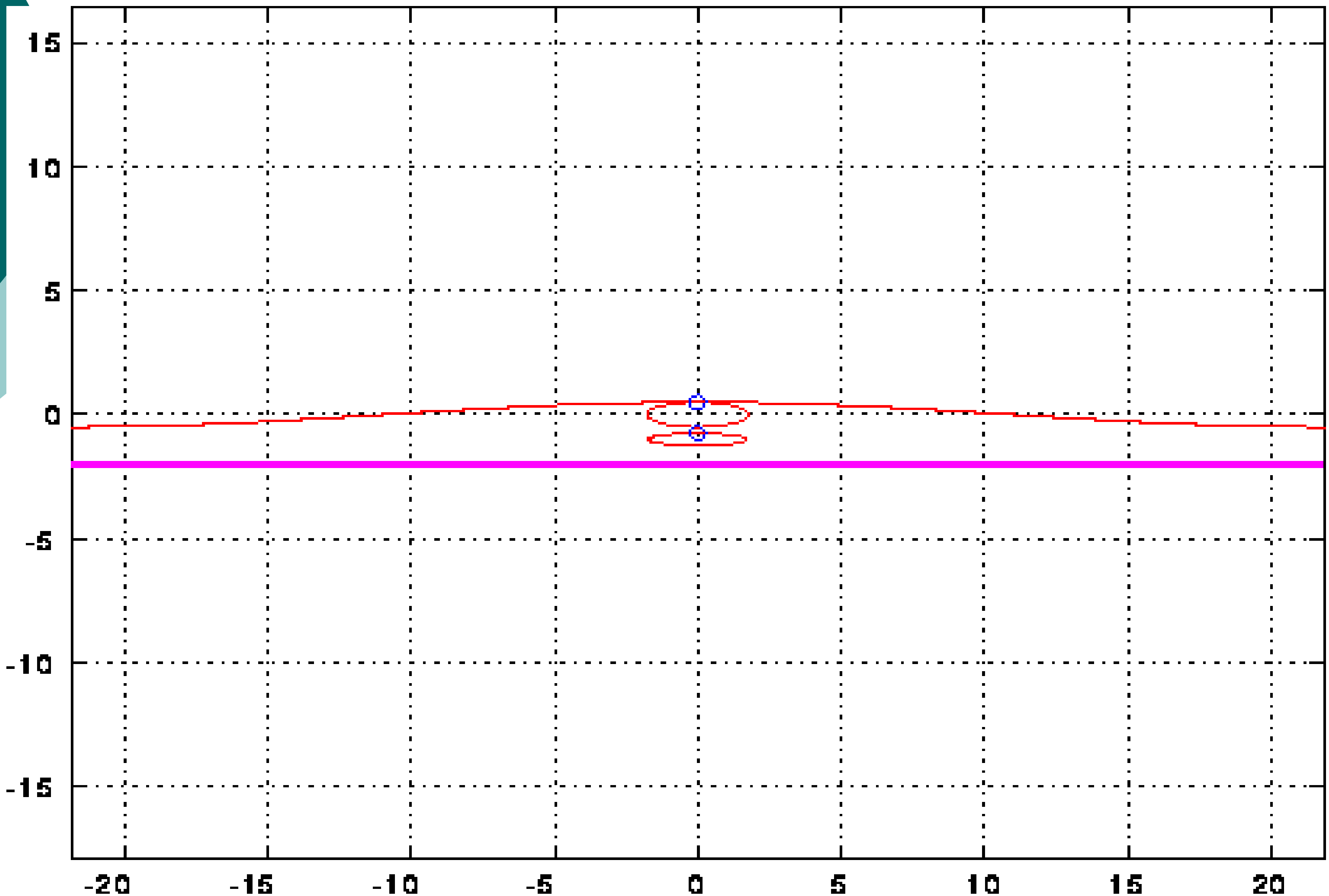
a)浅水($\frac{h}{L}\leqslant\frac{1}{20}$)　b)中等水深($\frac{1}{20}<\frac{h}{L}<\frac{1}{2}$)　c)深水($\frac{h}{L}>\frac{1}{2}$)

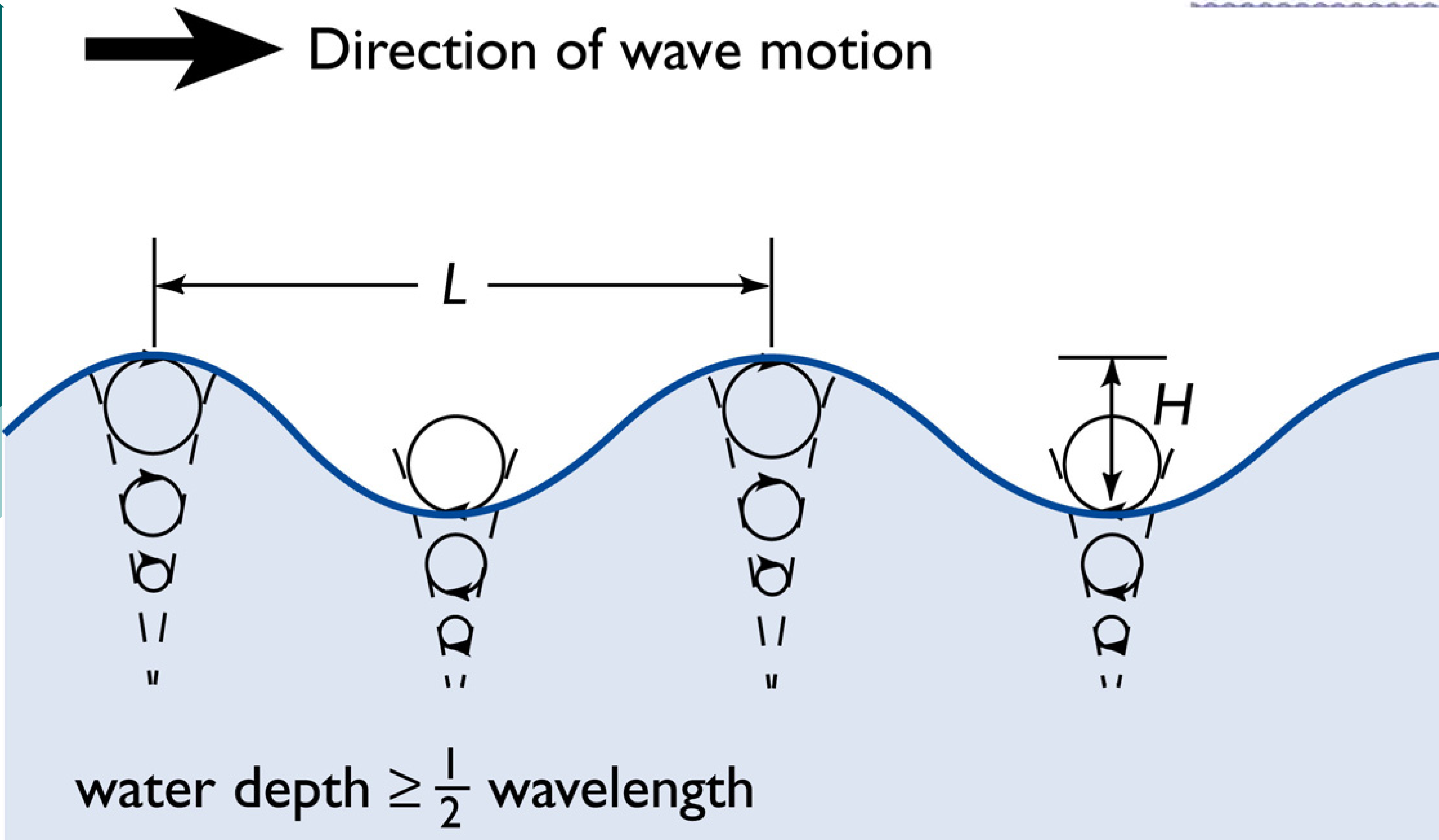
轨道为椭圆，长轴不变，短轴随水深逐渐减小，底部为零，波面处为振幅 a

a、β随d的增加而减小，即椭圆越小越扁，在 $z_0=-d$时，$\beta=0$，水质点沿底部作水平往复运动

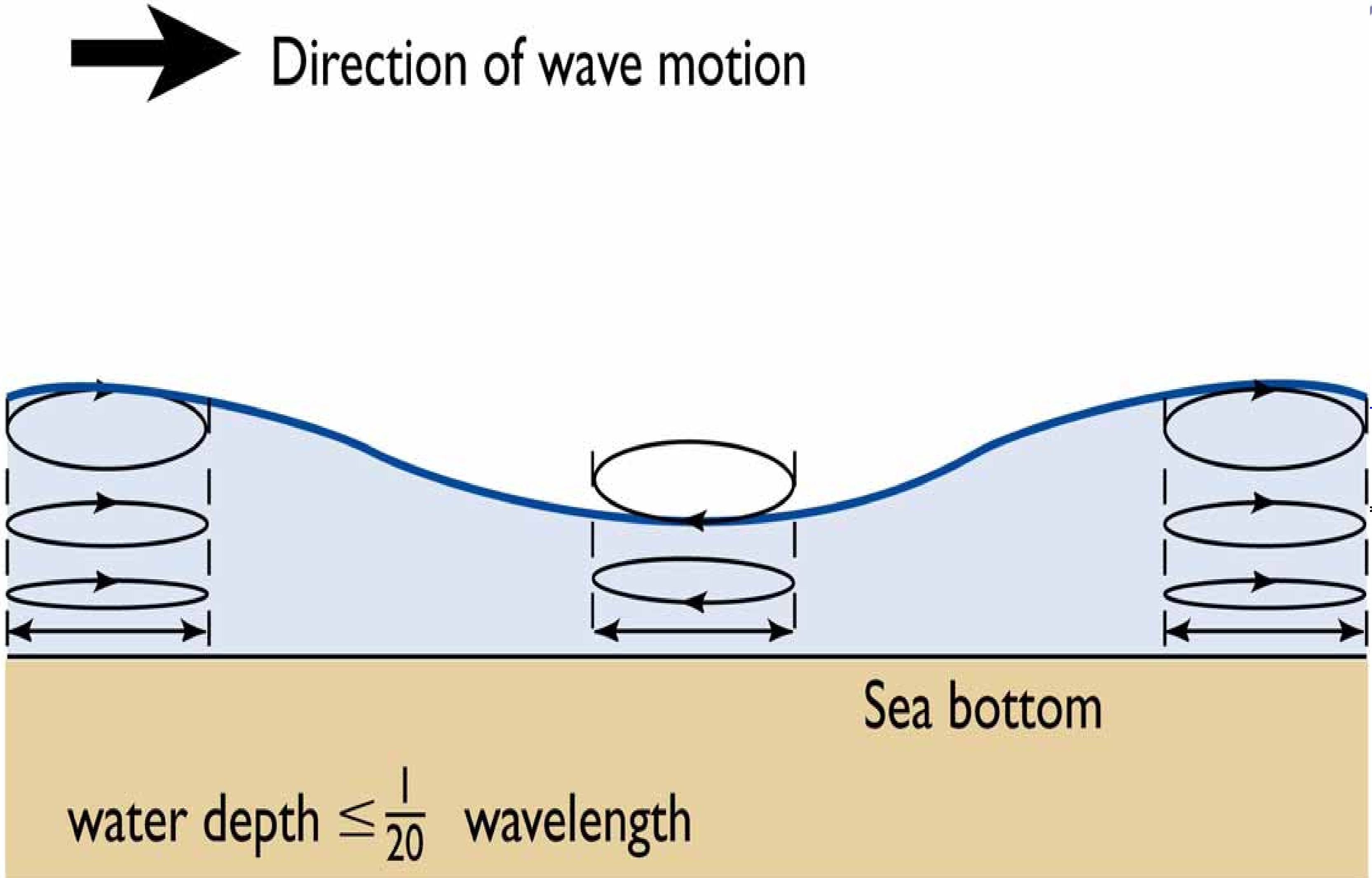

5
0
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15


10
5
0
-5
-10
-15
-15
-10
-5
0
5
10
15


15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20



(a) DEEP-WATER WAVE

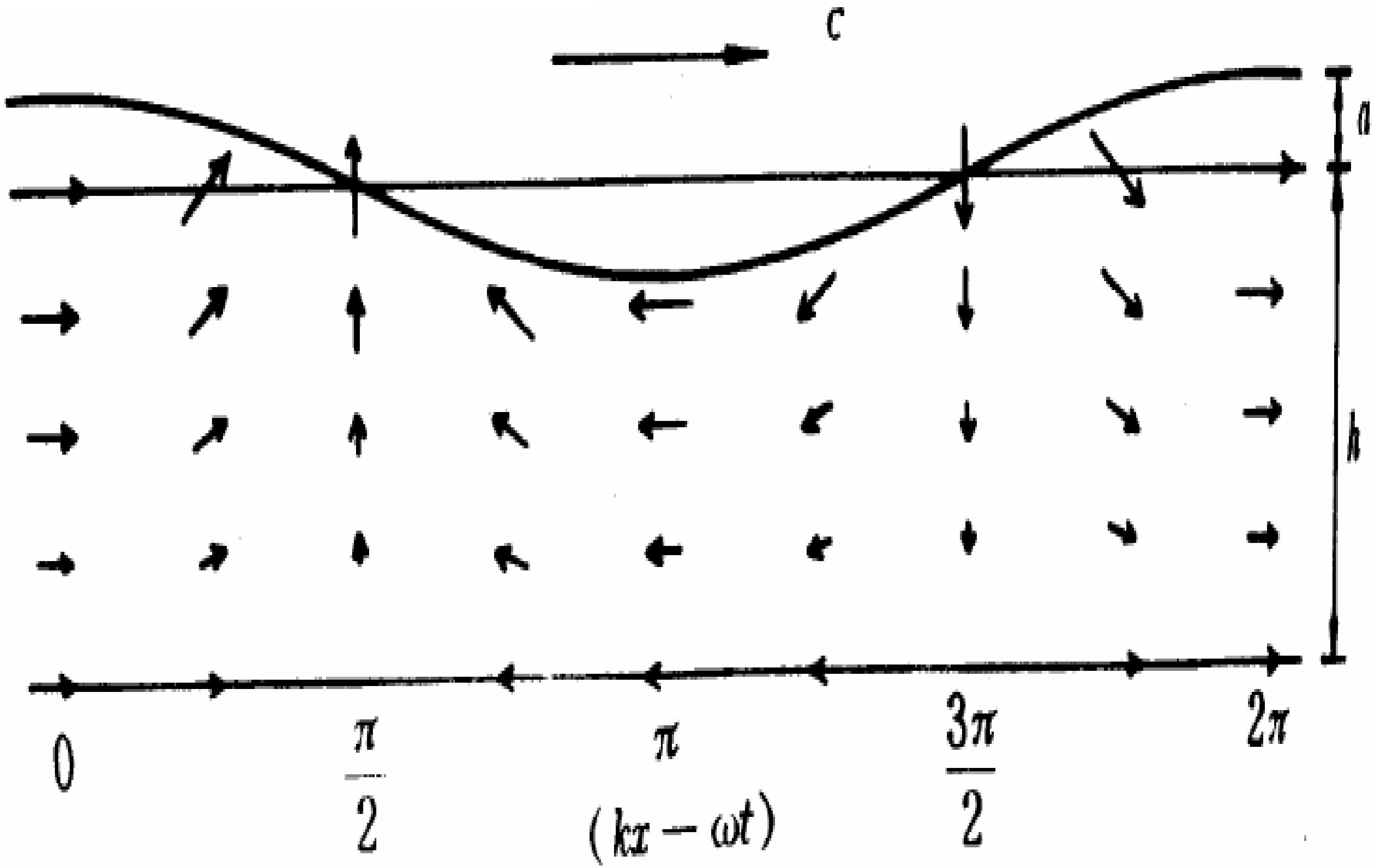


(b) SHALLOW-WATER WAVE

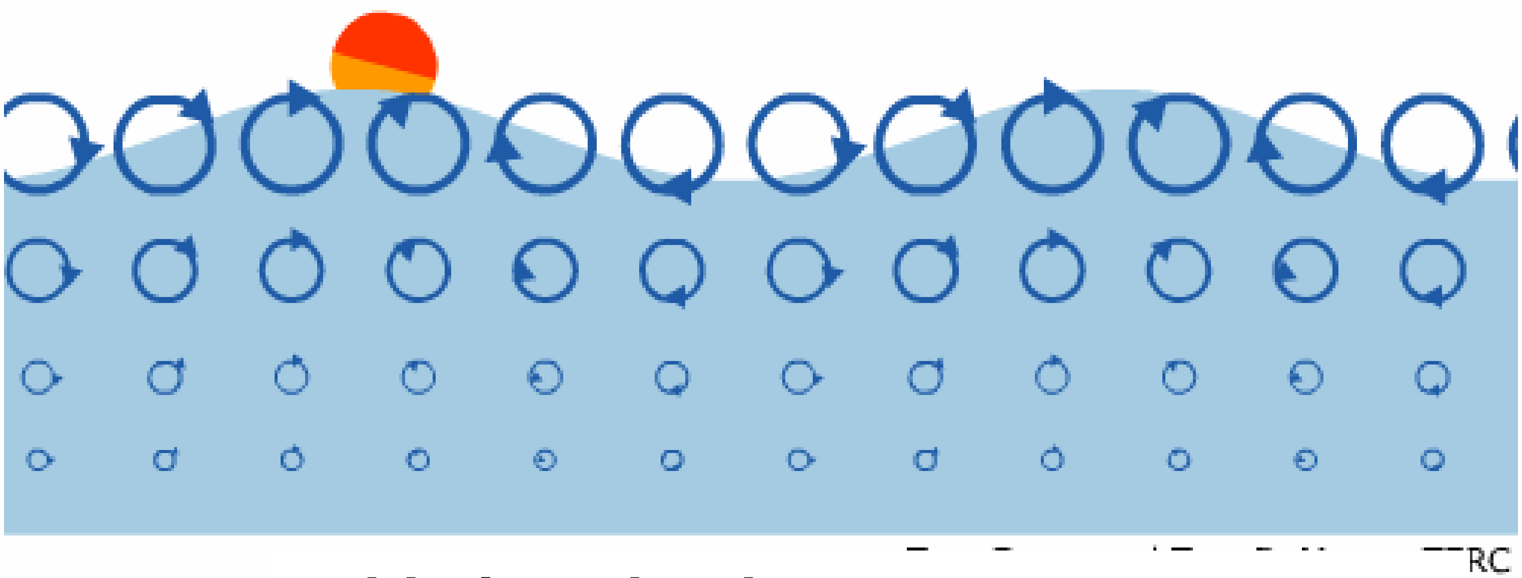
$$x = x_0 - \alpha \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$z = z_0 + \beta \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\eta = a\cos(kx - \omega t)$$



When wave energy passes through water, the water moves in a circular motion. Energy is passing from left to right in this animation, but the water itself stays in the same general location.



Orbital Motion in Deep Water

es1604_waves_in_motion[1].swf

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

四 波压强

$$\varphi=\frac{gH}{2\omega}\frac{\operatorname{ch}k(z+d)}{\operatorname{ch}kd}\sin(kx-\omega t)$$

$$p=-\gamma z-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\varphi=\frac{gH}{2\omega}e^{kz}\sin(kx-\omega t)$$

- 有限水深（浅水）情况下

$$p=-\gamma z+\boxed{\frac{\gamma H}{2}\frac{\operatorname{ch}k(z+d)}{\operatorname{ch}kd}\cos(kx-\omega t)}$$

净波压强

- 深水情况下

$$p=-\gamma z+\boxed{\frac{\gamma H}{2}e^{kz}\cos(kx-\omega t)}$$

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

四 波压强

$$p = -\gamma z + \frac{\gamma H}{2}\frac{\text{ch}k(z+d)}{\text{ch}kd}\cos(kx-\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p}{\gamma} = -z + \frac{\text{ch}k(z+d)}{\text{ch}kd}\eta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p}{\gamma} = -z + k_p\eta$$

$$k_p = \frac{\text{ch}k(z+d)}{\text{ch}kd}$$

讨论:

1. 公式只适于z<0 的区域，
   因为当z>0时（静水面以上）

据小振幅波的近似，即自由面条件中用 z = 0 代替了 z = η。

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

$$\frac{p}{\gamma} = -z + k_p \eta$$

$$k_p = \frac{\mathrm{ch}k(z+d)}{\mathrm{ch}kd}$$

四 波压强

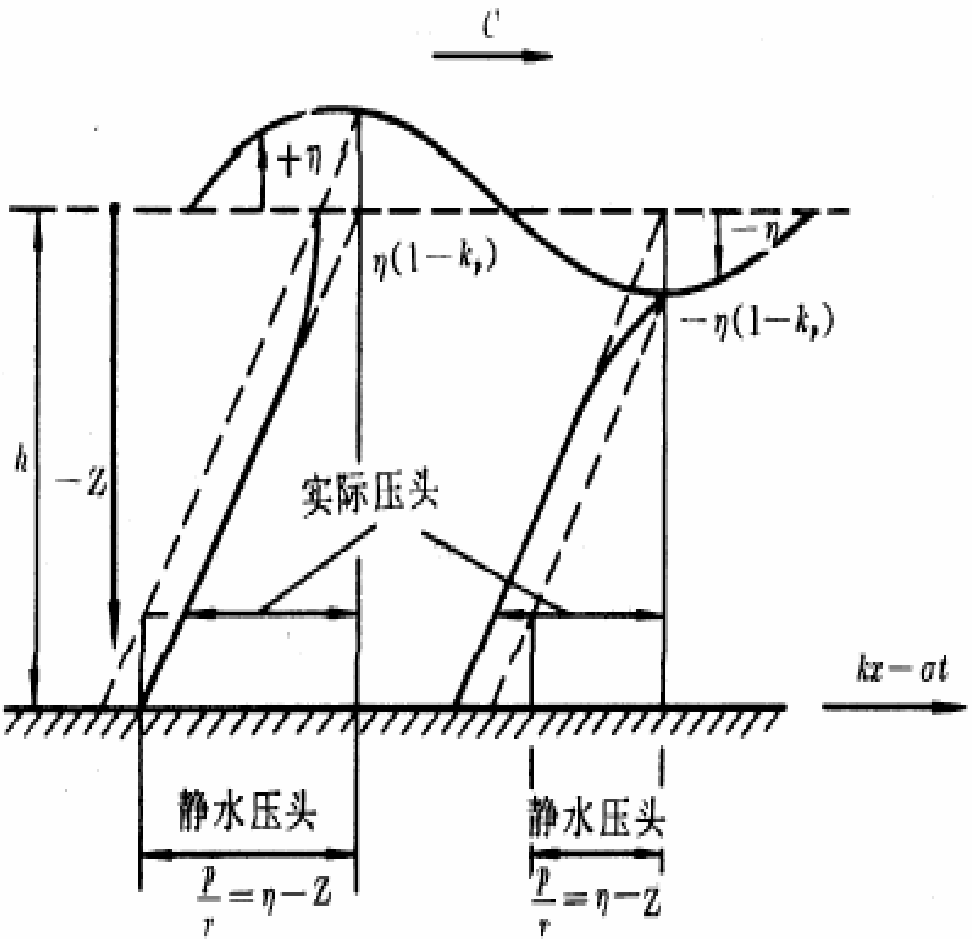
2. 当$z<0$时，$k_p<1$；

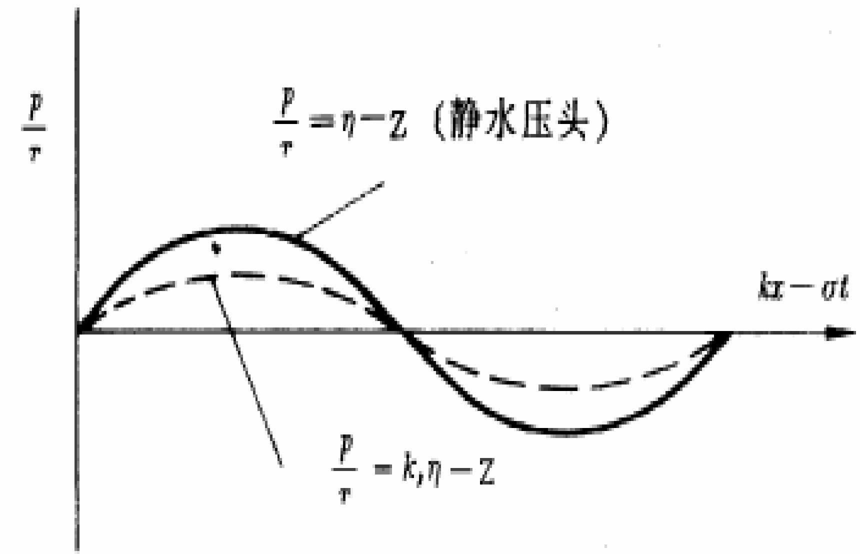
3. 当$z=0$时，$k_p=1$，$p/\gamma=\eta$；

4. 当$z=-d$时 $k_p = \frac{1}{\mathrm{ch}kd}$ $\quad \frac{p}{\gamma} = \frac{\eta}{\cosh kd} + d$

- 波峰时，底部压力小于静水压力
- 波谷时，底部压力大于静水压力

底部静水压力 $\frac{p}{\gamma} = \eta + d$


C
+η
−η
η(1−k_p)
−η(1−k_p)
h
−Z
实际压头
kx−σt
静水压头
p/r=η−Z
静水压头
p/r=η−Z


p/r
p/r=η−Z（静水压头）
kx−σt
p/r = k_pη−Z

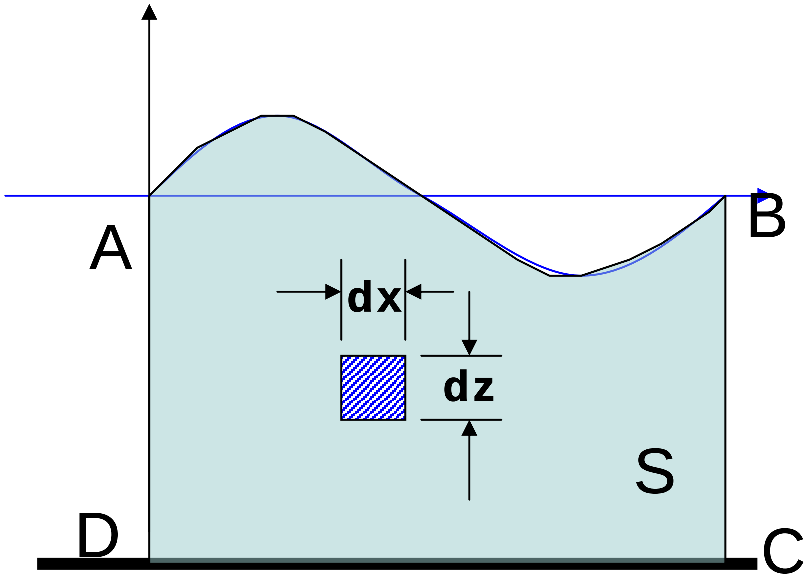
2.1.3 二维小振幅推进波的特性

五 波能量

- 动能 Kinetic Energy / unit width

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\iint_s\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dxdz$$

$$E_k = \frac{1}{4}\rho g a^2 L = \frac{1}{16}\rho g H^2 L$$



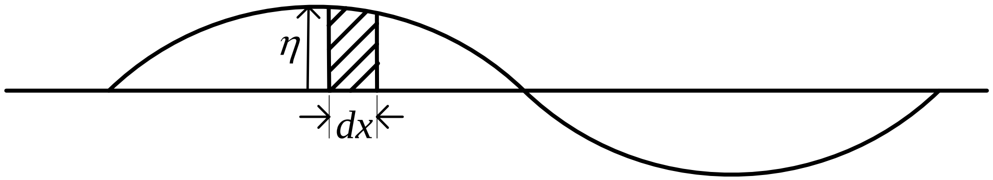
2.1.3 二维小振幅推进波的特性

五 波能量

- 势能Potential Energy / unit width

$$E_p = \int_0^L \int_0^\eta \rho g z dz dx$$

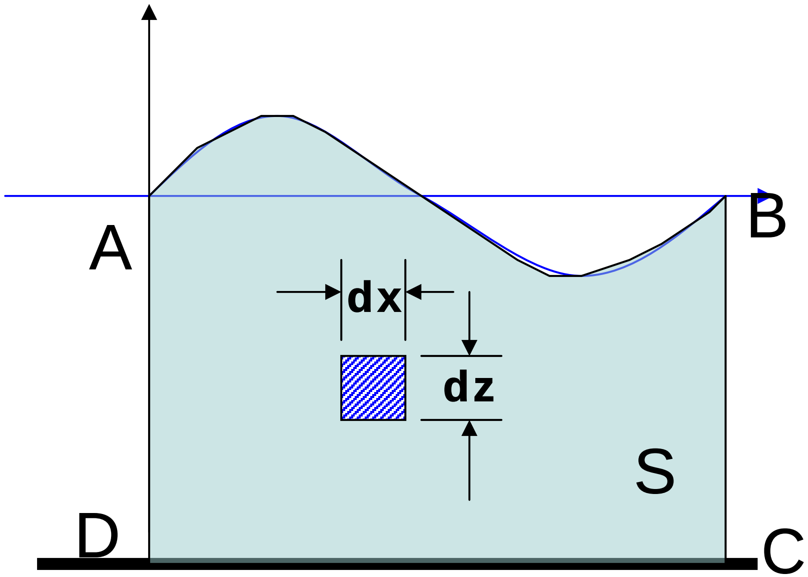
$$E_p = \frac{1}{4}\rho g a^2 L = \frac{1}{16}\rho g H^2 L$$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

五 波能量

- 总能 $E=\dfrac{1}{2}\rho g a^2 L=\dfrac{1}{8}\rho g H^2 L$
- 沿波浪传播方向单位长度内能量 $E=\dfrac{1}{2}\rho g a^2=\dfrac{1}{8}\rho g H^2$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

六 波能流

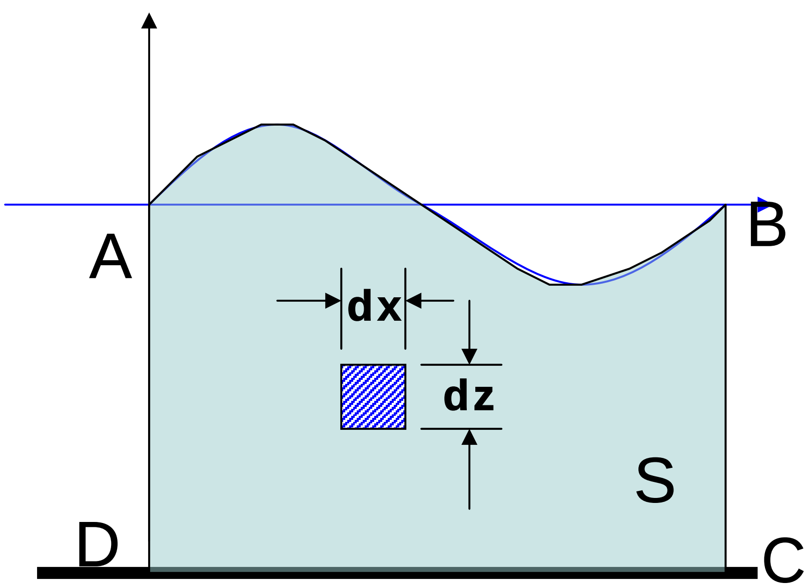
- 单位时间内跨过铅直断面的波能量为波能流;

$$\overline{F}=\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-d}^0 pu_x dzdt$$

$$\overline{F}=\frac{1}{4}\rho ga^2c\left(1+\frac{2kd}{sh2kd}\right)$$

$$C_E=\frac{\overline{F}}{E}=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kd}{sh2kd}\right)$$

$$\overline{F}=\frac{1}{4}\rho ga^2c_E$$



2.1.3 二维小振幅推进波的特性

$$E=\frac{1}{2}\rho ga^2=\frac{1}{8}\rho gH^2$$

$$\overline{F}=\frac{1}{4}\rho ga^2c_E \qquad F=\frac{1}{4}\rho ga^2c_E B$$

$$C_E=\frac{\overline{F}}{E}=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kd}{sh2kd}\right)$$

说明:

1. 波浪的总能量为动能与势能之和，动能与势能相等。

2. 波能与波幅的平方成正比，与水深无关。

3. 波能的传播速度就是群速度。

4. 上面公示表示的为沿波峰方向单位宽度内的能量

2.1.3 二维小振幅推进波的特性

$$F = \frac{1}{4}\rho g a^2 c_E B$$

$$C_E = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kd}{sh2kd}\right)$$

Ex) How much power can be extracted when H=2m, B=1km, T=9s

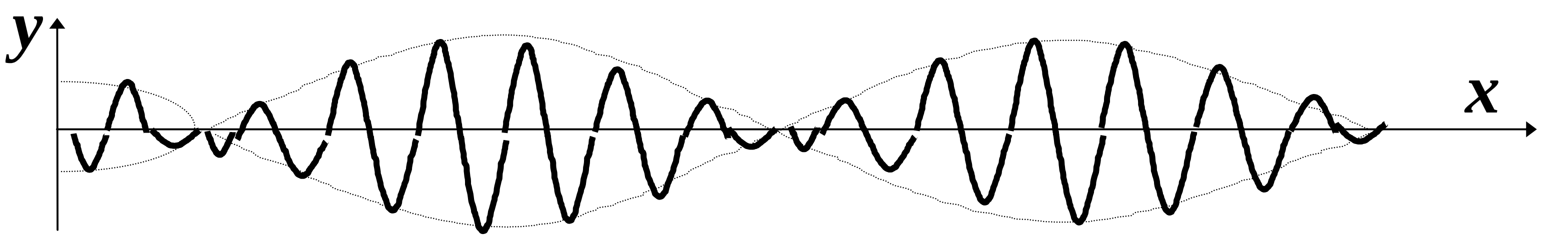
(a) d=2m : shallow

(b) d=deep

$$C_E = c = \sqrt{gd} = 5.4m/s$$

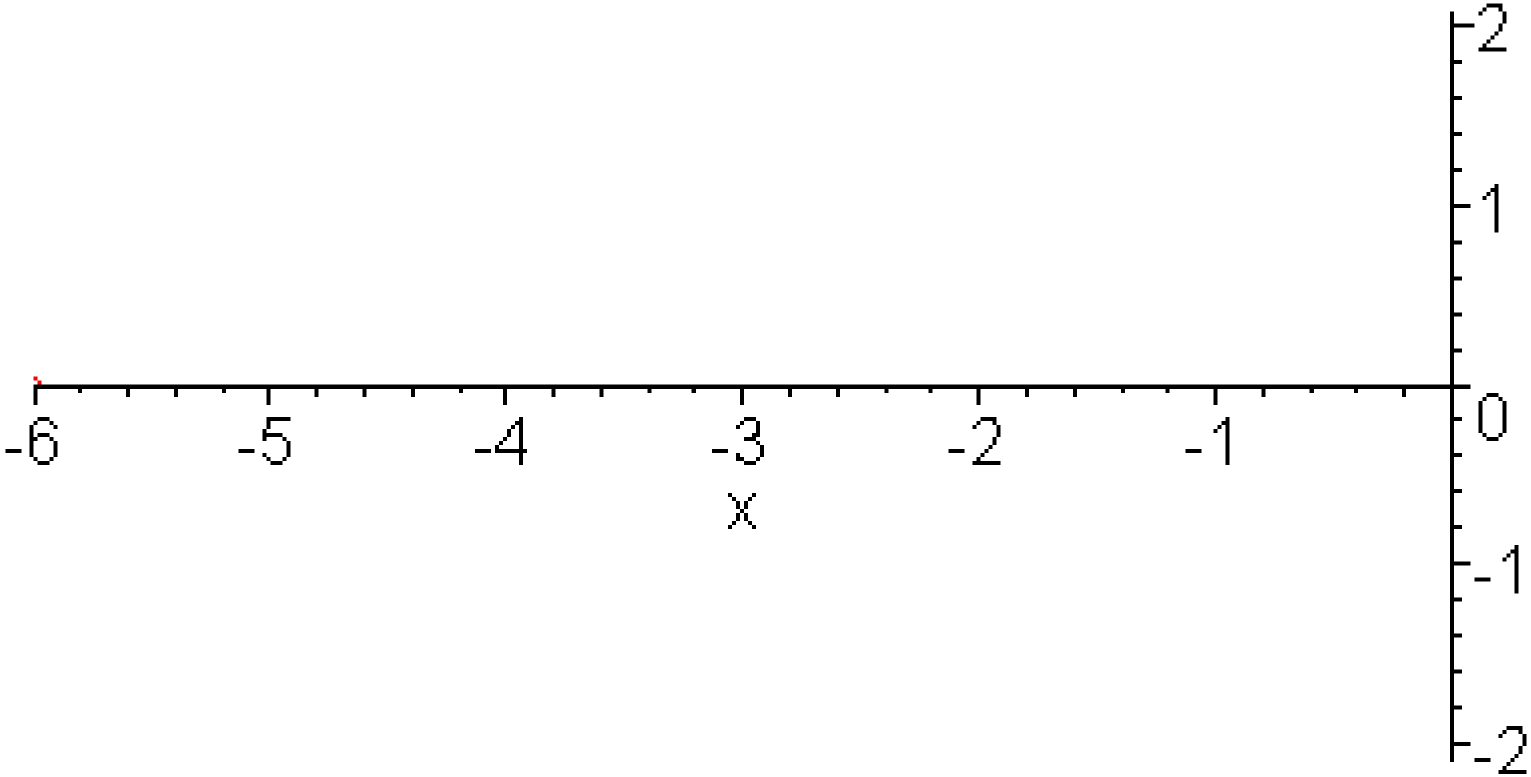
$$F = \frac{1}{4}\rho g a^2 c_E B = 27MW$$

○ 2.2 常深度小振幅简单波动的叠加



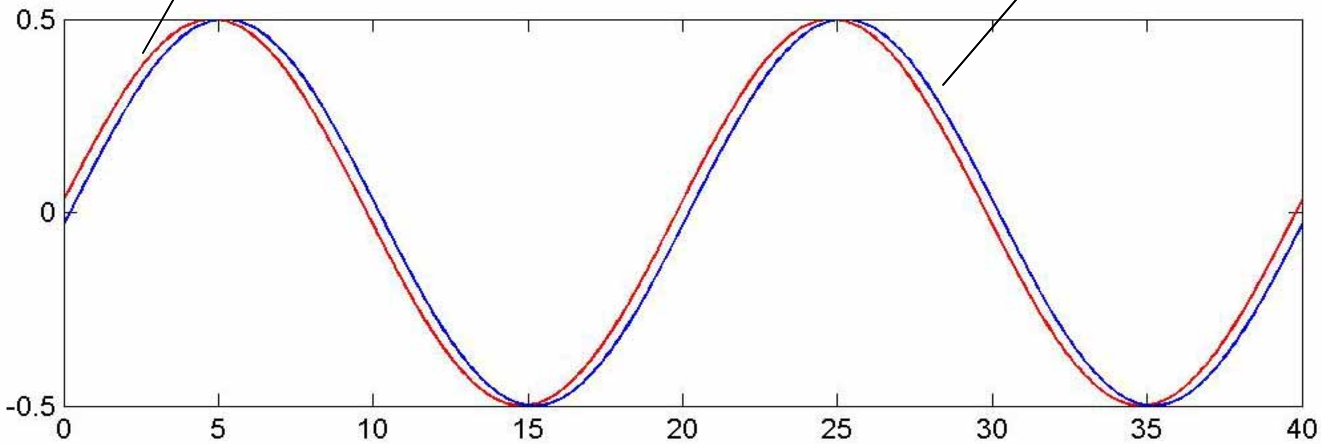
2.2.1 驻波(standing wave)

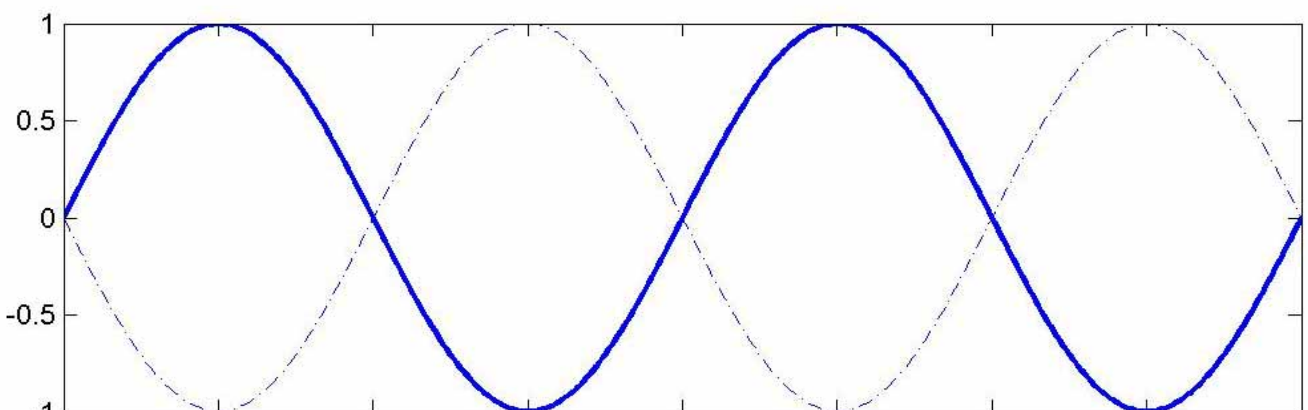
驻波的产生：



2.2.1 驻波(standing wave)

$$\eta_1 = a\cos(kx-\omega t) \qquad \eta_2 = -a\cos(kx+\omega t)$$



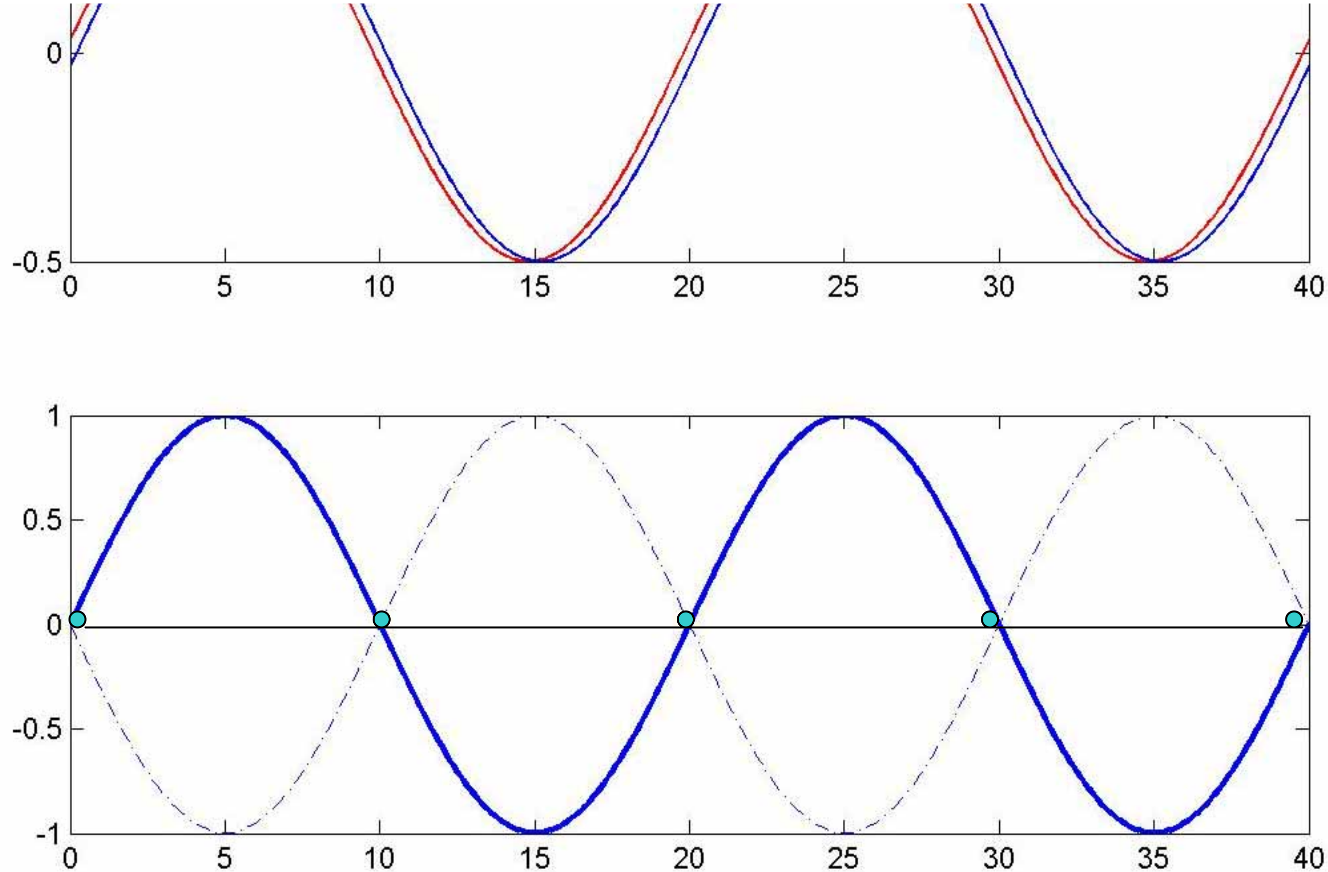


$$\boxed{\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2a\sin kx \sin\omega t}$$

2.2.1 驻波(standing wave)

$$\eta = 2a \sin kx \sin \omega t$$

1. 波节：kx=0、π、2π, sinkx=0, 波面η = 0
2. 波腹：kx=π/2、3π/2, sinkx=±1, 波面随t周期性升降;



2.2.1 驻波(standing wave)

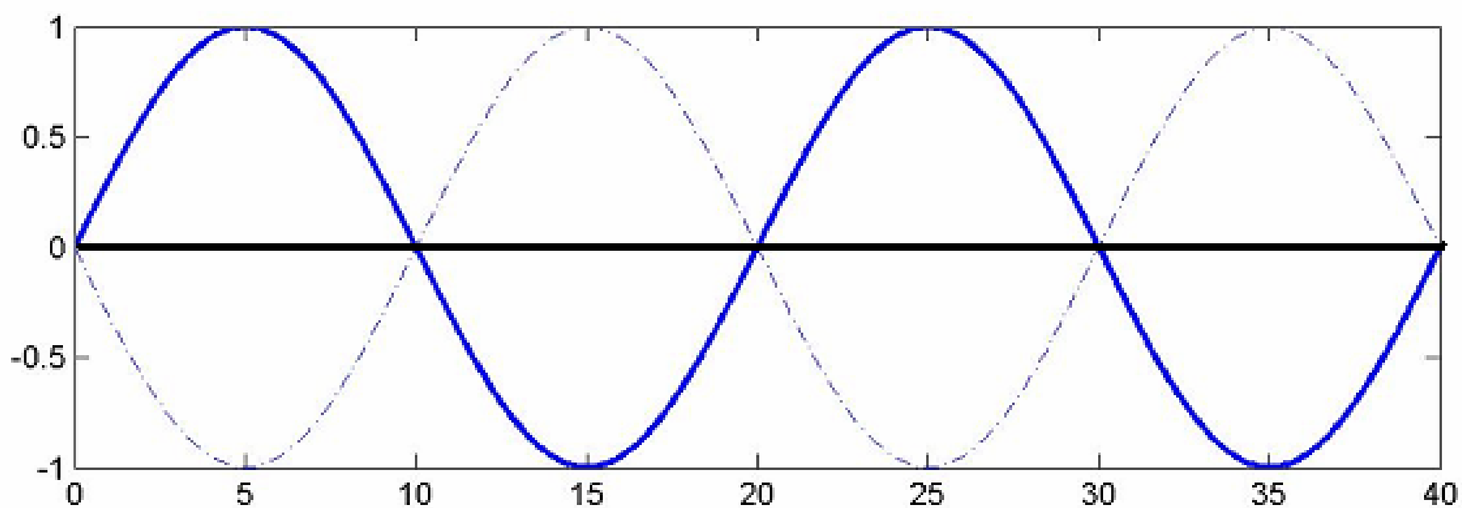
驻波水质点运动轨迹:

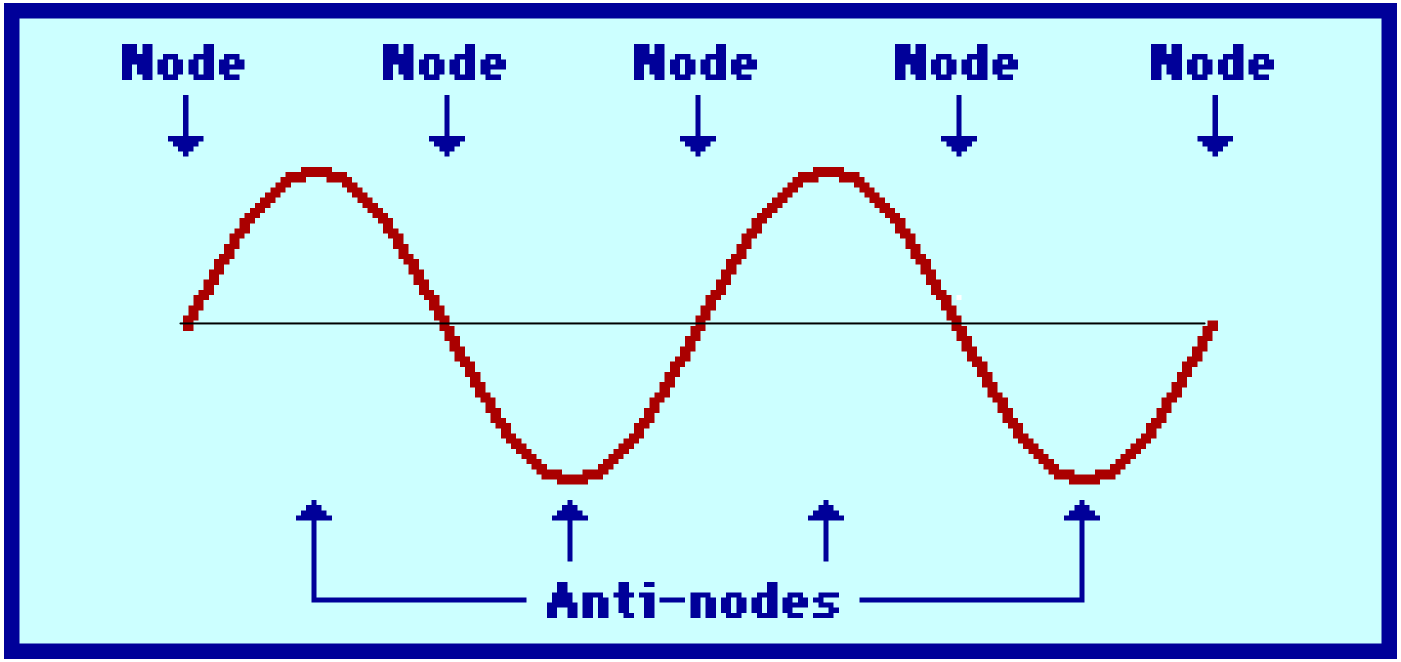
$$z - z_0 = \left[\frac{\mathrm{sh}k(z_0 + d)}{\mathrm{ch}k(z_0 + d)} \mathrm{tg}kx_0 \right](x - x_0)$$

（1）水质点运动轨迹：在平衡位置附近沿着某方向做直线运动

（2）波节处：水平方向；

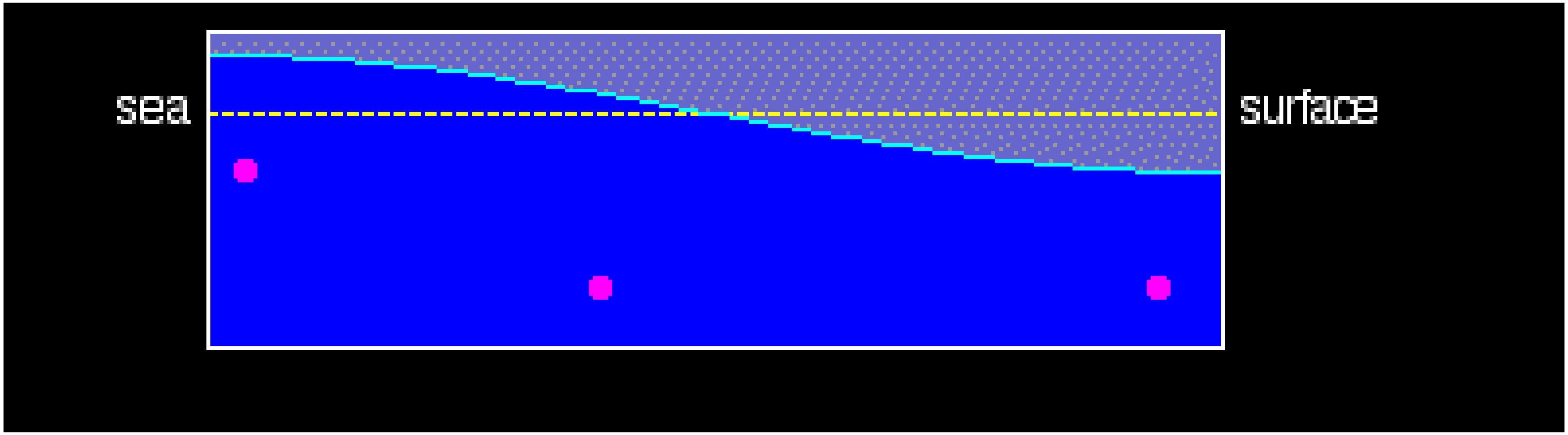
波腹处：垂直方向；




Node
Node
Node
Node
Node
Anti-nodes

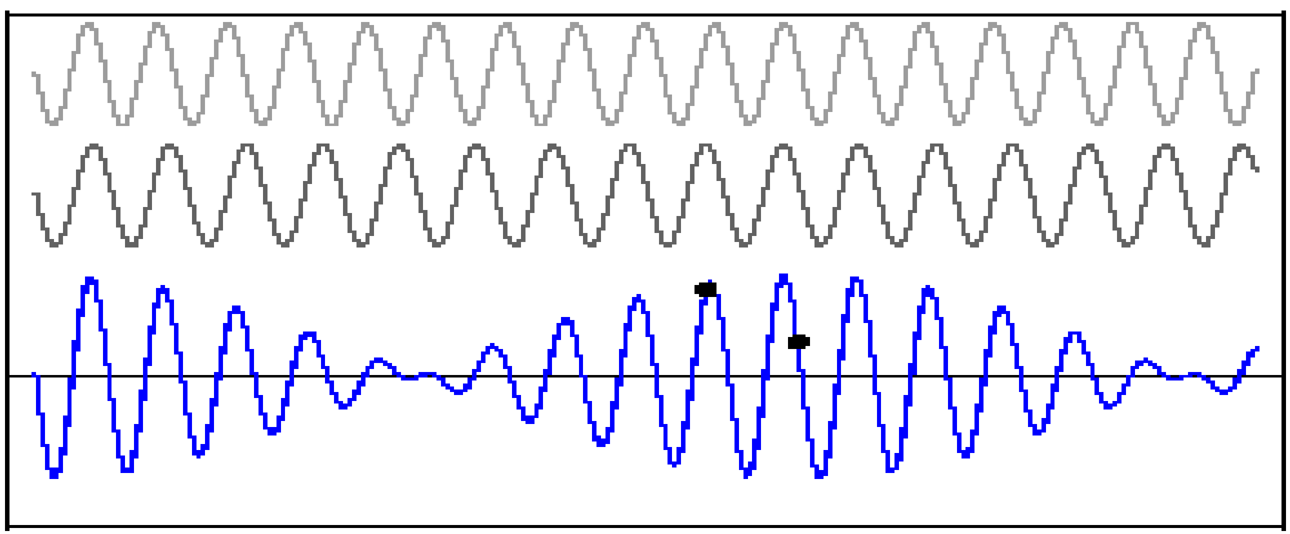
2.2.1 驻波(standing wave)

A first order seiche.
The undisturbed sea level is indicated by the broken yellow line. Three water particles are shown as an indication of water movement in the seiche.
Note the node in the center and that water under the node moves only horizontally, while water at both ends of the basin moves vertically.



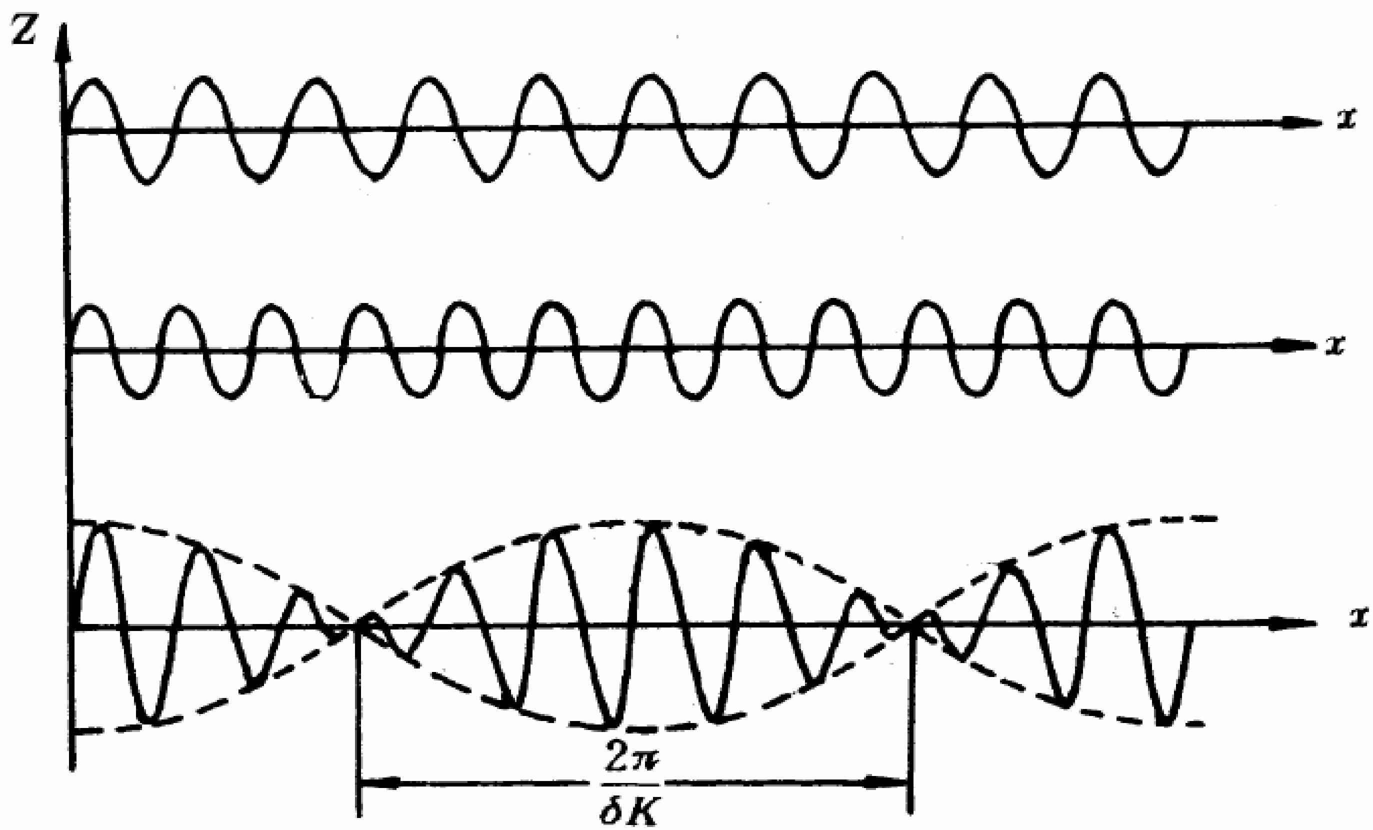
2.2.2 波群(wave group)

波群：不同频率的简谐波叠加，复合波中波列的振幅随位置时大时小变化，显现为一团一团地振动，称之为波群或波包。



○ 2.2.2 波群(wave group)

模拟：波群可以用两个波向相同，波幅相同，波长和周期相近的余弦波的迭加来模拟；



2.2.2 波群

❖ 两个频率相近、振幅相等的同向传播的简谐波叠加。

$$\eta_1 = a\cos(kx-\omega t)$$

$$\eta_2 = a\cos(k'x-\omega' t)$$

其中：$\Delta k = k-k', \Delta\omega = \omega-\omega'$ 为小量

$$\eta = \eta_1+\eta_2 = 2a\cos(\frac{k-k'}{2}x-\frac{\omega-\omega'}{2}t)\cos(\frac{k+k'}{2}x-\frac{\omega+\omega'}{2}t)$$

$$\eta = 2a\cos(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(kx-\omega t)$$

2.2.2 波群

$$\eta = 2a\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(kx - \omega t)$$

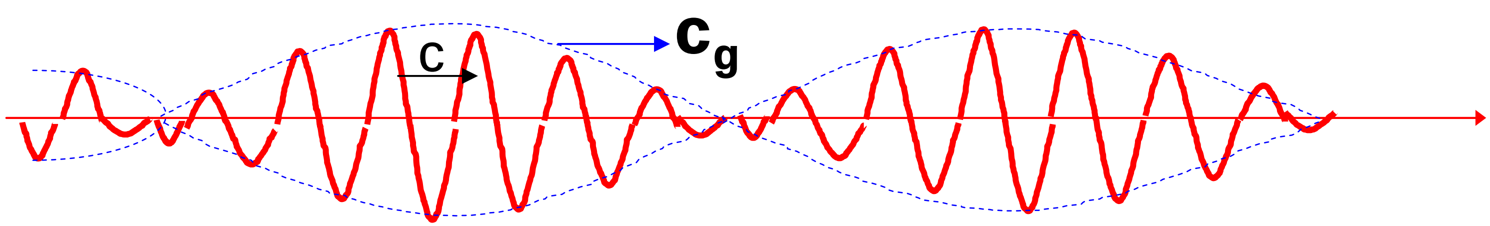
$$a' = 2a\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)$$

$$\eta = a'\cos(kx - \omega t)$$

a'为波包线方程

振幅为**a'**作缓慢变化的余弦波

- 合成波的波速**c**: $c = \dfrac{\omega}{k}$
- 波群速度（波包线移动的速度）$\mathbf{c_g}$: $c_g = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = \dfrac{d\omega}{dk}$



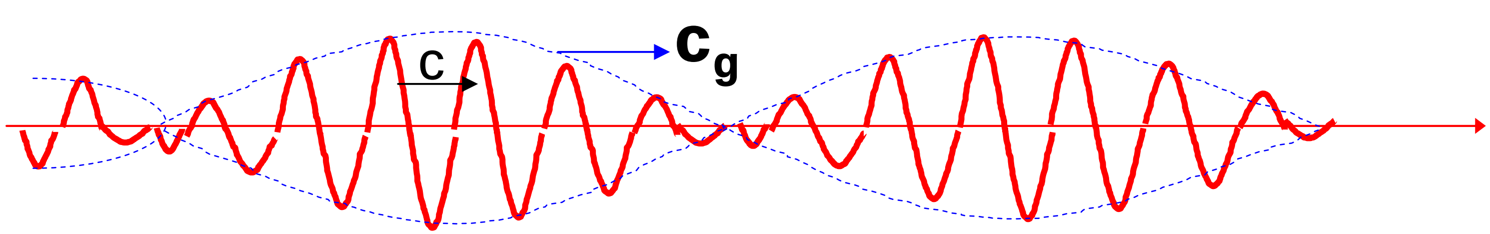
○ 2.2.2 波群

❖ 波群速度c_g:

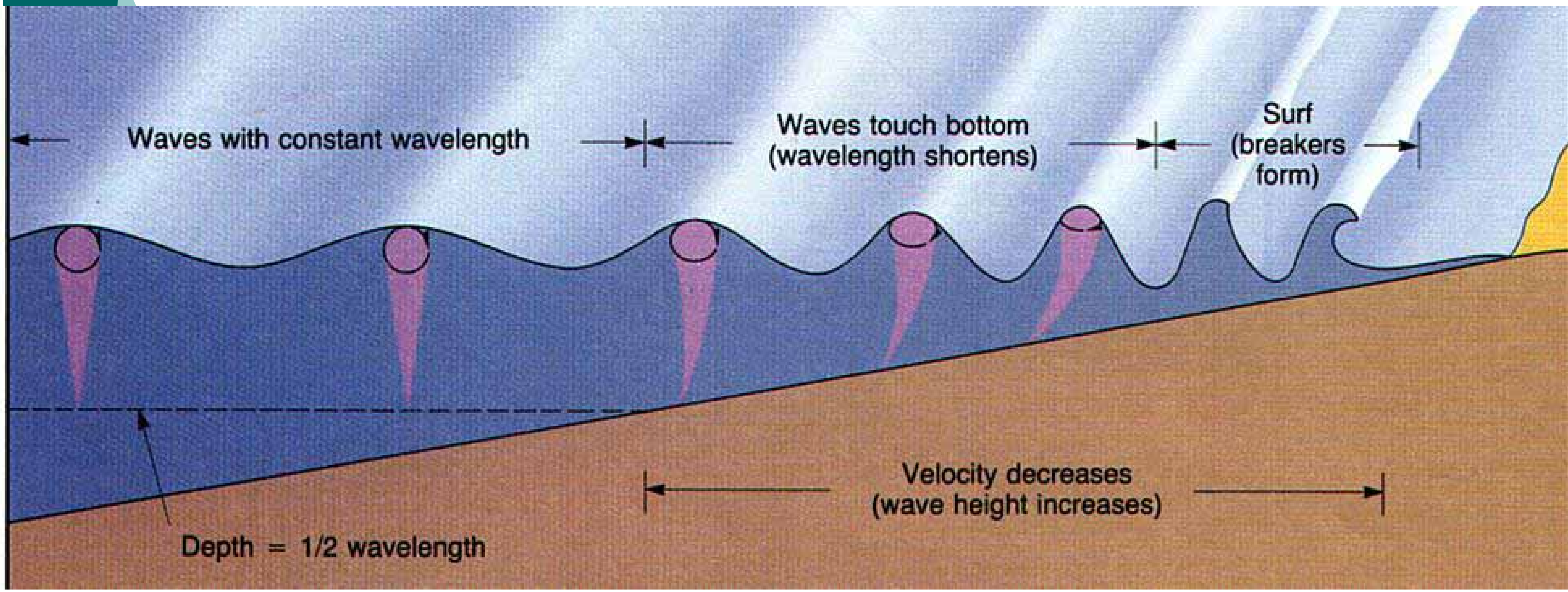
$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kd$$

$$c_g = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{2kd}{\mathrm{sh}\,2kd}\right]$$

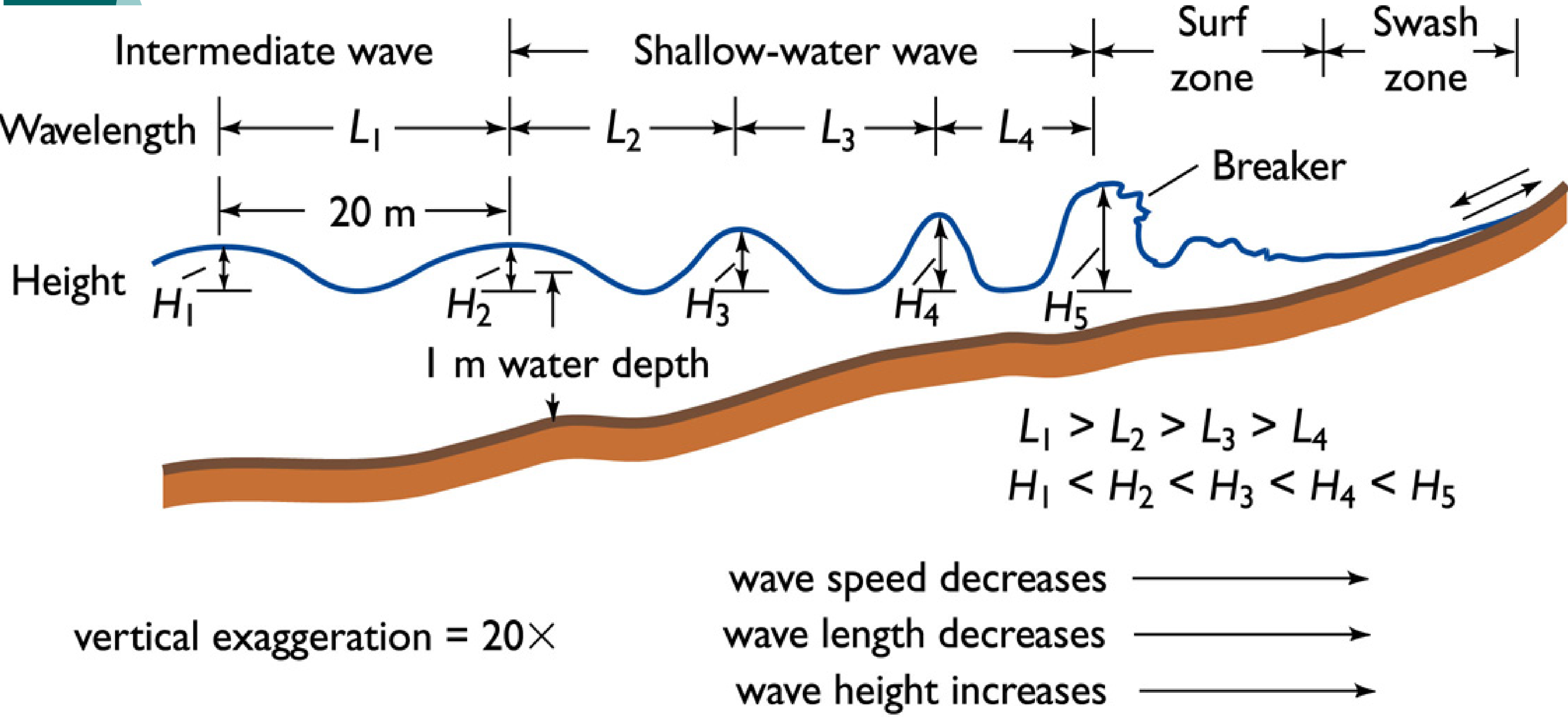


○ 2.3 倾斜海底上波浪的传播



波浪一般所影响的水深相当于波长的一半，当水深小于1/2波长时，波长开始变短，波高变大，并最终出现翻卷，形成破浪。

○ 2.3 倾斜海底上波浪的传播

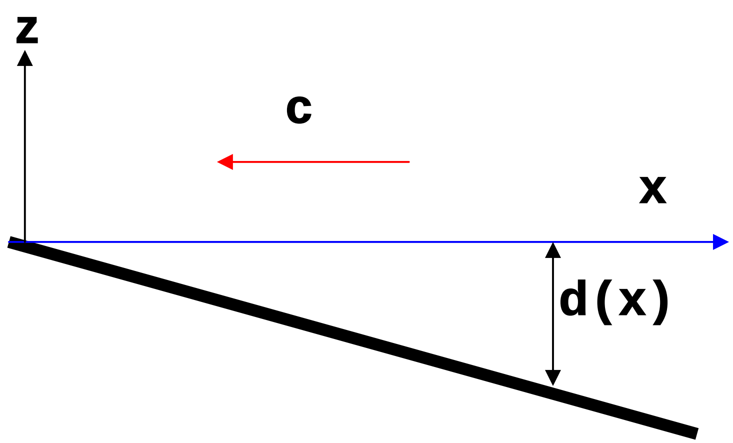


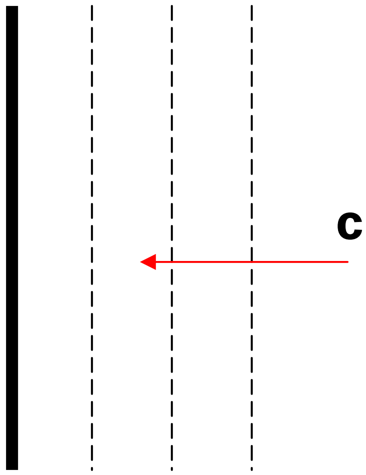
(b) SHALLOW-WATER WAVES IN PROFILE

2.3.1 波浪的浅水效应

- 浅水效应（shoaling）

- 问题：已知深水的波浪参数（H_0, T_0, L_0, C_0），如何求浅水区水深d处的波浪参数？

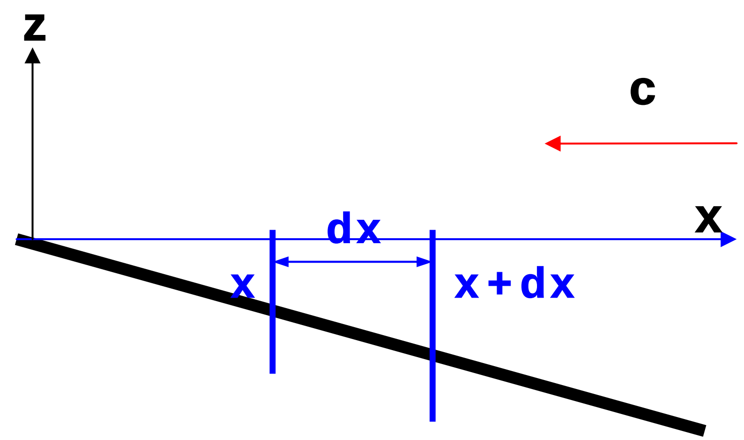




2.3.1 波浪的浅水效应

一 波峰（波数）守恒原理

1. 定义：在单位时间内跨过这两个铅直断面的波峰个数是守恒的，不会有新的波峰产生，已出现的波峰也不会消失，称为波峰守恒原理。



2.3.1 波浪的浅水效应

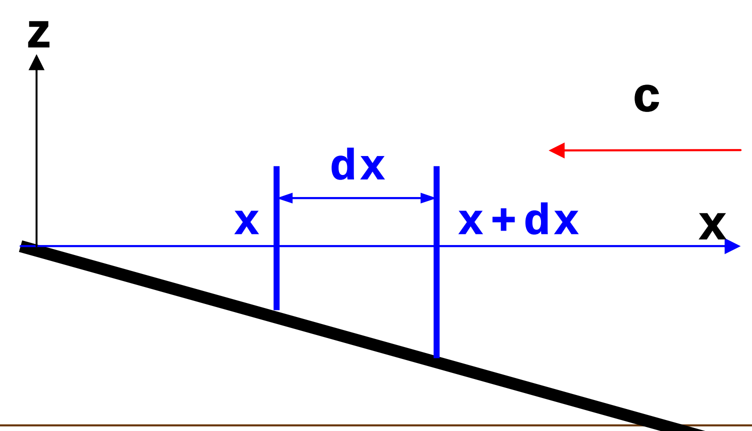
一 波峰（波数）守恒原理

2. 推导结论

- 单位时间内沿传播方向跨过铅直断面的波峰数：$\dfrac{\omega}{2\pi}$
- 沿传播方向单位长度内的波峰数：$\dfrac{k}{2\pi}$
- dt时间内净进入两铅直断面的波峰数：$\dfrac{\partial\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)}{\partial x}dxdt=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}dxdt$
- dt时间内两铅直断面内增加的波峰数：

$$\frac{\partial\left(\dfrac{k}{2\pi}\right)}{\partial t}dtdx=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial k}{\partial x}dxdt$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial x} \Rightarrow \omega=\omega_0$$



2.3.1 波浪的浅水效应

二 波速、波长和波高的变化

假设:

（1）波浪传播过程中，波周期不变，等于深水波周期

（2）忽略能量损失，波能量不变

（3）海底坡度平缓

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kd = k_0 g = \omega_0^{\ 2}$$

$$\frac{c}{c_0} = \frac{L}{L_0} = \frac{k_0}{k} = \tanh\frac{2\pi}{L}d = \tanh 2\pi\frac{d/L_0}{L/L_0}$$

2. 3. 1 波浪的浅水效应

二 波速、波长和波高的变化

$$\frac{1}{2}\rho g a^2 \frac{c}{2}\left(1+\frac{2kd}{sh2kd}\right)=\frac{1}{2}\rho g {a_0}^2 \frac{c_0}{2}$$

$$Ks=\frac{H}{H_0}=\frac{a}{a_0}=\left(\frac{c_0}{c}\frac{1}{1+\frac{2kd}{sh2kd}}\right)^{0.5}$$

$$Ks=\frac{H}{H_0}=\left(\frac{2\cosh^2 kd}{2kd+\sinh 2kd}\right)^{0.5}$$

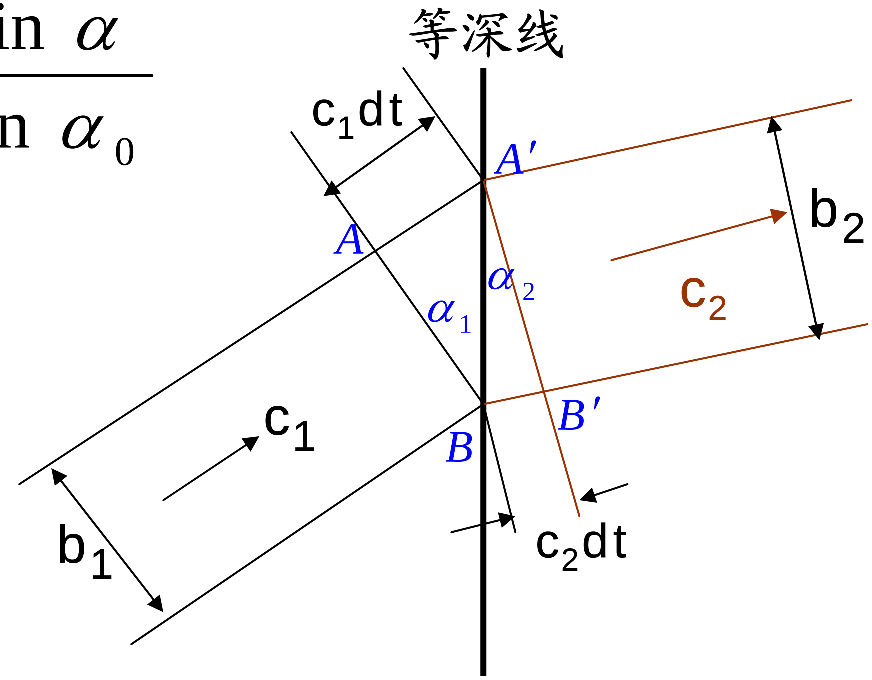
2.3.2 波浪的折射

一 波向

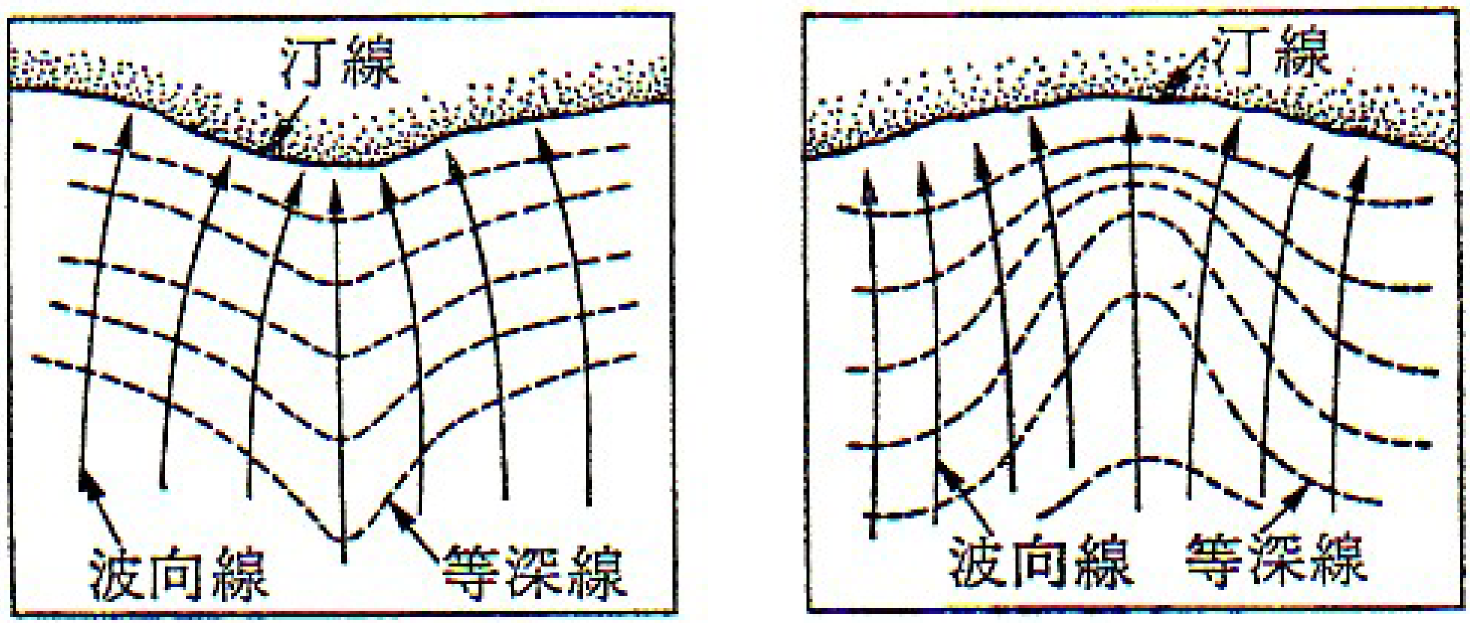
$$A'B = \frac{c_1 dt}{\sin\ \alpha_1} = \frac{c_2 dt}{\sin\ \alpha_2}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin\ \alpha_2}{\sin\ \alpha_1} \Rightarrow \frac{c}{c_0} = \frac{\sin\ \alpha}{\sin\ \alpha_0}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\cos\ \alpha_2}{\cos\ \alpha_1}$$



○ 2.3.2 波浪的折射



（a）（b）

2.3.2 波浪的折射

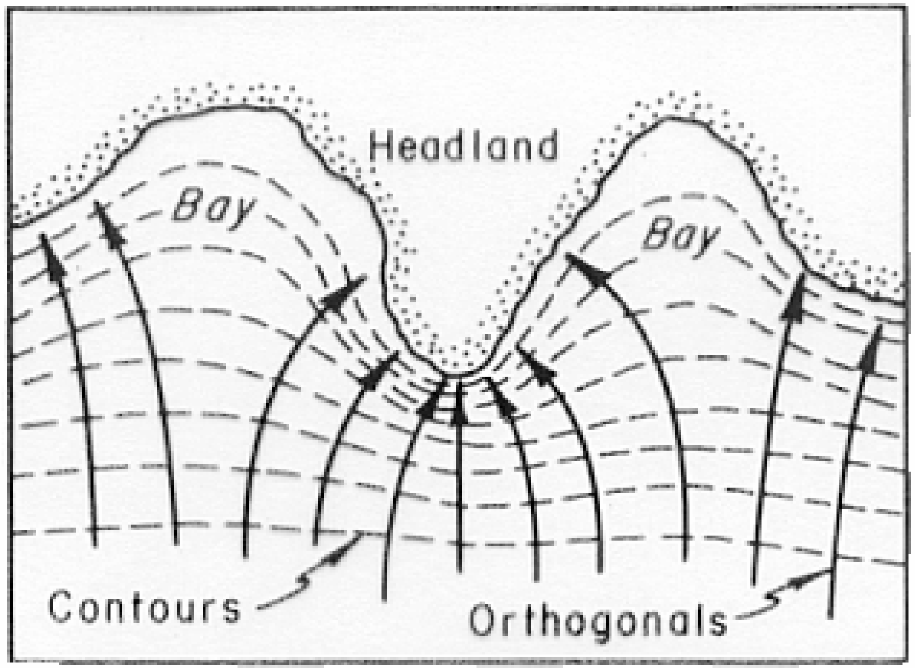


Figure 2-25. Refraction along an irregular shoreline.

2.3.2 波浪的折射

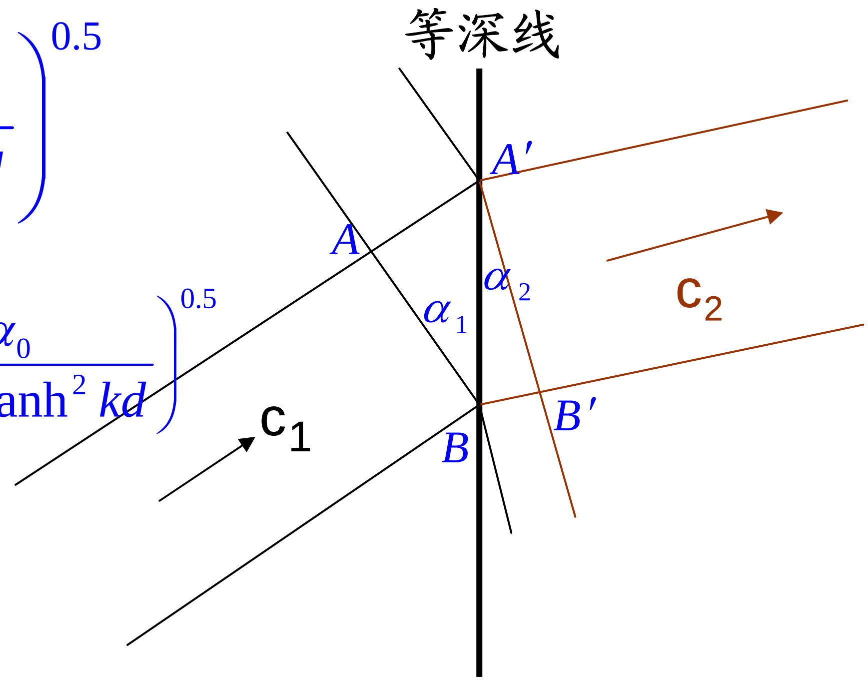
二 波高的变化

$$\frac{1}{2}\rho g a^2 \frac{c}{2}\left(1+\frac{2kd}{sh2kd}\right)b = \frac{1}{2}\rho g a_0{}^2 \frac{c_0}{2} b_0$$

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{b_0}{b}\right)^{0.5}\left(\frac{2\cosh^2 kd}{2kd+\sinh 2kd}\right)^{0.5}$$

$$K_r = \left(\frac{b_0}{b}\right)^{0.5} = \left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)^{0.5} = \left(\frac{\cos^2\alpha_0}{1-\sin^2\alpha_0\tanh^2 kd}\right)^{0.5}$$

$$\frac{H}{H_0} = K_r K_s$$



[例]某小船在无限深水的波浪中每分钟摇摆30次，求波长 L，圆频率 σ，波数 k，以及波形传播速度c。

解：此时船的航速为零，单纯由波浪引起的摇摆，

则周期为T=60/30=2s;

- 圆频率：$\omega=2\pi/T=3.14rad/s$;
- 波长：$L=gT^2/2\pi=6.26m$;
- 波数：$k=2\pi/L=1.006$;
- 波速：$c=L/T=3.12m/s$;

[例] 已知水深 h =10m，自由面上有一沿 x 轴正向传播的平面小振幅波，波长 L=3 0 m。求:

1）波幅 a=0.1m时的自由面形状

2）波的传播速度;

3）波幅 a =0.1m时在水平面以下0.5m处流体质点的运动轨迹;

4）水平面以下1m，2m处流体的平均压力;

5）波系的群速度。

解: (1) 自由水面形状为 $\eta = a\cos(kx-\omega t)$

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{30} \approx 0.209$$

$$\omega = \sqrt{gk\tanh kh} = \sqrt{9.8\times 0.209\times \tanh(0.209\times 10)} = 1.381$$

$$\eta = 0.1\times\cos(0.209x - 1.381t)$$

[例] 已知水深 h = 10m，自由面上有一沿 x 轴正向传播的平面小振幅波，波长 L = 3 0 m。求:

1) 波幅 a = 0 . 1m时的自由面形状

2) 波的传播速度;

3) 波幅 a =0. 1m时在水平面以下0. 5m处流体质点的运动轨迹;

4) 水平面以下1m，2m处流体的平均压力;

5) 波系的群速度。

解: (2) 波的传播速度

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1.381}{0.209} \approx 6.608$$

[例] 已知水深 h =10m，自由面上有一沿 x 轴正向传播的平面小振幅波，波长 L=30 m。求:

1）波幅 a=0.1m时的自由面形状

2）波的传播速度;

3）波幅 a =0.1m时在水平面以下0.5m处流体质点的运动轨迹;

4）水平面以下1m，2m处流体的平均压力;

5）波系的群速度。

解: (3) 流体质点的运动轨迹

$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\beta^2}=1$$

取z_0=0.5m，a=0.1m，

h=10m，k=0.209

$$\alpha=\frac{a\cosh k(z_0+h)}{\sinh kh}$$

$$\beta=\frac{a\sinh(z_0+h)}{\sinh kh}$$

$$a^2=0.00869$$

$$\beta^2=0.00806$$

[例] 已知水深h =10m，自由面上有一沿x轴正向传播的平面小振幅波，波长L=3 0 m。求:

1 ）波幅 a=0.1m时的自由面形状

2 ）波的传播速度;

3 ）波幅 a =0.1m时在水平面以下0.5m处流体质点的运动轨迹;

4 ）水平面以下1m，2m处流体的平均压力;

5 ）波系的群速度。

解：(4) 平均压力

$$\frac{p}{\gamma}=-z+k_p\eta$$

在一个周期内η的均值为零，故有：

$$p=-\gamma z$$

$$p_1=\gamma$$

[例] 已知水深 h =10m，自由面上有一沿 x 轴正向传播的平面小振幅波，波长 L=3 0 m。求:

1 ）波幅 a=0.1m时的自由面形状

2 ）波的传播速度;

3 ）波幅 a =0. 1m时在水平面以下0. 5m处流体质点的运动轨迹;

4 ）水平面以下1m，2m处流体的平均压力;

5 ）波系的群速度。

解：（5) 群速度

$$C_g = \frac{1}{2}C(1 + \frac{2kh}{\sinh\ 2kh}) \approx 3.272$$

[例] Shoaling: neglect reflection (unit width)

Given: $L_o = 156m, \quad H_o = 2m \quad (Deep)$

Required: Find L, H at h = 3m

Power? Total Energy in 1hr

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} \rightarrow T = 10s$$

$$C_o = \frac{L_o}{T} = 15.6 m/s \rightarrow C_{go} = \frac{1}{2} C_o = 7.8 m/s$$

$$Power = \frac{1}{2} \rho g A_o^2 B C_{go} = 39\ kw \quad (deep)$$

Accumulated Energy in 1 hr =

39000(J/s) x 3600 (s) = 140 MJ

[例] Shoaling: neglect reflection (unit width)

Given: $L_o = 156m, \quad H_o = 2m \quad (Deep)$

Required: Find L, H at h = 3m

Power? Total Energy in 1hr

Assume Shallow

$$C = C_g = \sqrt{gh} = 5.42\ m/s$$

$$L = C\ T = 54.2\ m$$

(check h/L=0.055) accurate 53.6 m

C=5.36 m/s

n=0.96

A=1.24 m

(24% increase)