

河南省 2018 大学省力学竞赛（参考答案）

一、简答题（每道题 5 分，共 20 分）

1、陀螺是中国最早的玩具，绕上鞭子细绳，急甩出去，在地上旋转，用鞭子抽之，旋转越快，越稳定。试用简单语言论述鞭子抽陀螺使之旋转越快的力学原理。

答：鞭子抽陀螺过程可分为两阶段（1 分），第一阶段舞起的鞭稍中段碰到陀螺时，鞭稍末段依赖其惯性力迅速缠绕在陀螺上（2 分）；第二阶段是鞭子其余部分在手柄作用下继续运动，拉动末段离开陀螺，即向陀螺施加时间段的力矩，陀螺在外力矩的作用下旋转加速（2 分）。



2、图示四旋翼无人机，各旋翼轴都是与竖向对称轴平行，每轴旋翼与相邻旋翼转向相反，各轴旋翼同速时可使飞机升降，试问操纵者如何通过各轴的转速实现飞机的正向前进、侧向前进、就地转向摄影的。

答：欲向某一方向前进，则该方向前端的两个旋翼降低转速或后端两旋翼提高转速，使轴端平面向前倾斜，旋翼组具有前行的分力（3 分）；欲实现就地转向旋转摄影，同时提高或降低某对称两旋翼的转速，使两个转向的反作用力矩形成差别，其差别就是定轴旋转的动力。



3、弓箭是古代与现代以弓发射的具有锋刃的一种远射兵器。弓由弹性的弓臂和有韧性的弓弦构成。实际应用的弓是图 a 而不是图 b，图 a 的弓应用了什么力学技术？

答：预应力技术（3 分），使弓面外侧经热烘现受压定型，再反转热烘定型，这样在射箭的过程中弓就是受集中力作用的简支梁，弓中部外侧表面承受最大力矩产生最大拉应力，由于外侧表面纤维先期的受压定型预应力，所以大大提高弓的抗拉强度（2 分）。



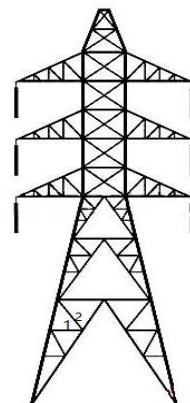
图 a



图 b

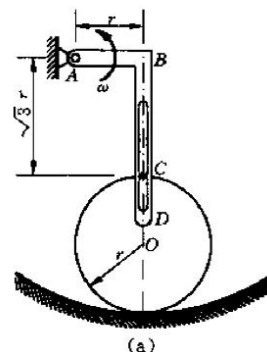
4、图示为一输电塔简图，图中主框架内布置了很多类似 1、2 的细杆，如按照桁架进行内力计算，这些杆件均为零杆，并且主框架的强度足够，请说明输电塔的主要受力特征、设置这些杆件的力学因素是什么？

答：输电塔的主要受力特征为受压杆件，杆件受压稳定性是输电塔主要特征（2 分），按照欧拉压杆临界压力公式，压杆临界的大小与压杆长度平方成反比，主框架内增加辅助杆件，可以主框架压杆的有效长度，提高主框架的稳定性（3 分）。



二、计算题 (共 4 题, 每题 25 分)

1、如图所示, 一半径为 R 的圆柱体, 通过边缘上的销钉 C , 由直角曲杆 ABD 上直槽带动沿着半径为 R 的曲面作纯滚动, 已知 $\omega = \text{常数}$ 。求图示 AB 在水平位置时, 轮心 O 的速度和加速度。

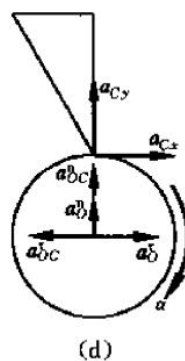
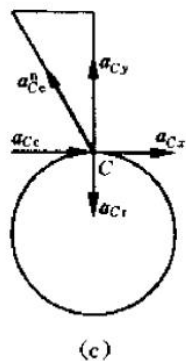
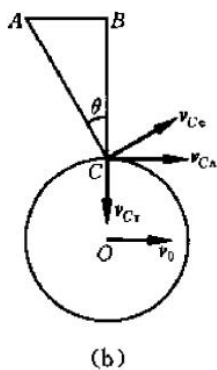
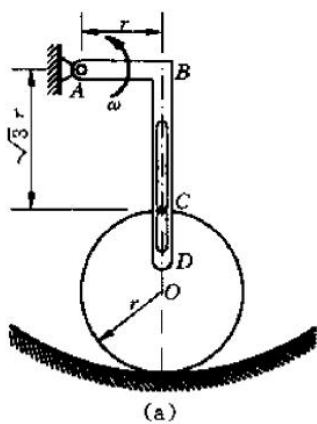


解: 求 v_O , 以 C 为动点, 曲杆 ABD 为动系, 如图(b)所示

$$v_{Ck} = v_{Cx} + v_{Ce}$$

投影

$$v_{Ck} = \sqrt{3} \omega r, \quad v_O = \frac{v_{Ck}}{2r} \cdot r = \frac{v_{Ck}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \omega, \quad v_{Cx} = r \omega$$



题 4 图

求加速度 a_O , 如图(c)所示

$$a_{Cx} + a_{Cy} = a_{Ce}^n + a_{Cc} + a_{Cx} \quad (1)$$

$$a_{Ce}^n = AC \cdot \omega^2, \quad a_{Cc} = 2\omega \cdot v_{Cx}$$

投影

$$a_{Cx} = -a_{Ce}^n \sin \theta + a_{Cc} \quad (2)$$

以 C 为基点, 分析动点 O , 如图(d)所示

$$a_O^r + a_O^t = a_{Cx} + a_{Cy} + a_{OC}^r + a_{OC}^t \quad (3)$$

$$a_{OC}^r = a \cdot r \quad (4)$$

又因为

$$v_O = \omega_O \cdot r$$

对上式求导

$$a_O^t = a \cdot r \quad (5)$$

式(3) 投影

$$a_O^r = a_{Cx} - a_{OC}^r \quad (6)$$

联解(2)、(4)、(5)、(6) 得

$$a = \frac{a_{Cx}}{2r} = \frac{r\omega^2}{2r} = \frac{\omega^2}{2}$$

O 点的轨迹为半径是 $R-r$ 的圆, 所以

$$a_O^r = \frac{v_O^2}{R-r} = \frac{3}{4} \frac{(r\omega)^2}{R-r}, \quad a_O^t = a \cdot r = \frac{r\omega^2}{2}$$

2、秋千为何越荡越高？荡秋千时在最高点时要蹲下来，而在最低点时要站起来，这样的动作会使秋千越荡越高。试用力学原理进行分析。

假设：（1）秋千长度为 l ，人的质量为 m ，人蹲下时质心在秋千最外端，站起时质心距离最外端为 a ；（2）秋千左端最高点为 h_A ，右端最高点为 h_D ，从左边荡向右边则 $h_A < h_D$ ；（3）秋千荡起以后不受外界因素影响，不计秋千的质量和摩擦。

解：如图所示荡秋千的过程，设 A 和 D 为左右侧的最高点， B 为最低点。

$A \rightarrow B$ （蹲下）：机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_A \quad (1)$$

$B \rightarrow C$ （站起）：动量矩守恒

$$mv_1 l = mv_2 (l - a) \quad (2)$$

求得

$$v_2 = v_1 l / (l - a) \quad (3)$$

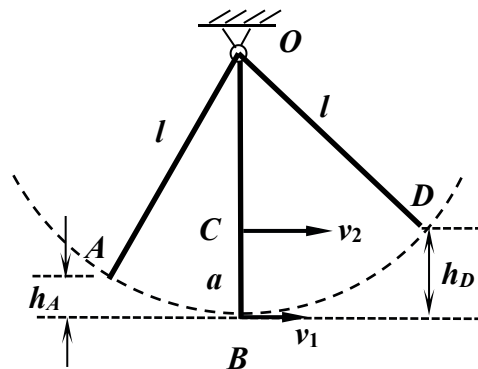
$C \rightarrow D$ （蹲下）：机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mga = mgh_D \quad (4)$$

由式（1）（3）（4）得

$$\frac{h_D}{h_A} = \frac{1 - \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1} = \frac{\frac{1}{2}m \left(\frac{l}{l-a} v_1 \right)^2 + mga}{\frac{1}{2}mv_1^2} > \left(\frac{l}{l-a} \right)^2 > 1$$

(5)



由此可知，秋千越荡越高。

3、我国很早就出现了撑架型木桥，图 a 所示的就是宋代著名画家范宽所绘《秋林飞瀑图》中的八字形撑架桥。图 b 为经过简化后撑架桥中一榀构架的计算简图。已知： $a = 2m$ ， AB 梁采用 $b \times h = 200mm \times 300mm$ 的矩形截面，均布荷载 $q = 1.2kN/m$ ，在工况一中，集中荷载 $F = 4.8kN$ 作用在梁 AB 的跨中 K 截面处，在工况二中作用在右端 B 截面处，梁 AB 的材料为木材，许可拉应力 $[\sigma_t] = 6MPa$ ，许可压应力 $[\sigma_c] = 10MPa$ ， A 处有一个水平链杆（刚度无穷大），两根斜向撑杆通过 C 、 D 处的铰与 AB 梁相连，铰未穿透 AB 梁。斜向撑杆 CI 、 DJ 均采用直径 $d = 40mm$ 的圆截面钢杆，材料的弹性模量 $E = 200GPa$ ，比例极限 $\sigma_p = 200MPa$ ，屈服极限 $\sigma_s = 240MPa$ ，安全因数 $n_s = 1.4$ ，稳定安全因数 $n_{st} = 3$ 。

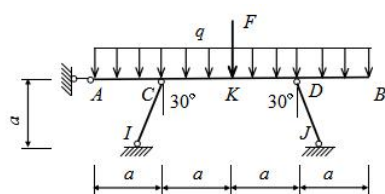
（1）试校核 AB 梁在两种工况下的正应力强度；

（2）试校核 DJ 杆在两种工况下的强度与稳定性；

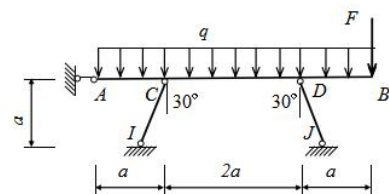
（3）北宋李诫（河南郑州人）在《营造法式》中规定：“凡梁之大小，各随其广为三分，以二为其厚。”这是说，矩形横截面的木梁，通常是由圆形横截面的木材切削加工而成的。若圆的直径为 D ，其加工而成的内接矩形的高宽比应该为 $\frac{h}{b} = \frac{3}{2}$ 。请分别以强度最优（ W_z 最大）、刚度最优（ I_z 最大）判别高宽比 $\frac{h}{b}$ 的合理数值，并判断《营造法式》相关规定合理与否。



图 a



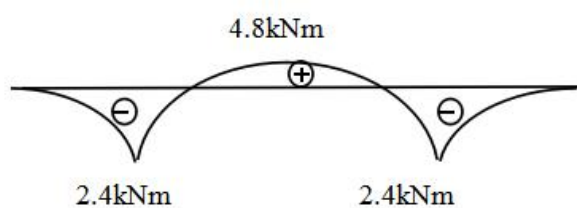
工况一



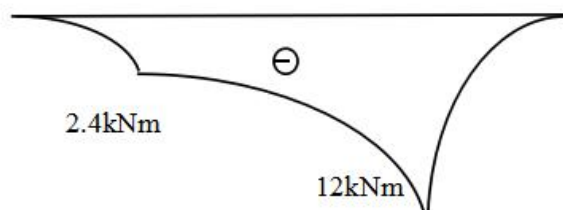
工况二

图 b

答案：（1）两种工况下的弯矩图如下

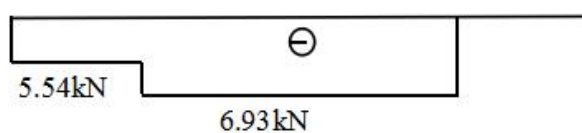
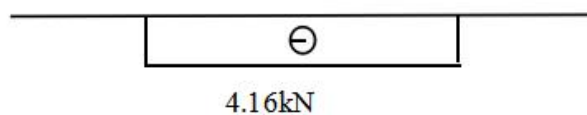


工况一



工况二

两种工况的轴力图如下



$$\text{工况一，最大压应力 } \sigma_{\max}^c = \frac{M_k}{W_z} + \frac{F_N}{A} = \frac{4800 \times 6}{0.2 \times 0.3^2} + \frac{4160}{0.2 \times 0.3} = 1.6 + 0.069 = 1.669 \text{ MPa} < 10 \text{ MPa}$$

$$\text{最大拉应力 } \sigma_{\max}^t = \frac{M_k}{W_z} - \frac{F_N}{A} = \frac{4800 \times 6}{0.2 \times 0.3^2} - \frac{4160}{0.2 \times 0.3} = 1.6 - 0.069 = 1.531 \text{ MPa} < 6 \text{ MPa}$$

均满足正应力强度条件。

$$\text{工况二，最大压应力 } \sigma_{\max}^c = \frac{M_D}{W_z} + \frac{F_N}{A} = \frac{12000 \times 6}{0.2 \times 0.3^2} + \frac{6930}{0.2 \times 0.3} = 4 + 0.116 = 4.116 \text{ MPa} < 10 \text{ MPa}$$

$$\text{最大拉应力 } \sigma_{\max}^t = \frac{M_D}{W_z} - \frac{F_{N,\max}}{A} = \frac{12000 \times 6}{0.2 \times 0.3^2} - \frac{6930}{0.2 \times 0.3} = 4 - 0.116 = 3.884 \text{ MPa} < 6 \text{ MPa}$$

均满足正应力强度条件。

（2）DJ 杆 $A = 0.001256 \text{ m}^2$ ， $l = 2.31 \text{ m}$ ， $I = 1.256 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ ，材料的许可应力

$[\sigma] = \frac{240}{1.4} = 171.4 \text{ MPa}$, $\lambda_p \approx 100$, 杆件的柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = 231 < 100$, 可以使用欧拉公式。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 46.41 \text{ kN} , \text{ 许可荷载 } [F] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = 15.47 \text{ kN}$$

工况一, 轴力值为 8.32 kN , $\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{8320}{0.001256} = 6.6 \text{ MPa} < 171.4 \text{ MPa}$, 满足强度条件。

$F_N = 8.32 \text{ kN} < [F] = 15.47 \text{ kN}$, 满足稳定性条件。

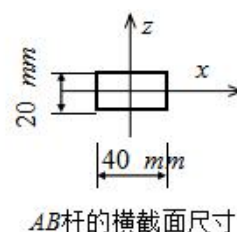
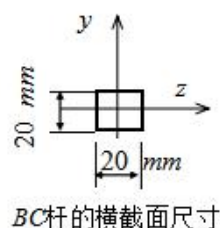
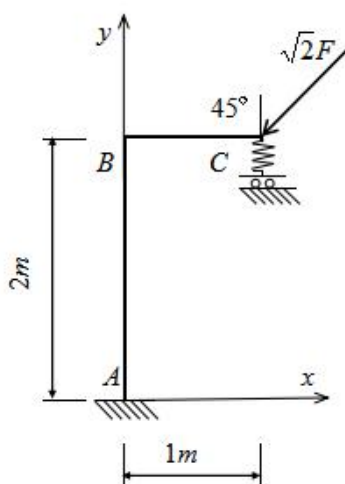
工况二, 轴力值为 13.86 kN , $\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{13860}{0.001256} = 11.04 \text{ MPa} < 171.4 \text{ MPa}$, 满足强度条件。

$F_N = 13.86 \text{ kN} < [F] = 15.47 \text{ kN}$, 满足稳定性条件。

$$(3) D^2 = b^2 + h^2 , b = \sqrt{D^2 - h^2} , W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{\sqrt{D^2 - h^2} h^2}{6} , I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{\sqrt{D^2 - h^2} h^3}{12} , \text{ 讨论以上两}$$

个函数的极值, 可得 W_z 最大时 $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, I_z 最大时 $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ 。由此可知, 《营造法式》中的规定介于二者之间且非常接近, 同时也非常便于测量加工, 是比较合适的做法。

4、图示刚架中, AB 杆长 2 m , 横截面为 $20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ 的矩形, BC 杆长 1 m , 横截面为边长 20 mm 的正方形。材料的弹性模量为 $E = 200 \text{ GPa}$, C 处作用着一个大小为 $\sqrt{2}F$, 方向如图所示的集中力, 其中 $F = 300 \text{ N}$ 。 A 处为固定支座, C 处放置在竖直放置的弹簧上, 该弹簧不能限制水平方向的位移, 弹簧刚度为 $k = 30 \text{ N/mm}$ 。图中 AB 杆的横截面为自上至下的视图, BC 杆的横截面为自右向左的视图。不计杆件的轴向拉压变形。试分别求出 AB 、 BC 杆中的最大正应力值。



解答: 首先求解超静定结构的所有支反力, 写出变形协调方程如下:

$$\frac{(F - Y_C) \times 1^3}{3EI_1} + \frac{(F - Y_C) \times 1 \times 2 \times 1}{EI_2} - \frac{F \times 2^2 \times 1}{2EI_2} = \frac{Y_C}{k} , \text{ 式中, BC 杆的惯性矩 } I_{z1} = 1.33 \times 10^{-8} \text{ m}^4 , \text{ AB 杆的}$$

惯性矩 $I_{z2} = 10.66 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, 解得弹簧支座的支反力为 $Y_C = 0.496F = 148.8 \text{ N}$ 。代入静力平衡方程求得

结构的其余支反力，并画出弯矩图如下：

AB 杆中的最大正应力值为 $\sigma_{A\max} = \frac{M_A}{W_{Z2}} = \frac{1.496 \times 300}{5.33 \times 10^{-6}} = 84.2 \text{ MPa}$ ， BC 杆中的最大正应力值为

$$\sigma_{B\max} = \frac{M_A}{W_{Z1}} = \frac{0.504 \times 300}{1.33 \times 10^{-6}} = 113.7 \text{ MPa}$$

